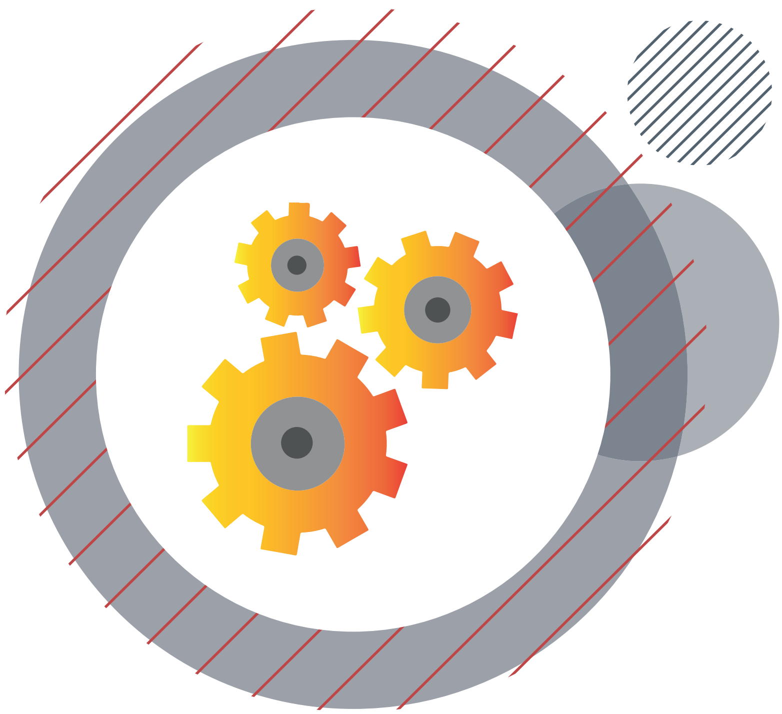
ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

COMPENDIO PARA MAESTRAS Y MAESTROS

TEXTOS DE APRENDIZAJE 2023 - 2024



SECUNDARIA COMUNITARIA PRODUCTIVA

ÁREA

MATEMÁTICA

SUBSISTEMA DE EDUCACIÓN REGULAR

ESTADO PLURINACIONAL DE BOLIVIA
MINISTERIO DE EDUCACIÓN

Compendio para maestras y maestros - textos de aprendizaje 2023 - 2024
Educación secundaria comunitaria productiva
Documento oficial - 2023

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

Bartolomé Puma Velásquez
VICEMINISTRO DE EDUCACIÓN REGULAR

María Salomé Mamani Quispe
DIRECTORA GENERAL DE EDUCACIÓN SECUNDARIA

Equipo de redacción
Dirección General de Educación Secundaria

Coordinación general
Instituto de Investigaciones Pedagógicas Plurinacional

Índice

CIENCIA, TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN

Matemática

Primer año de secundaria

Segundo año de secundaria

Tercer año de secundaria

Cuarto año de secundaria

Quinto año de secundaria

Sexto año de secundaria

Presentación

Estimadas maestras y maestros, el fortalecimiento de la calidad educativa es una de nuestras metas comunes que, como Estado y sociedad, nos hemos propuesto impulsar de manera integral para contribuir en la transformación social y el desarrollo de nuestro país. En este sentido, una de las acciones que vienen siendo impulsadas desde la gestión 2021, como política educativa, es la entrega de textos de aprendizaje a las y los estudiantes del Subsistema de Educación Regular, medida que, a partir de esta gestión, acompañamos con recursos de apoyo pedagógico para todas las maestras y maestros del Sistema Educativo Plurinacional.

El texto de apoyo pedagógico, que presentamos en esta oportunidad, es una edición especial proveniente de los textos de aprendizaje oficiales. Estos textos, pensados inicialmente para las y los estudiantes, han sido ordenados por Áreas de Saberes y Conocimientos, manteniendo la organización y compaginación original de los textos de aprendizaje. Esta organización y secuencia permitirá a cada maestra y maestro, tener en un mismo texto todos los contenidos del Área, organizados por año de escolaridad, sin perder la referencia de los números de página que las y los estudiantes tienen en sus textos de aprendizaje.

Este recurso de apoyo pedagógico también tiene el propósito de acompañar la implementación del currículo actualizado, recalcando que los contenidos, actividades y orientaciones que se describen en este texto de apoyo, pueden ser complementados y fortalecidos con la experiencia de cada maestra y maestro, además de otras fuentes de consulta que aporten en la formación de las y los estudiantes.

Esperamos que esta versión de los textos de aprendizaje, organizados por área, sea un aporte a la labor docente.

Edgar Pary Chambi
MINISTRO DE EDUCACIÓN

CONOCE TU TEXTO

En la organización de los contenidos encontraremos la siguiente iconografía:

Glosario

Glosario

Aprendemos palabras y expresiones poco comunes y difíciles de comprender, dando uno o más significados y ejemplos. Su finalidad radica en que la o el lector comprenda algunos términos usados en la lectura del texto, además de ampliar el léxico.

Investiga

Somos invitados a profundizar o ampliar un contenido a partir de la exploración de definiciones, conceptos, teorías u otros, además de clasificar y caracterizar el objeto de investigación, a través de fuentes primarias y secundarias. Su objetivo es generar conocimiento en las diferentes áreas, promoviendo habilidades de investigación.

Investiga

¿Sabías que...?

¿Sabías que...?

Nos muestra información novedosa, relevante e interesante, sobre aspectos relacionados al contenido a través de la curiosidad, fomentando el desarrollo de nuestras habilidades investigativas y de apropiación de contenidos. Tiene el propósito de promover la investigación por cuenta propia.

Noticiencia

Nos permite conocer información actual, veraz y relevante sobre acontecimientos relacionados con las ciencias exactas como la Física, Química, Matemática, Biología, Ciencias Naturales y Técnica Tecnológica General. Tiene la finalidad de acercarnos a la lectura de noticias, artículos, ensayos e investigaciones de carácter científico y tecnológico.

Noticiencia

Escanea el QR

Para ampliar el contenido

Es un QR que nos invita a conocer temáticas complementarias a los contenidos desarrollados, puedes encontrar videos, audios, imágenes y otros. Corresponde a maestras y maestros motivar al estudio del contenido vinculado al QR; de lo contrario, debe explicar y profundizar el tema a fin de no omitir tal contenido.

Aprende haciendo

Nos invita a realizar actividades de experimentación, experiencia y contacto con el entorno social en el que nos desenvolvemos, desde el aula, casa u otro espacio, en las diferentes áreas de saberes y conocimientos. Su objetivo es consolidar la información desarrollada a través de acciones prácticas.

Aprende haciendo

Desafío

Desafío

Nos motiva a realizar actividades mediante habilidades y estrategias propias, bajo consignas concretas y precisas. Su objetivo es fomentar la autonomía y la disciplina personal.

Realicemos el taller práctico para el fortalecimiento de la lecto escritura.

¡Taller de Ortografía!

¡Taller de Caligrafía!

¡Razonamiento Verbal!

1 SECUNDARIA

ÁREA MATEMÁTICA

LOS NÚMEROS ENTEROS (Z)
APLICADOS A LA COTIDIANIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

En la ciudad de Sacaba, famosa por su gastronomía, la señora Rosmery junto a su esposo Miguel tiene tres hijos en edad escolar, el Sr. Miguel trabaja como transportista en un radio taxi de servicio público, tiene un salario promedio de Bs 90 al día, cuenta con un día de descanso a la semana. Mientras que doña Rosmery se dedica a vender Charquekan, los fines de semana (sábado y domingo), en un lugar muy concurrido. Con mucho esfuerzo logra obtener una ganancia media de Bs 350 por día, obteniendo Bs 700 a la semana. Rosmery y Miguel tienen una deuda familiar de Bs 6 000, la cual deben cancelar en un plazo de tres meses a razón de Bs 2 000 cada mes. Considerando los ingresos y gastos mensuales de la familia, se tiene el siguiente detalle:

Datos	Ingresos	Detalle de gastos	Costo	Diferencia
Papá gana Bs 90 *6 días *4 semanas =	+ 2 160	Alquiler	−400	¿Saldo o déficit?
		Servicios básicos e internet	−350	
Mamá gana Bs 700*4 semanas =	+ 2 800	Material educativo (modalidad a distancia)	−90	
		Insumos de limpieza y bioseguridad	−150	
		Vestimenta	−250	
		Alimentación	−1800	
		Deuda mensual	−2000	
SUMA TOTAL:	Bs 4 960		−5040	−80

Actividad 1: Respondemos las siguientes preguntas en el cuaderno de ejercicios.

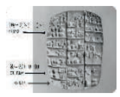
- ¿A cuánto ascienden los gastos mensuales de la familia?
- ¿Rosmery y Miguel tienen saldo para ahorro o hay déficit?
- ¿Qué gasto es necesario reducir para contar con el dinero necesario para el mes?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Origen de los números enteros

En Matemática los números enteros son números que se expresan con los signos (+) o (-), también se incluye al 0, es decir los números enteros son negativos y positivos.

Como un sub conjunto de los números enteros, tenemos los números negativos, antiguamente conocidos como “números deudos” o “números absurdos”. Repasemos un poco de historia:

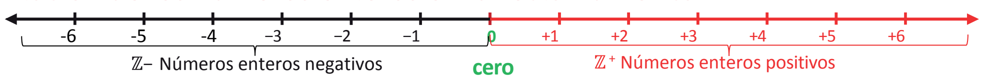
Hombres primitivos, cuantificaban sus animales o pertenencias con marcas, en árboles o rocas. 	Los Babilonios, utilizan simples enteros positivos para contar unas pocas ovejas 	En China, de forma rústica fueron formalizando la notación posicional de los números sobre un tablero de cálculo. 		En oriente, se manejaban números positivos y negativos, estrictamente se utilizaba los ábacos, usando tablillas o bolas de diferentes colores 	En India, diferencian entre números positivos y negativos, que interpretaban como créditos y débitos, respectivamente, distinguiéndolos simbólicamente. La difusión de los símbolos germánicos + y −, se popularizó con el matemático alemán Stifel (1487 – 1567). 	Hasta fines del siglo XVIII los números negativos no eran aceptados universalmente. Gerolamo Cardano, en el siglo XVI, llamaba a los números negativos "falsos". 	Leonardo Euler en el Anteitung Zur Álgebra (1770) trata de "demostrar" el producto, cociente, resto, etc. de cantidades positivas y negativas. Además, complementa el conjunto de los números naturales. 
3000 A. C.	**1800 A. C.**	**400 A. C.**	**0**	**Siglo V D. C.**	**Siglo XV D. C.**	**Siglo XVI D. C.**	**Siglo XVIII D. C.**
−3000	**−1800**	**−400**		**+500**	**+1500**	**+1600**	**+1900**

2. El conjunto de los números enteros

Los números enteros "Z" contienen a los naturales (números positivos), el número cero "0" y los números opuestos que corresponden a los números negativos.

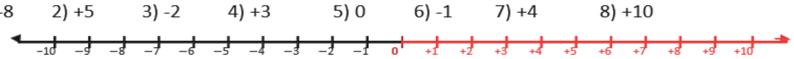
Ejemplo: −14, −6, −2, 0, +7, +10, +19, +27

3. Representación de los números enteros en la recta numérica



Ejemplo: Encerramos con un círculo en la recta numérica, los siguientes números enteros.

1) -8 2) +5 3) -2 4) +3 5) 0 6) -1 7) +4 8) +10



Valor absoluto. Se comprende como la distancia que tiene un número positivo o negativo al número cero. Por eso el valor absoluto se representa con dos líneas verticales y paralelas por tanto el siempre será positivo.

Ejemplos: $|+6| = 6$; $|-4| = 4$; $|-15| = 15$; $|+50| = 50$; $|-50| = 50$; $|+1000| = 1000$

4. Operaciones con números enteros

4.1 Adición y sustracción

Para sumar números enteros debemos cumplir con la siguiente regla:

- Números enteros con el mismo signo se suman sus valores absolutos y se mantiene el signo.
- Números enteros con signos distintos se restan sus valores absolutos y se mantiene el signo del mayor.

Actividad 2: Considerando los ejemplos y regla de signos, resolvemos en el cuaderno de ejercicios.

Ejemplo		Regla de signos	Ejercicios			
1) **2)**	**+15 + 11 = +26** **− 21 − 8 = − 29**	Signos iguales se suman y se mantiene el signo.	1) 2)	−8 − 17= 22 + 45=	3) 4)	322 + 45 + 234= -345-1234-1 =
3) **4)**	**+23 − 15 = +8** **− 21 +11 = − 10**	Signos diferentes se restan manteniendo el signo del mayor.	5) 6)	55 − 25= −23 + 66=	7) 8)	33-255 = -345 + 288 =

Operaciones combinadas de adición y sustracción de “Z”

Ejemplo: Resolvemos: $23 + 7 - 61 + 8 - 9 + 10 - 11 + 15 - 112$

Para resolver ejercicios combinados de adición y sustracción se realiza de acuerdo al siguiente procedimiento:
Operando horizontalmente

$23 + 7 - 61 + 8 - 9 + 10 - 11 + 15 - 112 = 23 + 7 - 61 + 8 - 9 + 10 - 11 + 15 - 112 = 23 + 7 + 8 + 10 + 15 - 61 - 9 - 11 - 112$
$= +63 - 193 \quad = -130$

1° Seleccionamos cantidades positivas y negativas.
2° Sumamos signos iguales: positivos con positivos y negativos con negativos.
3° Restando signos diferentes: resultado de positivos menos el resultado de negativos.
4° El resultado lleva el signo del mayor valor absoluto.

Para la resolución de ejercicios combinados de adición y sustracción de números enteros con signos de agrupación, se suprimen los signos de agrupación de acuerdo a las siguientes consideraciones:

- Si delante del signo de agrupación existe un signo positivo (+), los signos de las cantidades que encierra éste, se mantienen, es decir se copian los números con sus mismos signos.

Ejemplo: $-5 + (3 - 4 - 10 + 7) = -5 + 3 - 4 - 10 + 7 = +3 + 7 - 5 - 4 - 10 = +10 - 19 = -9$

- Si delante del signo de agrupación existe un signo negativo (−), los signos de las cantidades que encierra éste, cambian, es decir se copian las cantidades con sus signos opuestos.

Ejemplo: $-5 - (3 - 4 - 10 + 7) = -5 - 3 + 4 + 10 - 7 = +4 + 10 - 5 - 3 - 7 = +14 - 15 = -1$

Cuando se presentan varios signos de agrupación, se suprimen: primero los paréntesis, luego los corchetes, posteriormente las llaves de acuerdo a las consideraciones dadas anteriormente, para finalmente realizar la selección de números positivos y negativos, concluyendo las adiciones y sustracciones dadas de acuerdo a las reglas de signos correspondientes.

Ejemplo: Resolvemos:

$$
\begin{aligned}
&-\{-(-45) + (-117) - [-640 + (+373)] + [624 - (-277)]\}\\
&= -\{+45 - 117 - [-640 + 373] + [624 + 277]\}\\
&= -\{+45 - 117 - [-267] + [+901]\}\\
&= -\{+45 - 117 + 267 + 901\}\\
&= -45 + 117 - 267 - 901 = +117 - 45 - 267 - 901\\
&= +117 - 1213 = -1096
\end{aligned}
$$

Actividad 3. Resolvemos las siguientes operaciones en el cuaderno de ejercicios:

1) $-107 - (-3) =$
2) $17 + 28 - 36 - 4 + 57 - 42 + 89 - 1 =$
3) $-\{-(-44) - (-123) - [-640 - (730 - 480)] - [624 - (-277)]\} =$
4) $-\{-8 - (-13) + [-640 - (10 - 80)] - [64 - (-87)]\} =$
5) $300 - \{-(-484) + (-1) - [-0 - (10 - 220)] - [1213 + (-345)]\} =$
6) $-241 + (-58) =$
7) $[-3 - (-12)] - (40 - 12) + 3 - (-15) =$

4.2. Multiplicación y división

Para multiplicar y/o dividir números enteros se aplica la regla de signos, luego se multiplica y/o divide según la operación que corresponda.

Regla de signos de la DIVISIÓN				
+	:	+	=	+
−	:	−	=	+
+	:	−	=	−
−	:	+	=	−

Regla de signos de la MULTIPLICACIÓN				
+	*	+	=	+
−	*	−	=	+
+	*	−	=	−
−	*	+	=	−

Elementos de la multiplicación y división

Propiedades de la multiplicación y división en Z

Propiedad conmutativa. El orden de los factores no altera el producto: $a * b = b * a$

Ejemplos: (− 5) ∗ (− 7) = (− 7) ∗ (− 5)
35 = 35

(− 8) ∗ (+ 9) = (+ 9) ∗ (− 8)
−72 = −72

Propiedad asociativa. Dos o más factores se pueden agrupar de formas diferentes, el producto no cambia.

Ejemplo: [(+ 3) ∗ (+ 5)] ∗ (− 10) = (+ 3) ∗ [(+ 5) ∗ (− 10)]
15 ∗ (− 10) = (+ 3) ∗ (− 50)
− 150 = − 150

Propiedad del elemento neutro. El elemento neutro en la multiplicación es el 1, porque cualquier cantidad multiplicada por 1, es siempre la misma cantidad.

Ejemplos: (− 5) ∗ 1 = − 5 1 ∗ 120 = 120 1 ∗ (− 345) = − 345

Propiedad del elemento absorbente. El elemento absorbente en la multiplicación es el 0 (cero), porque cualquier cantidad multiplicada por 0, es siempre 0.

Ejemplos: (− 10) ∗ 0 = 0 0 ∗ 45 = 0 250 ∗ 0 = 0

Propiedad distributiva. Es distributiva respecto a la adición y sustracción.

Ejemplo: −3∗ (−2 + 4 −3) = −2∗ (−3) + 4∗ (−3) −3∗ (−3) = 6 −12 + 9 = 15 −12 = 3

Actividad 4. Resolvemos las operaciones de multiplicación y división en el cuaderno de ejercicios:

1) (− 1) (− 4) (− 5) (− 3) =	2) 10*(−5) =	3) 21*(−5)*(−2)=	4) (−9)(−11)=
5) (−5)(−2)(−6) =	6) 210 + (−50)=	7) (−125) − (−255) =	8) 120:(−24)=

4.3 Potenciación y Radicación

Potenciación de números enteros. La potenciación es la multiplicación repetida de la base, cuantas veces indica el exponente para llegar a la potencia. Los elementos de la potenciación son:

Exponente

$$2^5 = 32$$

Base Potencia

Ejemplos: Calculamos: $3^4 = 3 * 3 * 3 * 3 = 81$ $(-6)^5 = (-6) * (-6) * (-6) * (-6) * (-6) = -7776$

Propiedades de la potenciación

Producto de potencias de la misma base. En la multiplicación de potencias de la misma base, se anota la misma base y se suman los exponentes.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo: $(-11)^2 * (-11)^3 = (-11)^{2+3} = (-11)^5 = -161051$

Cociente de potencias de la misma base. En la división de potencias de la misma base, se anota la misma base y se restan los exponentes.

$$a^m : a^n = a^{m-n}$$

Ejemplo: $(-9)^{12} : (-9)^6 = (-9)^{12-6} = (-9)^6 = 531441$

Potencia de otra potencia. Se anota la misma base y se multiplican los exponentes.

$$(\quad) = \quad \cdot$$

Ejemplo: $(2^3)^2 = 2^{3.2} = 2^6 = 64$

Potencia de una multiplicación y división. Si se tiene una multiplicación o división elevadas a una potencia (exponente), se distribuye el exponente en cada factor y/o dividendo y divisor.

$$(a \cdot b)^m = a^m \cdot b^m$$

Ejemplo: $(3 * 5)^2 = 3^2 * 5^2 = 9 * 25 = 225$

$$(a : b)^m = a^m : b^m$$

Ejemplo: $[(-15) : 3]^3 = (-15)^3 : 3^3 = -3375 : 27 = -125$

Actividad 5. Resolvemos las siguientes operaciones combinadas en el cuaderno de ejercicios:

1) $(-2)^8 =$	2) $(-3)^2(-3)^2(-3)^3 =$	3) $(-8)^{12} \div (-8)^9 =$
4) $\{[(37)^3]^0\}^4 =$	5) $[(-6)^2(-2)^3]^4 =$	6) $(4^3 \div 2^4)^2 =$
7) $1245^0 =$	8) $5^3 * 5^4 =$	9) $(6^3)^2 =$

Radicación de números enteros. La raíz de un número entero, consiste en encontrar un número que, elevado al índice de la raíz, nos dé como resultado el radicando.

Elementos de la radicación

Índice Raíz

$$\sqrt[3]{64} = 4 \quad \text{porque} \quad 4^3 = 64$$

Radicando

Ejemplos: Calculamos:

$\sqrt[3]{1000} = 10$ porque $10^3 = 1000$ $\qquad$ $\sqrt{144} = 12$ porque $12^2 = 144$

En el segundo ejemplo, cuando el índice de la raíz es 2, se sobreentiende y no se escribe.

Propiedades de la radicación

Propiedad	En símbolos	Ejemplo
Raíz de un producto. Es igual al producto de las raíces de los factores.	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[5]{32 \cdot 7776} = \sqrt[5]{32} \cdot \sqrt[5]{7776}$ $= 2 \cdot 6 = 12$
La raíz de un cociente. Es igual al cociente de la raíz del dividendo entre la raíz del divisor	$\sqrt[n]{a : b} = \sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[4]{10000 : 625} = \sqrt[4]{10000} : \sqrt[4]{625}$ $= 10 : 5 = 2$
Raíz de una potencia. Es igual al radicando elevado al exponente dividido entre el índice de la raíz.	$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$\sqrt[3]{15^6} = 15^{\frac{6}{3}} = 15^2 = 225$
Raíz de una raíz. Es igual al producto de los índices en una sola raíz, conservando el mismo radicando.	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[m \cdot n]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[3]{262144}} = \sqrt[3\cdot 3]{262144}$ $= \sqrt[9]{262144} = 9$

Actividad 6. Resolvemos las siguientes operaciones aplicando las propiedades de raíces en el cuaderno de ejercicios:

1) $\sqrt[3]{1331 * 216} =$	**2)** $\sqrt[4]{4096 : 16} =$	**5)** $\sqrt[3]{\sqrt[2]{262144}} =$	**7)** $\sqrt[4]{\sqrt{100000000}} =$
3) $\sqrt[6]{1000000 : 64} =$	**4)** $\sqrt[6]{2985984 * 15625} =$	**6)** $\sqrt[3]{16^6} =$	**8)** $\sqrt[5]{13^{10}} =$

Operaciones combinadas. Para resolver operaciones combinadas con “Z”, debemos recordar la jerarquía de operaciones y también el orden de resolución o supresión de los signos de agrupación, recordemos:

- En símbolos de agrupación: 1° (); 2° []; 3° {}
- En operaciones: 1º a^n y $\sqrt[n]{a}$; 2º “$*$” y “$\div$” ; 3º “+” y “−”

Ejemplo. Analicemos el proceso de resolución de los siguientes ejercicios:

Efectuar: $\sqrt[3]{-27} * 2^2 + (18 \div \sqrt{81} + 8)\{2^4 \div (-2^2) - [5 + 94 \div (15 \div \sqrt{25} - \sqrt{100} * 5)](-2)\} + 2$

$$= -3 * 4 + (18 \div 9 + 8)\{16 \div (-4) - [5 + 94 \div (15 \div 5 - 10 * 5)](-2)\} + 2$$
$$= -12 + (2 + 8)\{-4 - [5 + 94 \div (3 - 50)](-2)\} + 2$$
$$= -12 + (10)\{-4 - [5 + 94 \div (-47)](-2)\} + 2$$
$$= -12 + 10\{-4 - [5 - 2](-2)\} + 2$$
$$= -12 + 10\{-4 - [3](-2)\} + 2$$
$$= -12 + 10\{-4 + 6\} + 2 = -12 + 10 * 2 + 2 = -12 + 20 + 2 = 10$$

Actividad 7. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno:

1) $-\sqrt{144}+\{2^4\div(-4)-[5+94\div(15\div5-10*5)](-2)\}(18\div9+2^3)+2=$

2) $-12^2\div\{(-2)^5+\sqrt{9}[2^2+(-5-7*\sqrt[3]{27})\div(10+3)-13]-\sqrt{100}\}=$

3) $\sqrt[3]{125*1000}-(-5+15)*\sqrt[5]{32}+(-6)^2-(-8)^3=$

4) $[-(15\div5)^3-10]+\{\sqrt[3]{1000:8}+(7)^2-[(-2)^4]^2\}=$

5. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

1. ¿A cuánto se debe vender un televisor, que costo Bs 720, para ganar Bs 140?

Resolución: 720 + 140 = 860

R. Se debe vender el televisor a Bs 860.

2. El miércoles la temperatura fue de 15°C y el jueves fue de -3°C ¿Cuánto es la diferencia de temperatura del miércoles al jueves?

Resolución: $15°C-(-3°C)=15°C+3°C=18°C$

Actividad 8. A través del análisis y razonamiento resolvemos los siguientes problemas en el cuaderno de ejercicios:

1) Juan debe Bs 390, a un taller por la reparación de su moto. Si canceló Bs 137, ¿cuánto debe?
2) La señora Roció recibe su sueldo de Bs 2 800. Cancela una deuda de Bs 390, luego compra útiles escolares para sus hijos por un valor equivalente a Bs 140 y de regreso a su casa se encuentra Bs 50.
¿Cuánto dinero le queda?
3) En el valle de Tarija tienen 15 cajas de 50 claveles preparadas para la venta. ¿Cuántas cajas, iguales a las anteriores, les faltan para cubrir un pedido de 100 docenas de claveles?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 9. Realicemos las siguientes actividades en el cuaderno de ejercicios:

1) Reflexionemos sobre la importancia de ampliar el conjunto numérico de naturales a enteros y su aplicación en la cotidianidad.
2) Analizamos las actitudes positivas y negativas que asumen los miembros de la comunidad, respecto a la lucha contra la pandemia.
3) Reflexionamos sobre los impactos positivos y negativos de la pandemia del COVID-19 en el medioambiente.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 10. Realicemos las siguientes actividades:

1) Investiguemos y realizamos una representación gráfica de la ubicación geográfica de cada departamento respecto a la altura de metros sobre el nivel del mar.

2) Con materiales de tu contexto, construimos la ubicación geográfica de cada departamento, respecto a la altura de metros sobre el nivel del mar.

LOS NÚMEROS ENTEROS
Y SU RELACIÓN CON LA GEOMETRÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

En la comunidad de La Cruz, ubicada en el departamento de Pando, en una reunión debatieron la importancia de trabajar con cultivos y sembradíos de plantas locales debido a que esto contribuye con la alimentación saludable en la comunidad.

Frente a esta situación vieron por conveniente sembrar hortalizas por familias, cada familia vio la forma geométrica que tendrían estos huertos. Con la ayuda del maestro de Matemática, en consenso con la comunidad, cada huerto debería tener una superficie de dieciséis metros cuadrados ($16m^2$).

Para tal efecto los estudiantes con sus familiares, trazaron cuadriláteros en alrededores de la Unidad Educativa, que respondían a la superficie fijada por consenso ($16m^2$), es así que surgieron huertos de 2*8, 4*4, 16*1 y otras medidas. Algunos decidieron construir figuras geométricas diferentes para salir de lo común, pero respetando la superficie acordada, por ejemplo, las áreas de un cuadrado y un círculo ($A_{\square}=A_{\bigcirc}$) las mismas que deben ser iguales.

Actividad 11. Respondamos las preguntas en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Cómo puedes dar utilidad a la geometría y sus relaciones con el entorno natural para proyectar espacios en superficies según la necesidad de la comunidad?
2. ¿Qué tan útil consideras a la geometría para solucionar necesidades y problemáticas de la realidad en función a las potencialidades de la región?
3. ¿Cómo utilizas las superficies y perímetros en tu contexto?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definiciones básicas de geometría plana

Como se observa en la imagen, las y los estudiantes están fijando estacas en la superficie que matemáticamente representan puntos, al unir dos puntos obtenemos segmentos y al unir tres o más segmentos obtenemos figuras planas en dos dimensiones, pero si se construye sobre esta superficie alguna estructura se obtendrán cuerpos geométricos de tres dimensiones.

1.1. Geometría

La geometría es la rama de la matemática orientada al análisis de las medidas y las propiedades de las figuras en un espacio o plano.

1.2. Geometría plana

Es una parte de la geometría, que estudia las figuras geométricas en un plano, este estudio se realiza a partir de dos dimensiones.

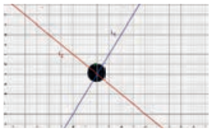
Los elementos básicos con los que se suele trabajar en esta parte de la geometría son: el punto, la recta, semirrecta, segmento, así como otros conocimientos que se irán desarrollando, en esta unidad.

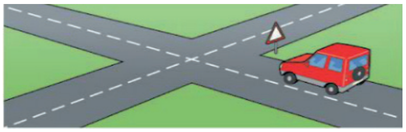
Punto

El punto está dado por la intersección de dos rectas, su característica principal es que no tiene largo, ancho, alto, área ni volumen. La idea de punto lo podemos relacionar con la marca que deja un lápiz bien afilado en el papel, un grano de sal o azúcar, la punta de una aguja de cocer y otros.

Un punto se nombra con una letra mayúscula del alfabeto.

Ejemplos:





2. La recta, semirecta y segmento

2.1. Recta

La recta es una sucesión infinita de puntos situados en una misma dirección, que no tiene principio ni tiene fin. La recta tiene una sola dimensión: la longitud.

Para nombrar las rectas se utilizan las letras r,s,t,u,..., generalmente minúsculas.

Recta

2.2. Semirrecta

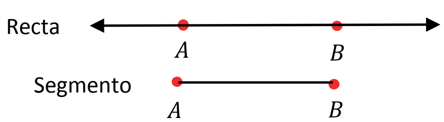
Es una porción de recta que tiene principio y no tiene fin.

Semirrecta Semirrecta

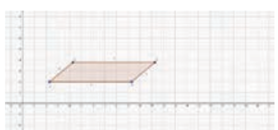
2.3. Segmento

Es una recta delimitada por dos puntos, por ejemplo, las barras transversales en los rieles del ferrocarril, como se observa en la imagen.

Plano



Es el espacio de dos dimensiones formado por un conjunto infinito de puntos. Tres puntos que no están en la misma recta forman un plano, por ejemplo: la superficie del agua de una piscina, la hoja de un cuaderno, una frazada plana.



Actividad 12. Realicemos las siguientes actividades en el cuaderno de ejercicios:

1. Grafica objetos que representan un segmento en tu cuaderno.

2. Completa los siguientes enunciados con las palabras: plano, recta o punto, en tu cuaderno, en las oraciones que correspondan:

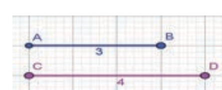
   En una pizarra de un aula podemos ver...
   Un palo de escoba es la unión de...
   Un granito de azúcar representa un...

3. Operaciones con segmentos

3.1 Adición de segmentos

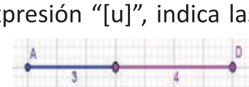
Para sumar dos o más segmentos, se traslada en la misma dirección, uno a continuación del otro.

Ejemplo: Sumar $\overline{AB} = 3\ [u]\ con\ \overline{CD} = 4\ [u]$



Notemos que cada segmento se escribe nombrando los extremos con letras mayúsculas la expresión "[u]", indica las unidades de longitud que pueden ser: cm, m, etc.

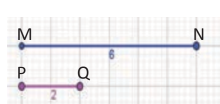
$\overline{AB} + \overline{CD}\ = 7\ [u]$



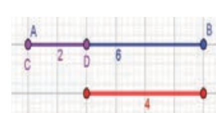
3.2 Sustracción de segmentos

Para restar dos segmentos, se traslada sobre el segmento minuendo el segmento sustraendo de manera que coincida uno de los extremos.

Ejemplo: Restar $\overline{MN} = 6\ [u]\ menos\ \overline{PQ} = 2\ [u]$

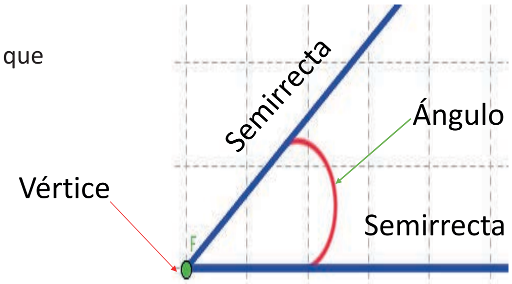


$\overline{MN} - \overline{PQ}\ = 4\ [u]$



4. Definición de ángulo

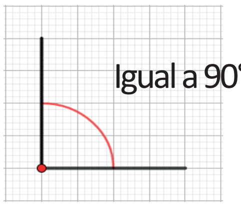
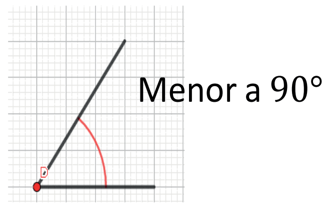
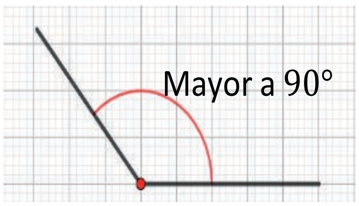
Un ángulo es el espacio formado por la intersección de dos semirrectas que tienen un origen en común.

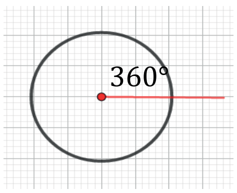
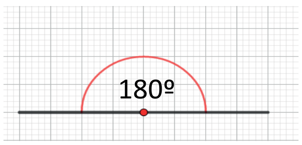
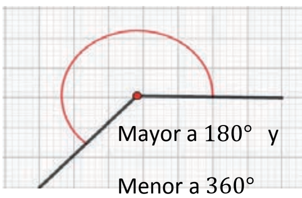
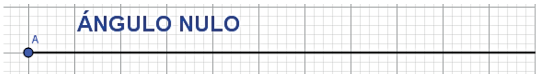


El punto en común u origen se llama vértice.

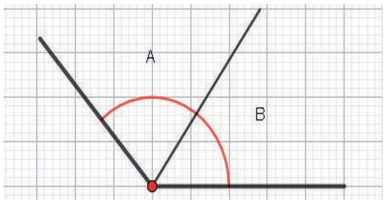
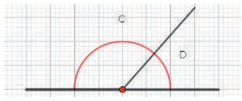
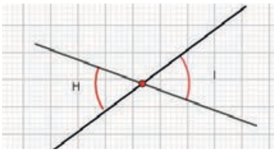
5. Clasificación de los ángulos

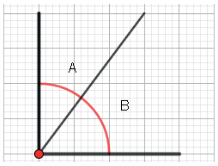
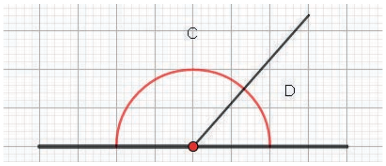
La clasificación de los ángulos según su medida:

Ángulo recto	Ángulo agudo	Ángulo obtuso
		

Ángulo completo	Ángulo llano	Ángulo cóncavo
		
Ángulo Nulo		

Clasificación de ángulos según sus características: Esta clasificación trata de ver un ángulo con respecto a otro, de tal manera que se puedan encontrar.

Ángulos consecutivos	Ángulos adyacentes	Ángulos opuestos por el vértice
	C + D = 180° y tienen un lado común 	

Ángulos complementarios		Ángulos suplementarios	
	A + B = 90°		C + D = 180°

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 13. Reflexionamos acerca de la importancia de conocer ángulos y su aplicación en algunas ramas de la Matemática, posteriormente plasmamos los conceptos más relevantes en nuestro cuaderno.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 14. Elaboramos una maqueta

Utilizando material reciclado, grupos comunitarios, construimos maquetas, para identificar las clases de ángulos en el contexto de la comunidad educativa.
Las maquetas deben ser de diferentes lugares conocidos.

REPRESENTACIÓN DE LAS FORMAS EN EL PLANO CARTESIANO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

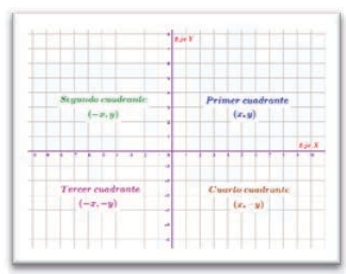
La ciudad de Potosí cuenta con una gran variedad de museos y edificios históricos, razón por la cual fue declarada Patrimonio Cultural de la Humanidad por la UNESCO. Siendo la torre de la Compañía de Jesús, uno de los museos más visitados, después de la Casa de Moneda. Si observamos la imagen satelital con ayuda de la brújula, podemos indicar que la torre de la Compañía de Jesús se encuentra a una cuadra al oeste de la Plaza 10 de noviembre, sobre la calle Ayacucho, pero la iglesia de San Francisco se encuentra a dos cuadras al sur de la misma plaza, sobre la calle Tarija.

Actividad 15. Trazamos el desplazamiento en la imagen satelital y respondemos las siguientes preguntas:

- Si la posición inicial es el Hotel Santa Teresa y se requiere llegar al mercado central. ¿Cuál sería el desplazamiento a realizar?
- Si nos encontramos en la Plaza de la Madre y deseamos regresar al Hostal Eucalyptus. ¿Cuál es la posición inicial? ¿Cuál será el desplazamiento a realizar?
- ¿Cuál será el trayecto recomendable para los turistas que desean visitar Potosí?
- ¿Qué lugares turísticos tiene el Estado Plurinacional de Bolivia?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

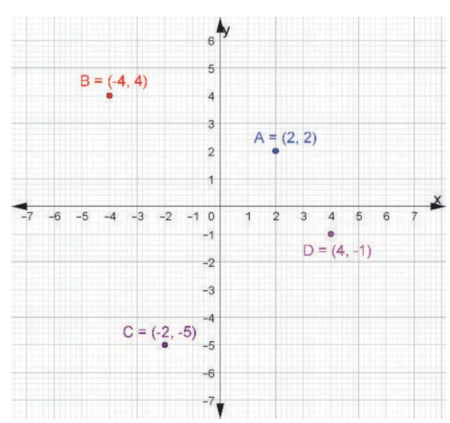
1. Plano cartesiano



El plano cartesiano es un sistema de coordenadas referenciales conformado por dos ejes, ambos ortogonales entre sí, los cuales se interceptan en un punto llamado centro u origen. El eje “X” horizontal se denomina eje de las abscisas y el eje “Y” vertical se denomina eje de las ordenadas, a partir del punto de origen, cada eje se divide en dos semiejes positivo y negativo, los cuales a su vez dividen al plano en cuatro superficies llamadas cuadrantes.

2. Par ordenado

Se denomina par ordenado a una expresión escrita de la forma: (a,b), donde “a” es la primera componente y “b” es la segunda componente, esta expresión representa un punto en el plano cartesiano. De acuerdo a los signos de cada componente, el punto se ubicará en el cuadrante correspondiente.



3. Puntos, segmentos, rectas y polígonos

3.1 Punto. Es la representación gráfica de un par ordenado.

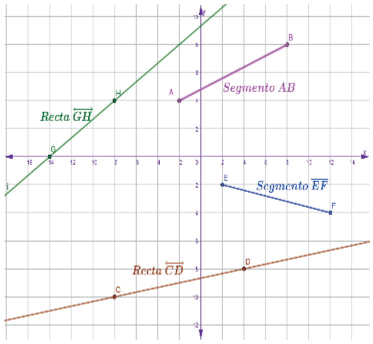
La ubicación del punto en el plano cartesiano depende de los signos de los componentes.

Ejemplos: Ubicamos los pares ordenados: (2,2), (-4,4),(-2,-1) y (4,-3).

Actividad 16. Realiza las siguientes actividades en el cuaderno de ejercicios:

1) Trazamos un plano cartesiano en nuestro cuaderno y ubicamos los siguientes puntos en el cuadrante que corresponda: (-4,3);(-2,1);(3,-4);(0,-2);(-3,-1);(-4,0);(5,4);(2,-5);(-1,-3);(4.1);(5,-6); (-6,-3)

2) ¿A qué cuadrante pertenecen los puntos que tienen una coordenada igual a cero?



3.2 Segmento

Un segmento es una porción de línea recta delimitada por dos puntos, se denota por letras mayúsculas que corresponden a sus extremos.

3.3 Recta

En el plano cartesiano podemos definirla como la prolongación ilimitada de un segmento en ambas direcciones. ***Ejemplos:*** En el gráfico observamos segmentos y rectas.

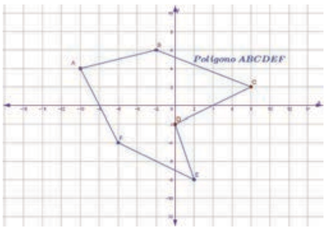
3.4 Polígono

Para formar un polígono en el plano cartesiano debemos unir segmentos consecutivos en puntos comunes llamados vértices.

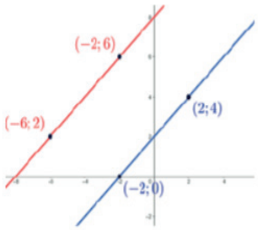
Actividad 17. Realiza las siguientes actividades en el cuaderno de ejercicios:

Ubicamos cada punto en un plano cartesiano, luego con ayuda de nuestro estuche geométrico trazamos los siguientes polígonos en un plano cartesiano, y calculamos la medida de sus lados.

1) Triangulo rectángulo (-5,5); (4,0); (-5,0).

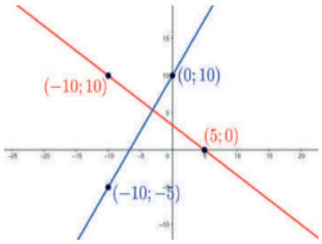


2) Romboide (-5,5); (-3,1); (4,1); (2,5).
3) Cordiforme (-5,3); (-3,6); (0,4); (3,6) (5,3); (3,-1); (0,-4); (-3,-1).
4) Rombo (-3,-2); (-2,3); (3,4); (2,-1)
5) Trapecio isósceles (-4,-3); (-2,1); (3,1); (5,-3)
6) Trapecio escaleno (-3,-4); (-2,1); (4,1); (8,-4)
7) Pentágono regular (-4,2); (-3,-1); (0,2; -0,9) (1,1;2,1); (-1,5; 3,9)
8) Heptágono regular (-1;-4); (1; -3);(1,5; -0,8); (0;0,9); (-2,2;0,9); (-3,6; -0,9); (-3; -3,1)



4. Rectas paralelas

Dos o más rectas son paralelas en el plano cartesiano cuando no presentan puntos o coordenadas cartesianas comunes, aunque prolonguen en ambas direcciones nunca se intersecan.



5. Rectas perpendiculares

Las rectas perpendiculares son aquellas que se intersectan formando un ángulo recto (de 90 grados).

Ejemplos: Ubicamos los puntos y posteriormente trazamos la recta así como podemos observar en los gráficos siguientes:

Actividad 18. En tu cuaderno ubica los siguientes puntos, trazamos las rectas correspondientes e indicamos si son rectas paralelas o perpendiculares:

1) Recta AB, que pasa por los puntos A(4;0) y B(2;4) Recta CD, que pasa por los puntos C(0;2) y D(-2;6).

2) Recta EF, que pasa por los puntos E(4;0) y F(-4;2) Recta GH, que pasa por los puntos G(0;2) y H(-8;4).

3) Recta IJ, que pasa por los puntos I(-6;6) y J(2;10) Recta KL, que pasa por los puntos K(-8; -2) y L(4;6).

4) Recta MN, que pasa por los puntos M(6;0) y N(-6;6) Recta OP, que pasa por los puntos O(8;4) y P(4;6).

5) Recta QR, que pasa por los puntos Q(4;4) y R(6;6) Recta ST, que pasa por los puntos S(4;2) y T(2;4).

¡Realicemos la VALORACIÓN!

Actividad 19. Realicemos las siguientes actividades en el cuaderno de ejercicios:

Reflexionemos sobre la importancia de la aplicación de los polígonos en la construcción de una casa para lo cual calculamos los perímetros de una propiedad que puede ser delimitada por un polígono.

¿En tu contexto como se aplican los polígonos? ¿Cómo podemos aplicar estos conocimientos en la cotidianidad?

¡Es hora de la PRODUCCIÓN!

Actividad 20. Realicemos las siguientes actividades en el cuaderno de ejercicios:

- Construimos un plano cartesiano, con materiales reciclables de tu entorno, como una madera plana y clavos, similar a un geoplano, en el cual con ayuda de algunas cintas o bandas elásticas podemos representar polígonos, rectas paralelas y perpendiculares. Puedes plantear pares ordenados y posteriormente ubicarlos para formar segmentos o polígonos, así pones a prueba tu creatividad y tus conocimientos adquiridos.
- Trazamos el primer cuadrante de un plano cartesiano y representamos las jugadas permitidas de cada pieza del ajedrez, recuerda que son 6 piezas para cada jugador, sin embargo, algunas se repiten, pon a prueba tu creatividad y realiza esta actividad de manera interactiva.

NÚMEROS RACIONALES APLICADOS EN LA VIDA COTIDIANA

¡Iniciemos desde la PRÁCTICA!

Iniciamos la clase realizando la siguiente actividad:

- Conformamos grupos en base al conjunto de los números primos: 2,3,5,7 ...
- Repartimos a cada grupo una manzana.
- En cada equipo dividimos la manzana en función al número de integrantes en partes iguales.
- Realizar un gráfico con el valor de la fracción que le corresponde a cada integrante del equipo.

Actividad 21. Respondamos las siguientes preguntas en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Cómo fue la distribución de la manzana?

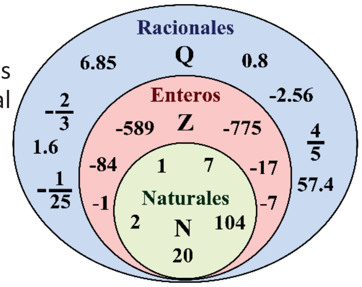
2. ¿Qué porción de la manzana comiste?

¡Continuemos con la TEORÍA!

1. El origen de los números racionales

Los babilonios realizaban sus cálculos con fracciones cuyo denominador es una potencia de 60 en cambio los egipcios calculaban la resolución de problemas utilizando fracciones cuyos denominadores son enteros positivos. La mayoría de las operaciones que se realizan con números racionales dan como resultado otro numero racional, los cuales los aplicamos de manera constante, en el intercambio comercial, es decir, cuando pagamos el pasaje en el micro o el taxi , o cuando compramos en el mercado medio kilo de tomate, etc.

2. El conjunto de los números racionales



Se llama número racional a todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros, con denominador distinto de cero. En otras palabras, un número racional tiene la forma:

$$\frac{a}{b}\,, \qquad con\ \ b \neq 0$$

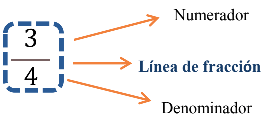
Donde "a y b" son números enteros, "b" es diferente de cero.
Se representa por Q, este conjunto está conformado por los números naturales, números enteros, el cero y los números fraccionarios.

$$\mathbb{Q} = \left\{\frac{a}{b} \quad /a \in \mathbb{Z}; b \in \mathbb{Z}; b \neq 0\right\}$$

Todo número entero es racional porque podemos expresarlo como fracción; si a es un número entero, entonces podemos expresarlo como $a = \frac{a}{1}$

Por ejemplo, 7 es racional porque: $7 = \frac{7}{1}$

Elementos de una fracción



Se lee "tres cuartos".

Numerador. Es el número de partes elegidas y está ubicado en la parte superior.

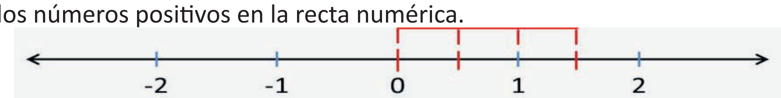
Denominador. Es el número de partes iguales en las que se ha dividido la unidad y está en la parte inferior.

3. Representación de números racionales en la recta numérica

Para representar el número racional a/b en la recta numérica, se divide cada segmento unidad en b partes iguales y se toman a de esas partes.

Representamos en la recta numérica el número racional $+\frac{3}{2}$

Ubicamos el sector de los números positivos en la recta numérica.



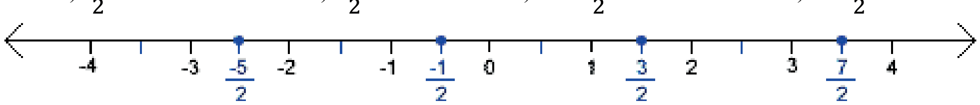
$+\frac{3}{2}$

Dividimos en dos los enteros, de acuerdo al denominador:

Cuando ubiques algún número negativo en la recta numérica, la única diferencia es que contamos las unidades hacia la izquierda y no hacia la derecha del punto 0.

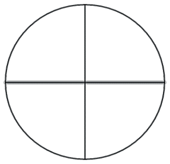
Actividad 22. Representamos en la recta numérica los siguientes números racionales en el cuaderno de ejercicios:

a) $\frac{3}{2}$ b) $\frac{7}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$ d) $-\frac{5}{2}$



4. Representación gráfica y relación de orden de los números racionales

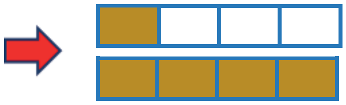
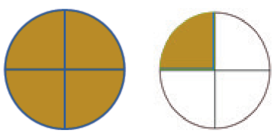
Tomamos en cuenta los términos de un número racional para poder representarlos en figuras geométricas como un rectángulo o una circunferencia.



Trazamos el gráfico de $\frac{5}{4}$ que se lee "cinco cuartos".

- Primero dibujamos el entero, como el denominador es cuatro, entonces lo dividimos en cuatro partes iguales.
- De acuerdo al numerador debemos pintar cinco partes, pero si observamos no es suficiente el gráfico realizado, entonces es necesario que elaboraremos otro similar. Es decir, dividir un nuevo entero en cuatro partes iguales y pintar las partes que nos falta para completar la cantidad del numerador (5).

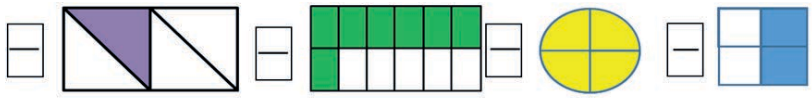
En este caso observamos que el numerador es mayor que el denominador, por eso debemos tener cuidado en el trazado del gráfico.

$\frac{5}{4}$  o también 

Actividad 23. En tu cuaderno de ejercicios, traza los gráficos de los siguientes números racionales:

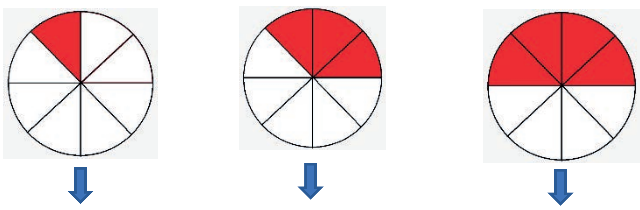
a) $\frac{5}{6}$ b) $2\frac{3}{2}$ c) $\frac{6}{5}$ d) $\frac{4}{3}$ e) $3\frac{4}{3}$

Observa los gráficos, completa los numeradores y denominadores según corresponda:



Fracciones homogéneas, heterogéneas y equivalentes

Fracciones homogéneas. Son aquellas que tienen el mismo denominador. Es decir, la unidad está dividida en la misma cantidad de partes y por ello sus denominadores son iguales.
Observa con detenimiento los gráficos y comprenderás mejor

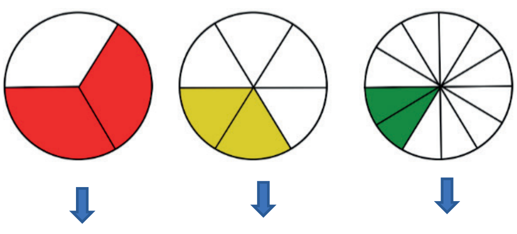


$\frac{1}{8}$ $\frac{3}{8}$ $\frac{4}{8}$

Cada círculo está dividido en 8 partes.

Tienen denominadores iguales.

Fracciones heterogéneas. Son aquellas donde la unidad está divida en cantidades diferentes y por eso sus denominadores son distintos.
Observa con detenimiento los gráficos y comprenderás mejor.

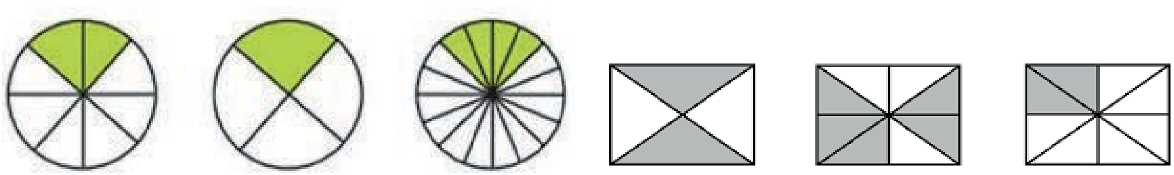


$\frac{2}{3}$ $\frac{2}{6}$ $\frac{2}{12}$

Cada círculo está dividido en cantidades diferentes.

Tienen denominadores distintos.

Actividad 24. Observemos las regiones pintadas y escribe en tu cuaderno la fracción que corresponda. Posteriormente, anota si las fracciones son homogéneas o heterogéneas en la línea segmentada del lado inferior de cada grupo de gráficos:

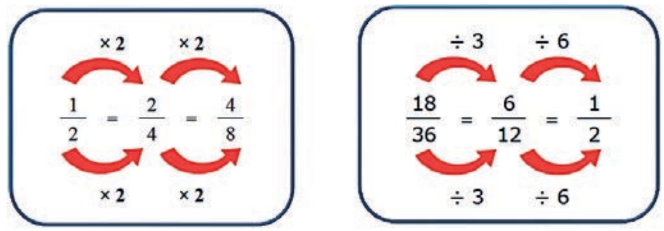


Fracciones equivalentes. Las fracciones equivalentes tienen el mismo valor, aunque parezcan diferentes.

¿Por qué son lo mismo? $\boxed{\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{4}{8}}$

"Porque cuando multiplicas o divides al numerador y denominador por la misma cantidad, la fracción no varía".

Recuerda que la multiplicación o división que apliques en el numerador se debe repetir en el denominador.



Multiplicando Dividiendo

Por eso, estas fracciones son en realidad la misma, observa el proceso.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \Leftrightarrow \quad a * d = b * c$$

Verificación de fracciones equivalentes. Una manera sencilla de verificar fracciones equivalentes es mediante la obtención de productos cruzados los cuales deben ser iguales.

Ejemplo: $\frac{5}{7} = \frac{10}{14} \quad \Leftrightarrow \quad 5 * 14 = 7 * 10$

$70 = 70$

Verificamos si los números racionales son fracciones equivalentes:

a) $\frac{6}{5} = \frac{12}{10} \quad \Leftrightarrow \quad 6 * 10 = 5 * 12$

$60 = 60$

b) $\frac{12}{8} = \frac{3}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 12 * 2 = 8 * 3$

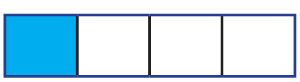
$24 = 24$

5. Fracciones propias, impropias y números mixtos

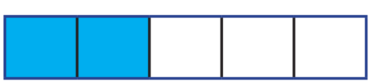
Fracciones propias. Son aquellas donde el numerador es menor que el denominador.

De este modo, las fracciones propias pueden ser expresadas mediante un número menor a 1, es decir, un número efectivamente fraccionario.

Ejemplos de fracciones propias:



Se lee “un cuarto”. ➡ $\frac{1}{4}$



Se lee “dos quintos”. ➡ $\frac{2}{5}$

Fracciones impropias. Son aquellas que tienen el numerador mayor al denominador.

Ejemplo de fracción impropia:

$\frac{9}{5}$ 

Fracciones mixtas o números mixtos. Una fracción mixta es la combinación de un número entero y una fracción propia.

Para convertir una fracción impropia a fracción mixta, dividimos el numerador entre el denominador, el cociente es la parte entera, el resto el numerador de la fracción y como denominador anotamos el mismo denominador.
Ejemplo: convertimos a fracción mixta las siguientes fracciones:

1

$$\frac{23}{5} = 4\frac{3}{5}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 23 & 5 \\ \hline (3) & 4 \end{array}$$

2

$$\frac{17}{3} = 5\frac{2}{3}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 17 & 3 \\ \hline (2) & 5 \end{array}$$

Convertimos fracciones mixtas a fracciones impropias. Después de observar el video del código QR, realizamos la conversión de fracción impropia a fracción mixta:

Convertimos la fracción mixta a fracción impropia.

$$5\frac{3}{5} = \frac{28}{5}$$

Cálculo auxiliar

5 x 5 = 25

25 + 3 = 28

Actividad 25. Realicemos las siguientes operaciones en el cuaderno de ejercicios:

1. Realicemos las conversiones de fracción mixta a impropia, el cálculo auxiliar puedes realizarlo en tu cuaderno de prácticas y solo anota los resultados:

a) $3\frac{4}{7} =$ b) $7\frac{2}{5} =$ c) $5\frac{3}{8} =$ d) $12\frac{1}{3} =$ e) $9\frac{2}{9} =$ f) $15\frac{2}{11} =$

2. Realicemos las conversiones de fracción impropia a mixta, el cálculo auxiliar puedes realizarlo en tu cuaderno de prácticas, solo anota los resultados:

a) $\frac{13}{7} =$ b) $\frac{23}{4} =$ c) $\frac{39}{8} =$ d) $\frac{54}{3} =$ e) $\frac{67}{9} =$ f) $\frac{87}{11} =$

6. Operaciones con números racionales

6.1. Adición y sustracción

Adición de números racionales

En la adición de números racionales existen dos casos:

Adición de fracciones homogéneas → Con el mismo denominador

Adición de fracciones heterogéneas → Con diferente denominador

Adición de fracciones homogéneas. Para sumar dos o más fracciones homogéneas, se suman los numeradores y se mantiene el denominador. La forma genérica es la siguiente:

$$\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b}}$$

a) Resolvemos la adición.

$$\frac{4}{9} + \frac{7}{9} = \frac{4+7}{9} = \frac{11}{9}$$

b) Resolvemos la adición.

$$1\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3+1}{2} = \frac{4}{2} = 2$$

Ejemplo de adición:

$$\frac{21}{13} + \frac{32}{13} = \frac{21+32}{13} = \frac{53}{13} = 4\frac{1}{13}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 53 & 13 \\ \hline (1) & 4 \end{array}$$

Actividad 26. Realicemos las siguientes sumas de fracciones homogéneas:

a) $\frac{34}{17}+\frac{5}{17}=$ b) $\frac{43}{25}+\frac{8}{25}+\frac{11}{25}=$ c) $\frac{2}{21}+\frac{5}{21}+\frac{4}{21}=$ d) $1\frac{3}{11}+\frac{5}{11}=$

Adición de fracciones heterogéneas. Para sumar fracciones heterogéneas, se reducen los denominadores al común denominador, se suman y/o restan los numeradores de las fracciones equivalentes obtenidas.

Para sumar dos o más fracciones heterogéneas seguimos los siguientes pasos:

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a*d+b*c}{b*d}$$

1. Se obtiene el común denominador (mínimo común múltiplo de los denominadores).
2. Se divide el común denominador entre los denominadores de cada una de las fracciones y se multiplican por los numeradores respectivos.
3. En la nueva fracción, se mantiene el común denominador y en el numerador realizamos las operaciones indicadas.
4. Se simplifica la fracción resultante si es posible hasta obtener una fracción irreducible.

Ejemplo: Realizamos la siguiente adición de fracciones:

Sumemos las siguientes fracciones:

$$\frac{5}{4}+\frac{1}{6}=\frac{15+2}{12}=\frac{17}{12}=1\frac{5}{12}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{cc|c} 4 & 6 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{array}$$

m.c.m. $=2 \times 2 \times 3 = 12$

$$\begin{array}{c|c} 17 & 12 \\ \hline (5) & 1 \end{array}$$

Sumemos las siguientes fracciones:

$$5+1\frac{3}{4}+\frac{7}{8}=\frac{5}{1}+\frac{7}{4}+\frac{7}{8}=\frac{40+14+7}{8}=\frac{61}{8}=7\frac{5}{8}$$

$1 \times 4 = 4$
$4 + 3 = 7$

$1\frac{3}{4}=\frac{7}{4}$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 8 & 2 \\ & 2 & 4 & 2 \\ & 1 & 2 & 2 \\ & & 1 & \end{array}$$

m.c.m. $=2 \times 2 \times 2 = 8$

No olvidemos que podemos convertir en número mixto las fracciones impropias, es decir en caso de que el numerador sea mayor al denominador, podemos dividir.

Actividad 27. Resolvamos las siguientes sumas de fracciones heterogéneas en el cuaderno de ejercicios:

a) $\frac{5}{7}+2\frac{3}{4}=$ b) $\frac{2}{6}+\frac{7}{10}=$ c) $\frac{2}{9}+\frac{1}{5}=$ d) $\frac{8}{15}+9=$

Propiedades de la suma en los números racionales

- **Propiedad asociativa.** Agrupando los sumandos de distinta forma, el resultado siempre será el mismo.

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\frac{e}{f}=\frac{a}{b}+\left(\frac{c}{d}+\frac{e}{f}\right)$$

Sumamos, aplicando la propiedad asociativa:

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\right)$$

$$\left(\frac{2+1}{4}\right)+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\left(\frac{2+3}{8}\right)$$

$$\frac{3}{4}+\frac{3}{8}=\frac{1}{2}+\frac{5}{8}$$

$$\frac{6+3}{8}=\frac{4+5}{8}$$

$$\frac{9}{8}=\frac{9}{8}$$

- **Propiedad conmutativa.** Si cambiamos de distintas maneras el orden de los sumandos el resultado siempre será el mismo.

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{c}{d}+\frac{a}{b}$$

Ejemplo:

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}$$
$$\frac{2+1}{4}=\frac{1+2}{4}$$
$$\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$$

- **Elemento neutro aditivo.** Cualquier número racional sumado con el número cero nos dará como resultado el mismo número racional.

$$\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}+0=0+\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$$

Ejemplos:

a) $\frac{3}{4}+0=0+\frac{3}{4}=\frac{3}{4}$ **b)** $\frac{5}{4}+0=0+\frac{5}{4}=\frac{5}{4}$

- **Elemento opuesto aditivo.** Es aquel número racional con diferente signo a un número racional, es decir sumados ambos nos dan como resultado el cero.

$\frac{a}{b}$ **su opuesto es** $-\frac{a}{b}$ $\Longrightarrow$ $\boxed{\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}+\left(-\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}\right)=\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}-\frac{\boldsymbol{a}}{\boldsymbol{b}}}$

Ejemplo 1:

a) $\frac{3}{4}$ su opuesto es $-\frac{3}{4}$ **b)** $-\frac{12}{17}$ su opuesto es $+\frac{12}{17}$

Ejemplo 2:

a) $\frac{1}{3}+\left(-\frac{1}{3}\right)=0$ **b)** $\frac{5}{9}+\left(-\frac{5}{9}\right)=0$

Actividad 28. Resolvamos los siguientes ejercicios aplicando las propiedades estudiadas en el cuaderno de ejercicios:

Propiedad conmutativa	
$\frac{8}{9}+\frac{3}{4}=$ ___ + ___	$\frac{7}{4}+\frac{3}{8}=$ ___ + ___
Propiedad Asociativa	
$\left(\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\right)+\frac{3}{5}=$ ___ + (___ + ___)	$\left(\frac{5}{4}+\frac{2}{3}\right)+\frac{7}{3}=$ ___ + (___ + ___)

Sustracción de números racionales

Podemos definir la resta o diferencia de dos números racionales como la suma del minuendo más el opuesto del sustraendo.

Minuendo ⟵ M+(-S) ⟶ Sustraendo

Al igual que en la suma de números racionales en la sustracción analizaremos los siguientes casos:

- **Sustracción de fracciones homogéneas.** Se mantiene el mismo denominador y restamos los numeradores (conservando el signo del mayor en el numerador).

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{b}=\frac{a-c}{b}$$

Convertimos las fracciones mixtas a fracciones impropias.

$$\frac{25}{7}-\frac{12}{7}=\frac{25-12}{7}=\frac{13}{7}=\boxed{1\frac{6}{7}}$$

Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 13 & 7 \\ \hline (6) & 1 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 13 & 5 \\ \hline (3) & 2 \end{array}$$

$$3\frac{1}{5}-\frac{3}{5}=\frac{16}{5}-\frac{3}{5}=\frac{16-3}{5}=\frac{13}{5}=\boxed{2\frac{3}{5}}$$

Cálculo auxiliar $3\frac{1}{5}\Rightarrow 3 \text{ x } 5+1=15+1=16$

Actividad 29. Resolvamos las sustracciones homogéneas en el cuaderno de ejercicios:

$2\frac{3}{5}-\frac{5}{5}=$ b) $\frac{7}{12}-\frac{5}{12}=$ c) $\frac{15}{22}-\frac{7}{22}=$ d) $\frac{7}{5}-4\frac{3}{5}=$

Sustracción de fracciones heterogéneas. Para restar dos o más fracciones heterogéneas se sigue similar procedimiento al de adición de fracciones heterogéneas, es decir:

1. Se obtiene el común denominador (mínimo común múltiplo de los denominadores), se divide el común denominador entre los denominadores de cada una de las fracciones y se multiplican por sus respectivos numeradores.

2. En la nueva fracción, se mantiene el común denominador y en el numerador realizamos las operaciones indicadas.

3. Si simplifica la fracción resultante si es posible, hasta obtener una fracción que sea irreducible).

La forma genérica es la siguiente:

$$\frac{a}{b}-\frac{c}{d}=\frac{a*d-b*c}{b*d}$$

Ejemplo:

a) $\frac{8}{3}-\frac{2}{5}=\frac{40-6}{15}=\frac{34}{15}=2\frac{4}{15}$ Cálculo auxiliar

$$\begin{array}{r|l} 34 & 15 \\ \hline (4) & 2 \end{array}$$

Cálculo auxiliar:

$$\begin{array}{r|ll} 3 & 5 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{array}$$

m.c.m. = 3 x 5 = 15

Ejemplo:

b) $2\frac{3}{7}-8=\frac{17}{7}-\frac{8}{1}=\frac{17-56}{7}=-\frac{39}{7}=-5\frac{4}{7}$

$$\begin{array}{r|l} 39 & 7 \\ \hline (4) & 5 \end{array}$$

Actividad 30. Resolvamos las siguientes sumas de fracciones heterogéneas en el cuaderno de ejercicios:

$\frac{4}{5}-1\frac{2}{4}=$ b) $\frac{5}{12}-2\frac{1}{3}=$ c) $\frac{2}{3}-9=$ d) $\frac{5}{12}-\frac{3}{20}=$

6.2. Multiplicación y división

Multiplicación de números racionales

Pasos para multiplicar números racionales:

1. Obtenemos el numerador multiplicando los numeradores entre sí aplicando la ley de signos.
2. Obtenemos el denominador multiplicando los denominadores entre sí.
3. Simplificar el producto hasta obtener una fracción irreducible.

Ley de signos de la multiplicación. En el proceso de resolución de multiplicaciones de números racionales podemos aplicar la ley de signos. En el siguiente esquema observamos la misma:

Ley de signos en la multiplicación

$(+)*(+)=(+)$
$(-)*(-)=(+)$
$(+)*(-)=(-)$
$(-)*(+)=(-)$

Ejemplo 1

$$\left(+\frac{5}{4}\right)\left(+\frac{1}{6}\right)=\frac{(5)\ *(1)}{(4)*(6)}=\frac{5}{24}$$

En caso de existir un número que no tenga denominador podemos incorporar el número 1 en su lugar, es decir en la parte inferior de la fracción.

Ejemplo 2

$$\frac{12}{25}*\frac{2}{15}*10=\frac{12\ *2*10}{25*15*1}=\frac{240}{375}=\frac{16}{25}$$

Nota. Recuerda que los signos utilizados para multiplicar son: ×,· ,*,( ).

Ejemplo 3

En una fracción cuando no lleva signo se sobre entiende que es positivo.

$$\left(+\frac{4}{15}\right)\left(-\frac{3}{10}\right)\left(-\frac{5}{12}\right)=+\frac{4\ *3*5}{15*10*12}=\frac{60}{1800}=\frac{1}{30}$$

Cuando existe signos en los factores, debemos multiplicar aplicando la ley de signos. Además, de simplificar si es posible.

Actividad 31. Resolvamos las multiplicaciones en el cuaderno de ejercicios:

a) $\frac{12}{15}*\frac{7}{10}=$ b) $\frac{6}{21}*\frac{7}{10}*\frac{8}{5}=$ c) $\frac{5}{14}*\frac{7}{45}*2=$ d) $\left(-\frac{15}{22}\right)\left(-\frac{2}{25}\right)=$

e) $\left(-\frac{5}{2}\right)\left(+\frac{4}{25}\right)*6=$ f) $\left(-5\frac{15}{22}\right)\left(-1\frac{2}{25}\right)=$ g) $\left(+\frac{6}{15}\right)\left(-\frac{8}{22}\right)*6=$ h) $\left(-\frac{15}{22}\right)\left(+\frac{2}{25}\right)*\frac{3}{8}=$

Propiedades de la multiplicación de números racionales

Propiedad asociativa. El modo de agrupar los factores no varía el resultado.

Ejemplo. Demostrar la propiedad asociativa:

$$\left(\frac{a}{b}*\frac{c}{d}\right)*\frac{e}{f}=\frac{a}{b}*\left(\frac{c}{d}*\frac{e}{f}\right)$$

Propiedad conmutativa. El orden de los factores no altera el producto

$$\frac{a}{b}*\frac{c}{d}=\frac{c}{d}*\frac{a}{b}$$

$$\frac{3}{8}*\frac{1}{5}=\frac{1}{2}*\frac{3}{20}$$
$$\frac{3}{40}=\frac{3}{40}$$

Ejemplo 1:

$$\frac{5}{8}*\frac{9}{7}=\frac{9}{7}*\frac{5}{8}$$
$$\frac{45}{56}=\frac{45}{56}$$

Ejemplo 2:

$$\frac{3}{4}*\frac{9}{5}=\frac{9}{5}*\frac{3}{4}$$
$$\frac{27}{20}=\frac{27}{20}$$

Elemento neutro multiplicativo. El 1 es el elemento neutro de la multiplicación, porque todo número multiplicado por 1 da el mismo número.

Ejemplo: demostrar la propiedad.

a) $\frac{3}{8}*1=1*\frac{3}{8}=\frac{3}{8}$ **b)** $\frac{2}{5}*1=\frac{2}{5}*1=\frac{2}{5}$

$$\frac{a}{b}*1=1*\frac{a}{b}=\frac{a}{b}$$

- **Elemento inverso multiplicativo.** Un número es inverso de otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento neutro.

De la fracción $\frac{a}{b}$ su inverso es $\frac{b}{a}$

$$\frac{a}{b} * \frac{b}{a} = 1$$

Ejemplo 1:

$$5 * \frac{1}{5} = \frac{5}{1} * \frac{1}{5} = 1$$

Ejemplo 2:

$$\frac{2}{3} * \frac{3}{2} = 1$$

- **Propiedad distributiva.** El factor se distribuye por cada uno de los sumandos y se realiza las operaciones indicadas. Ejemplo. Demostrar la propiedad:

$$\frac{1}{2} * \left(\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2} * \frac{1}{4} + \frac{1}{2} * \frac{3}{2}$$

$$\frac{1}{2} * \frac{7}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{4}$$

$$\frac{7}{8} = \frac{7}{8}$$

Actividad 32. Apliquemos las propiedades de la multiplicación para resolver los siguientes ejercicios en el cuaderno:

Propiedad conmutativa		
$\frac{1}{4} * \frac{9}{4} =$	$\frac{12}{17} * \frac{11}{18} =$	$\left(-\frac{6}{21}\right) * \frac{7}{2} =$

Propiedad distributiva		
$\frac{3}{5} * \left(\frac{9}{12} + \frac{1}{6}\right) =$	$\frac{7}{8} * \left(\frac{2}{3} - \frac{5}{4}\right) =$	$\frac{9}{4} * \left(\frac{2}{5} + \frac{1}{5}\right) =$

- **División de números racionales**

La división de dos números racionales es otro número racional donde también se aplica la ley de signos:

- Por numerador el producto de los extremos.
- Por denominador el producto de los medios.

Medios $\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$ Extremos

Ley de signos en la división

$(+) \div (+) = (+)$

$(-) \div (-) = (+)$

$(+) \div (-) = (-)$

$(-) \div (+) = (-)$

Ejemplo 1:

$$\frac{\frac{21}{5}}{\frac{7}{30}} = +\frac{\cancel{21}^{3} * \cancel{30}^{6}}{\cancel{5}_{1} * \cancel{7}_{1}} = +\frac{18}{1} = 18$$

a) $\dfrac{-\frac{16}{5}}{-17} = \dfrac{-\frac{16}{5}}{-\frac{17}{1}} = +\dfrac{16*1}{5*17} = \dfrac{16}{85}$

b) $\dfrac{\frac{1}{5}}{\frac{3}{10}} = +\dfrac{1*10}{5*3} = \dfrac{10}{15} = \dfrac{2}{3}$

Ejemplo 2:

$$\frac{2}{15} \div \frac{3}{20} = \frac{2*20}{15*3} = \frac{40}{45} = \frac{8}{9}$$

Ejemplo 3:

$$\left(+\frac{25}{40}\right) \div \left(-\frac{5}{2}\right) = -\frac{25*2}{40*5} = \frac{50}{200} = \frac{1}{4}$$

En el caso de que uno de los números no tenga denominador, podemos anotar el número 1 como denominador.

Nota: En el caso de que la división se presente de la siguiente manera debemos multiplicar primero los signos, luego se multiplica extremo con extremo y medio con medio.

Actividad 33. Resolvamos las divisiones en el cuaderno de ejercicios:

a) $\frac{6}{15} \div \frac{20}{35} =$ b) $\frac{-\frac{6}{10}}{-\frac{4}{22}} =$ c) $\left(-\frac{14}{20}\right) \div \left(+\frac{5}{2}\right) =$ d) $\frac{7}{-\frac{3}{16}} =$

6.3. Potenciación y radicación

Potenciación de números racionales

El exponente de una fracción se distribuye tanto al numerador y denominador.
La forma genérica es:

Elementos de la potenciación

Ejemplos:

$$\underbrace{\left(\frac{2}{4}\right)}_{\text{Base}}^{\overset{\text{Exponente}}{3}} = \frac{2\times2\times2}{4\times4\times4} = \underbrace{\frac{8}{64}}_{\text{Potencia}}$$

Exponente, indica la cantidad de veces que se repite la base.

Base, es el factor que se repite.

Potencia, es el resultado.

Actividad 34. Calculemos las siguientes potencias en el cuaderno de ejercicios:

a) $\left(\frac{3}{4}\right)^3 =$ b) $\left(\frac{17}{22}\right)^2 =$ c) $\left(\frac{6}{9}\right)^3 =$

d) $\left(\frac{7}{9}\right)^5 =$ e) $\left(\frac{15}{21}\right)^3 =$ f) $\left(\frac{8}{13}\right)^7 =$

Signos de la potenciación en números racionales.

	Exponente	Signo de la potencia
Positiva (+)	Par o impar	Positivo (+)
Negativa (-)	Par positivo (+)	
	Impar negativo (-)	

Si la base es positiva y el exponente es par o impar el signo de la potencia siempre es positivo.

Ejemplos: a) $\left(+\frac{5}{6}\right)^4 = +\frac{5^4}{6^4} = \frac{625}{1296}$ b) $\left(+\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{3^3}{4^3} = +\frac{27}{64} = \frac{27}{64}$

- Si la base es negativa, el signo de la potencia dependerá del exponente.
- Si la base es negativa y el exponente es par, el signo de la potencia siempre va a ser positivo.

Ejemplos: a) $\left(-\frac{3}{4}\right)^2 = +\frac{3^2}{4^2} = \frac{9}{16}$ b) $\left(-\frac{4}{7}\right)^4 = \frac{4^4}{7^4} = \frac{256}{2401}$

Si la base es negativa y el exponente es impar, el signo de la potencia siempre va a ser negativo.

Ejemplos: a) $\left(-\frac{1}{3}\right)^3 = -\frac{1^3}{3^3} = -\frac{1}{27}$ b) $\left(-\frac{2}{5}\right)^3 = -\frac{2^3}{5^3} = -\frac{8}{125}$

Actividad 35. Calculemos las siguientes potencias en el cuaderno de ejercicios:

a) $\left(+\frac{2}{3}\right)^6 =$ b) $\left(+\frac{5}{7}\right)^4 =$ c) $\left(-\frac{8}{9}\right)^4 =$ d) $\left(-\frac{12}{13}\right)^3 =$

Propiedades de la potenciación de números racionales
Así mismo, dentro de las operaciones de números racionales se distinguen distintas propiedades, estas son:

- **Potencia de exponente cero.** Toda fracción con exponente cero será igual a uno.

$\left(\frac{a}{b}\right)^0 = 1$

Ejemplos: a) $\left(-\frac{5}{4}\right)^0 = 1$ b) $\left(\frac{6}{8}\right)^0 = 1$

- **Potencia de exponente 1.** Un número racional elevado al exponente 1 es igual al mismo número racional.

$\left(\frac{a}{b}\right)^1 = \frac{a}{b}$

Ejemplos: a) $\left(\frac{3}{7}\right)^1 = \frac{3}{7}$ b) $\left(\frac{9}{16}\right)^1 = \frac{9}{16}$

- **Potencia de exponente negativo.** Se invierte los términos de la fracción y luego se cambia el signo del exponente.

$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{1}{\left(\frac{a}{b}\right)^n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$

Ejemplos: a) $\left(\frac{7}{2}\right)^{-2} = \frac{1}{\left(\frac{7}{2}\right)^2} = \left(\frac{2}{7}\right)^2 = \frac{2^2}{7^2} = \frac{4}{49}$ b) $\left(\frac{5}{3}\right)^{-3} = \frac{1}{\left(\frac{5}{3}\right)^3} = \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \frac{3^3}{5^3} = \frac{27}{125}$

- **Potencia de una potencia**. Se escribe la base elevada al producto de los exponentes.

$\left\{\left[\left(\frac{a}{b}\right)^n\right]^m\right\}^p = \left(\frac{a}{b}\right)^{n\cdot m\cdot p}$

Ejemplos: a) $\left[\left(\frac{2}{5}\right)^2\right]^3 = \left(\frac{2}{5}\right)^{2\cdot 3} = \left(\frac{2}{5}\right)^6 = \frac{64}{15625}$ b) $\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\right)^2\right]^2\right\}^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^{2\cdot 2\cdot 2} = \left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{1}{256}$

- **Multiplicación de potencias de igual base.** Se escribe la misma base y se suman los exponentes.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n \times \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n+m}$

Ejemplos: a) $\left(\frac{3}{5}\right)^2 \times \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{2+3} = \left(\frac{3}{5}\right)^5 = \frac{243}{3125}$ b) $\left(\frac{4}{7}\right)^2 \times \left(\frac{4}{7}\right) = \left(\frac{4}{7}\right)^{2+1} = \left(\frac{4}{7}\right)^3 = \frac{64}{343}$

- **División de potencias de igual base.** Se escribe la misma base y se restan los exponentes.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{a}{b}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{n-m}$

Ejemplos: a) $\left(\frac{4}{5}\right)^3 \div \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \left(\frac{4}{5}\right)^{3-2} = \left(\frac{4}{5}\right)^1 = \frac{4}{5}$ b) $\left(\frac{3}{5}\right)^5 \div \left(\frac{3}{5}\right)^3 = \left(\frac{3}{5}\right)^{5-3} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 = \frac{9}{25}$

- **Multiplicación y división de potencias de igual exponente.** Se asocia los factores y se eleva al exponente común.

$\left(\frac{a}{b}\right)^n * \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} * \frac{c}{d}\right)^n$

$\left(\frac{a}{b}\right)^n \div \left(\frac{c}{d}\right)^n = \left(\frac{a}{b} \div \frac{c}{d}\right)^n$

Ejemplos: a) $\left(\frac{4}{5}\right)^2 * \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{4}{5} * \frac{3}{8}\right)^2 = \left(\frac{12}{40}\right)^2 = \frac{144}{1600}$

b) $\left(\frac{3}{4}\right)^2 \div \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{3}{4} \div \frac{2}{5}\right)^2 = \left(\frac{3\times 5}{4\times 2}\right)^2 = \left(\frac{15}{8}\right)^2 = \frac{225}{64}$

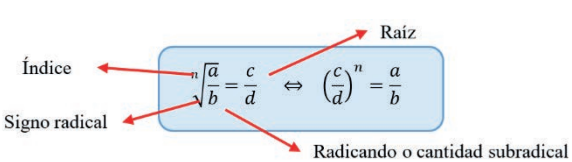
Actividad 36. Resolvamos las siguientes potencias aplicando las propiedades que corresponda en el cuaderno:

a) $\left(\frac{12}{35}\right)^0 =$	d) $\left(\frac{9}{135}\right)^1 =$	g) $\left(\frac{7}{8}\right)^2 \left(\frac{6}{11}\right)^2 =$	j) $\left(\frac{1}{9}\right)^5 \div \left(\frac{2}{5}\right)^5$
b) $\left(\frac{2}{5}\right)^1 =$	e) $\left[\left(\frac{8}{9}\right)^2\right]^2 =$	h) $\left(\frac{1}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{3}\right)^6 =$	k) $\left(\frac{3}{5}\right)^4 * \left(\frac{4}{7}\right)^4$
c) $\left[\left(\frac{8}{9}\right)^2\right]^2 =$	f) $\left(-\frac{3}{5}\right)^2 \left(-\frac{3}{5}\right)^3 =$	i) $\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} =$	l) $\left(\frac{5}{12}\right)^7 \div \left(\frac{5}{12}\right)^3$

Radicación de números racionales. Es la operación inversa a la potenciación, donde se extrae o encuentra la raíz de un número, básicamente consiste en encontrar la base de una potencia conociendo su exponente.

Elementos de la radicación de números racionales. Son: índice, raíz, signo radical y radicando.

Ejemplos:



$$\sqrt[3]{\frac{1}{64}} = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1}{64}$$

- **Radical,** es el signo que nos indica la operación a realizar.
- **Índice**, es el número que nos indica las veces que se multiplicó el número racional para obtener el radicando.
- **Radicando o cantidad sub radical**, es el número que se encuentra dentro del signo de radical.
- **Raíz**, es el número que, elevado a una potencia igual al índice, nos da como resultado la cantidad subradical.

Cálculo de radicales. Para calcular el radical de un número racional se procede de la siguiente forma:

- El numerador y denominador de la fracción se descomponen en factores primos.
- Se agrupan los factores por potencias de tal forma que los exponentes sean iguales al índice del radical.
- Se extrae cada factor común cuyo exponente sea igual al índice.

Ejemplo. Descomponemos 8 y 27:

Hallar el valor de $\sqrt[3]{\frac{8}{27}}$

8	2
4	2
2	2
1	

27	3
9	3
3	3
1	

$$\sqrt[3]{\frac{8}{27}} = \sqrt[3]{\frac{2^3}{3^3}} = \frac{2}{3}$$

Es decir: $8 = 2*2*2=2^3$ $\quad 27=3*3*3=3^3$

Actividad 37. Hallemos el valor de las siguientes raíces en el cuaderno:

a) $\sqrt{\frac{100}{49}} =$ b) $\sqrt{\frac{36}{49}} =$ c) $\sqrt[3]{\frac{64}{125}} =$ d) $\sqrt{\frac{64}{81}} =$

e) $\sqrt[4]{\frac{81}{256}} =$ f) $\sqrt[3]{\frac{343}{512}} =$ g) $\sqrt[5]{\frac{7776}{16807}} =$ g) $\sqrt[6]{\frac{729}{15625}} =$

Propiedades de la radicación de números racionales. Para que estas propiedades se cumplan, se exige que el radicando de las raíces sea positivo.

Raíz de un producto. La raíz de un producto es igual al producto de las raíces de los factores:

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}*\frac{c}{d}} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)*\left(\sqrt[n]{\frac{c}{d}}\right)}$$

Ejemplo: $\sqrt{\frac{9}{16}*\frac{49}{100}} = \left(\sqrt{\frac{9}{16}}\right)*\left(\sqrt{\frac{49}{100}}\right) = \frac{3}{4}*\frac{7}{10} = \frac{21}{40}$

-Raíz de un cociente o de una fracción. Es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador:

Ejemplos: a) $\sqrt[3]{\frac{8}{64}} = \frac{\sqrt[3]{8}}{\sqrt[3]{64}} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ b) $\sqrt[4]{\frac{16}{625}} = \frac{\sqrt[4]{16}}{\sqrt[4]{625}} = \frac{2}{5}$

$$\boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}\div\sqrt[n]{\frac{c}{d}}} \qquad \boxed{\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} \;;\; \sqrt[n]{\frac{c}{d}} = \frac{\sqrt[n]{c}}{\sqrt[n]{d}}}$$

- **Raíz de una raíz.** Para calcular la raíz de una raíz se multiplican los índices de las raíces y se conserva el radicando:

$$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[m]{\frac{a}{b}}} = \sqrt[n\cdot m]{\frac{a}{b}}}$$

Ejemplo: $\sqrt{\sqrt{\frac{81}{16}}} = \sqrt[2\cdot 2]{\frac{81}{16}} = \sqrt[4]{\frac{81}{16}} = \frac{\sqrt[4]{81}}{\sqrt[4]{16}} = \frac{\sqrt[4]{3^4}}{\sqrt[4]{2^4}} = \frac{3}{2}$

- **Raíz de una potencia.**

$$\boxed{\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^m}$$

Ejemplo: $\sqrt[3]{\left(\frac{27}{8}\right)^5} = \left(\sqrt[3]{\frac{27}{8}}\right)^5 = \left(\frac{\sqrt[3]{3^3}}{\sqrt[3]{2^3}}\right)^5 = \left(\frac{3}{2}\right)^5 = \frac{243}{32}$

- **Exponente fraccionario.**

$$\boxed{\sqrt[n]{\left(\frac{a}{b}\right)^m} = \left(\sqrt[n]{\frac{a}{b}}\right)^m = \left(\frac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}}}$$

Ejemplo $\sqrt[12]{\left(\frac{9}{16}\right)^{18}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{18}{12}} = \left(\frac{9}{16}\right)^{\frac{3}{2}} = \sqrt[2]{\left(\frac{9}{16}\right)^3} = \left(\sqrt{\frac{9}{16}}\right)^3 = \left(\frac{3}{4}\right)^3 = \frac{27}{64}$

Casos en la radicación de números racionales

Si la cantidad subradical o radicando es positivo, se puede extraer raíz de índice par e impar.

Ejemplos:

ÍNDICE PAR $\rightarrow \sqrt{\frac{81}{49}} = \frac{\sqrt{81}}{\sqrt{49}} = \frac{9}{7}$

RADICANDO POSITIVO — RAÍZ

ÍNDICE IMPAR $\rightarrow \sqrt[3]{\frac{27}{125}} = \frac{\sqrt[3]{27}}{\sqrt[3]{125}} = \frac{3}{5}$

RADICANDO POSITIVO — RAÍZ

Si la cantidad subradical o radicando es negativo, sólo se puede extraer la raíz de índice impar.

Ejemplos:

ÍNDICE IMPAR $\rightarrow \sqrt[3]{-\frac{8}{216}} = \frac{\sqrt[3]{-8}}{\sqrt[3]{216}} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}$

RADICANDO NEGATIVO — RAÍZ

ÍNDICE PAR $\rightarrow \sqrt{-\frac{16}{49}} =$

RADICANDO NEGATIVO

No tiene solución en el conjunto de los números racionales

Actividad 38. Resolvamos las siguientes raíces aplicando sus propiedades en el cuaderno de ejercicios:

a) $\sqrt{\frac{4}{64} * \frac{16}{100}} =$ b) $\sqrt{\left(\frac{1}{6}\right)^2} =$ c) $\sqrt{\sqrt{\frac{64}{4}}} =$ d) $\sqrt[5]{\left(\frac{2}{3}\right)^5} =$

e) $\sqrt[3]{\frac{27}{125} \div \frac{343}{1000}}$ f) $\sqrt[8]{\left(\frac{7}{12}\right)^8} =$ g) $\sqrt{\sqrt[3]{\frac{1}{1000000}}} =$ h) $\sqrt[3]{\left(-\frac{27}{125}\right) * \frac{1000}{1331}} =$

Simplificación de operaciones combinadas de números racionales

Es reducir a su mínima expresión, aplicando todas las propiedades de números racionales y las operaciones básicas. Jerarquía de las operaciones. A la hora de operar seguiremos las siguientes pautas:

- Primero se efectúan las operaciones al interior de los paréntesis. Si hubieran más de un signo de agrupación se realizan las operaciones de adentro hacia afuera.

- Dentro de los paréntesis o una vez eliminados, las operaciones se efectúan en el siguiente orden:

1. Las potencias y las raíces.
2. Las multiplicaciones y las divisiones (de izquierda a derecha).
3. Las sumas y las restas.

Ejemplo 1:

$\frac{3}{2} + \frac{3}{4} * \sqrt{\frac{64}{9}} - \left(\frac{5}{3}\right)^2 * \frac{6}{12} \div \frac{5}{3} = \frac{3}{2} + \frac{3}{4} * \frac{8}{3} - \frac{25}{9} * \frac{1}{2} \div \frac{5}{3}$ Radicación, potenciación y simplificación

$= \frac{3}{2} + \frac{3}{4} * \frac{8}{3} - \frac{25}{9} * \frac{1}{2} \div \frac{5}{3}$ División.

$= \frac{3}{2} + \frac{\cancel{3}}{\cancel{4}} * \frac{\cancel{8}}{\cancel{3}} - \frac{\cancel{25}}{\cancel{9}} * \frac{\cancel{3}}{\cancel{10}}$ Simplificación en las multiplicaciones.

$= \frac{3}{2} + 2 - \frac{5}{6}$ Resolvemos adiciones y sustracciones.

$= \frac{9+12-5}{6} = \frac{\cancel{16}}{\cancel{6}} = \frac{8}{3}$ Simplificamos para tener el resultado final.

Ejemplo 2:

$\frac{2}{5} + \frac{1}{3} * \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} + \frac{1}{3} * \left(\frac{5}{10} - \frac{2}{10}\right)^2$ Resolvemos la operación del paréntesis.

$= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} * \left(\frac{3}{10}\right)^2$ Encontramos la potencia.

$= \frac{2}{5} + \frac{1}{3} * \frac{\cancel{9}}{100}$ Simplificamos en la multiplicación.

$= \frac{2}{5} + \frac{3}{100}$ Resolvemos la suma.

$= \frac{40+3}{100}$ Resolvemos la operación indicada.

$= \frac{43}{100}$

Actividad 39. Resolvamos las siguientes operaciones combinadas anotando el proceso de resolución como en los ejemplos presentados en el cuaderno de ejercicios:

a) $3\frac{1}{4}+2\frac{1}{4}\div\frac{3}{4}-\left(\frac{5}{2}\right)^2=$

b) $\left(\frac{3}{2}\right)^2-\frac{3}{11}*\left(7\frac{2}{3}-\frac{5}{10}\div\frac{3}{13}\right)=$

c) $\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\sqrt[3]{\frac{8}{27}*\frac{64}{125}}-\left(\frac{4}{7}\div\frac{1}{8}\right)^2$

d) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{\sqrt{64}}}}*\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}+\left[\left(\frac{3}{5}\right)^0\right]^6$

e) $\left(-\frac{6}{5}\div\frac{1}{3}\right)^3+\left(\frac{49}{100}\right)^{\frac{1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{343}{1000}}$

f) $\left[\left(-\frac{1}{3}\right)^2-\frac{1}{3}\right]^3-\left(\frac{\frac{2}{9}}{\frac{9}{8}}\right)^{\frac{1}{4}}-\sqrt[5]{-\frac{1}{32}}$

7. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Para resolver cualquier problema de matemática con números racionales seguiremos los siguientes pasos:

- Leer y comprender el problema.
- Elegir una estrategia de resolución o plan.
- Resolver el problema.
- Examinar la solución.

1. Mamá realiza una variedad de compras en el mes, en la primera compra: $\frac{3}{4}$ kilos de arroz, en la segunda $\frac{5}{4}$ kilos de arroz y en la tercera $\frac{6}{4}$ kilos de arroz. ¿Cuántos kilos de arroz compró en total?

Datos:

1ra compra= $\frac{3}{4}$

2da compra= $\frac{5}{4}$

3ra compra= $\frac{6}{4}$

Solución:

$$\frac{3}{4}+\frac{5}{4}+\frac{6}{4}=\frac{3+5+6}{4}=\frac{14}{4}=\frac{7}{2}=3\,\frac{1}{2}$$

Respuesta. Se compró 3 kilos y $\frac{1}{2}$ de arroz.

2.Tres hermanos quieren repartirse el terreno que les dejó su padre para realizar siembras, el primer hijo decide tomar $\frac{1}{9}$ parte del total, el segundo un $\frac{1}{3}$ y el tercer hijo solo $\frac{1}{2}$. ¿ Qué parte del terreno utilizaron los tres hermanos? ¿Qué parte quedó sin sembrar?

Datos:

1er hijo= $\frac{1}{9}$

2do hijo= $\frac{1}{3}$

3er hijo= $\frac{1}{2}$

Solución:

Suma total para la siembra:

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}=\frac{2+6+9}{18}=\frac{17}{18}$$

Resta del total del terreno:

$$1-\frac{17}{18}=\frac{18-17}{18}=\frac{1}{18}$$

Respuesta: Los tres hermanos utilizaron $\frac{17}{18}$ del terreno para la siembra y $\frac{1}{18}$ quedó del terreno sin sembrar.

Un papá decide repartir su aguinaldo de Bs 2000 a sus dos hijos, al primero decide dar la mitad y al segundo una octava parte. ¿Cuánto de dinero le reparte a cada hijo?

Datos:

2000 Bs

Mitad $\frac{1}{2}$

Octava parte $\frac{1}{8}$

Solución:

1° $2000\times\frac{1}{2}=\frac{2000}{2}=1000$

2° $2000\times\frac{1}{8}=\frac{2000}{8}=250$

Respuesta: Al primero le tocó Bs. 1000 y al segundo le tocó Bs. 250.

4. María compra $\frac{1}{4}$ de kilogramo de harina, en la segunda cinco veces más de la primera compra. ¿Qué cantidad de harina compró María en la segunda compra? (multiplicamos por 5, porque indica que compra cinco veces más)

Datos:

$\frac{1}{4}$ kilogramo

5 veces más a multiplicar

Solución:

$\frac{1}{4} \times 5 = \frac{5}{4} = 1\frac{1}{4}$

Respuesta: María compró 1 kilo y $\frac{1}{4}$ de harina.

5. Cuatro estudiantes del nivel secundario deciden comprar 20 arrobas y media de fideo. ¿Qué cantidad le toca a cada uno?

Datos:

Fideo $20\frac{1}{2}$ arrobas de fideo

4 estudiantes

Solución:

$20\frac{1}{2} \div 4 = \frac{41}{2} \div 4 = \frac{\frac{41}{2}}{4} = \frac{41}{8} = 5\frac{1}{8}$

Respuesta: Le tocó a cada uno de ellos 5 y $\frac{1}{8}$ arrobas de fideos.

Actividad 40. Resolvamos los siguientes problemas en el cuaderno de ejercicios:

1. Noemí compró en su primer viaje a la capital $\frac{1}{4}$ kilos de ají, en el segundo viaje compró $\frac{2}{4}$ kilos de ají y en el último viaje solo $\frac{1}{2}$ kilo de ají. ¿Cuánto ají compró en total Noemí?
2. Cuatro padres de familia deciden comprar 80 arrobas y media de verduras para el desayuno escolar. ¿Qué cantidad les toca comprar a cada uno?
3. Don Juan tiene 8 hijos y decide repartir su terreno que mide 50 hectáreas. ¿Cuánto de terreno reciben cada uno de ellos?
4. Una madre decide repartir su ahorro de Bs. 200 a sus tres únicos hijos, al primero la mitad, al segundo tres cuartos y al tercero dos cuartos. ¿Cuánto de dinero le corresponde a cada hijo?
5. Lucía camina $\frac{1}{2}$ kilómetros en la mañana, $\frac{1}{3}$ kilómetros en la tarde. ¿Cuántos kilómetros camina en total?
6. Se quitan $\frac{3}{4}$ de un pastel cada vez que se lo corta, ¿qué fracción del pastel quedará si estamos en el tercer corte?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 41. Leamos con atención y escribe tu opinión en tu cuaderno de ejercicios:

- Analizando los ejercicios anteriores, ¿Cómo podemos aplicar los números racionales en nuestra vida diaria?
- ¿Cuál es la importancia de aprender a resolver operaciones con números racionales?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 42. Realicemos las siguientes actividades:

Lee atentamente:

1. Elabora en tu carpeta, esquemas de las propiedades de: adición, sustracción, multiplicación, potenciación y radicación de números racionales, las cuales las analizaremos una vez presentadas.
2. En grupos de tres estudiantes, elaboramos una receta similar a las fotos en las que se destaca principalmente el uso de fracciones u otra que esté de acuerdo a tus posibilidades para poder prepararlas en casa. (no importa de dónde obtengas la receta).
3. Cada uno de tus compañeros de trabajo, modificará la receta de acuerdo a la cantidad de personas que forman su familia, esto quiere decir que deberán realizar las operaciones pertinentes para acomodar la receta.
4. Cada compañero debe anotar en su cuaderno de prácticas la receta original y la modificación de la receta y los procesos realizados.
5. Debemos realizar en el cuaderno de práctica, un breve informe de la preparación de la receta, la experiencia que tuvieron en su familia, destacando sobre todo el uso de las medidas utilizadas.

Tortilla de salchicha

$\frac{2}{8}$ kg de huevos — $\frac{2}{4}$ kg de tomate

$\frac{1}{4}$ kg de espinaca — $\frac{1}{3}$ cucharadita de sal

$\frac{1}{2}$ kg de salchicha — $\frac{2}{3}$ taza pequeña de aceite

6. Producimos un texto con las recetas elaboradas, con todos los estudiantes de nuestro curso aplicando números racionales.

NÚMEROS DECIMALES COMO CONSECUENCIA DE LOS RACIONALES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 43. Realicemos la siguiente actividad y respondemos las preguntas indicadas:

De visita al mercado de nuestra zona:
Preguntamos 10 alimentos necesarios en la canasta familiar de nuestra casa, los anotamos y posteriormente visitamos el mercado para averiguar los precios respectivos:
1) ¿Lograste encontrar todo lo de la lista?
2) Después de averiguar los precios y la cantidad que necesitan para la semana, suma cada monto y de esta manera tendrás un presupuesto semanal.
3) ¿Notaste la diferencia en las cantidades, eran precios exactos o algunos tenían cifras decimales, puedes mencionar cuáles?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Números decimales en la comunidad

Los números decimales en la comunidad podemos encontrarlos de manera constante cuando vamos al mercado o la tienda y debemos pagar Bs 1.50 por algún producto o cuando compramos un litro de gasolina a Bs 3.74 o la calificación de una evaluación, como por ejemplo 15.5 puntos o cuando medimos la altura de una pared por ejemplo 3.5 m. Como puedes apreciar los números decimales se encuentran presentes en la cotidianidad.

ENTERO	COMA DECIMAL	DÉCIMO	CENTÉSIMO	MILÉSIMO	DIEZ MILÉSIMO
3	,	0	4	7	1

Se lee: tres enteros, cuatrocientos setenta y un diez milésimos.

2. Definición de números decimales

Los números decimales están compuestos por una parte entera (igual o mayor que uno) y otra parte decimal (menor que la unidad), estas dos partes están separadas por una coma o punto decimal.

Conversión de fracción a decimal exacto o periódico.

A decimales **exactos**:

1) $\frac{1}{4} = 0{,}25$

2) $\frac{2}{4} = 0{,}5$

$$\begin{array}{r|l} 10 & 4 \\ \cline{2-2} 20 & 0{,}25 \\ \text{'' ''} & \end{array}$$

⇨ A decimales **periódicos puros**:

$\frac{2}{3} = 0{,}6666 \ldots\ 0,\widehat{6}$ ***Periodo***

$$\begin{array}{r|l} 20 & 3 \\ \cline{2-2} 20 & 0,666\ldots\ \infty \\ 20 & \\ 20 & \\ \infty & \end{array}$$

⇨ A decimal **periódico mixto**:

$\frac{17}{45} = 0{,}37777 \ldots\ 0,3\,\widehat{7}$ ***Periodo***

$$\begin{array}{r|l} 170 & 45 \\ \cline{2-2} 350 & 0,3777\ldots\ \infty \\ 350 & \\ 350 & \\ \infty & \end{array}$$

Actividad 44. Realicemos las siguientes transformaciones y mencionamos qué tipo de decimal es:

Operaciones con números decimales

1) $\frac{37}{10} =$	2) $\frac{19}{9} =$	3) $\frac{22}{45} =$	4) $\frac{15}{4} =$	5) $\frac{41}{90} =$

3. Operaciones con números decimales

Adición y sustracción de números decimales

Para sumar y/o restar expresiones decimales, se seleccionan los positivos en una columna y en otra columna los negativos. Como resulta signos iguales en cada columna se suman, los resultados de positivos y negativos por ser signos diferentes se restan. Debe alinearse las comas decimales para sumar o restar decimales.

Ejemplo: Calculamos: 0,34 − 12,1704 + 123,00035 − 5 + 0,004 + 4 − 7,0302

Signos iguales se suman		Signos diferentes se restan
Positivos	**Negativos**	
+ 0, 34 +123, 00035 + 0, 004 + 4, +127, 34435	−12, 1704 − 5, − 7, 0302 24, 2006	El resultado lleva el signo del mayor valor absoluto + 127, 34435 − 24, 2006 **Respuesta** +103, 14375

Multiplicación, división y sus propiedades

Multiplicación de números decimales $-2{,}0034 * (-0{,}45) * 5 = +4{,}507650$

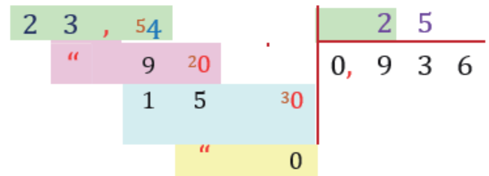
Multiplicamos en columna el primer y segundo factor	**El producto del 1er. y 2do. factor, multiplicamos por el 3er factor**
2,0034 ⇨ **4 Decimales** × 0,45 ⇨ **2 Decimales** **100170** **80136** **00000** 0,901530 De derecha a izquierda contamos 6 dígitos para poner la coma decimal.	0,901530 ⇨ 6 Decimales × 5 ⇨ 0 Decimales 4,507650 Igualmente contamos los dígitos de derecha a izquierda y para anotar la coma decimal.

Nota.- Si hubiere un cuarto factor o más factores se continúa multiplicando de la misma manera.

División de números decimales. Analizaremos 3 formar para dividir decimales.

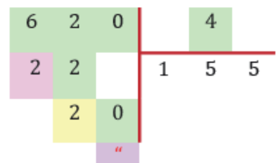
A. **Un número decimal entre un número entero.** Se divide como si fueran números naturales, cuando bajas el primer decimal se coloca la coma en el cociente y se continua con la división. Si la parte entera del dividendo es menor que el divisor, se escribe 0 y coma en el cociente, se sigue dividiendo como si fueran números naturales.

Ejemplo A $(-23,4) \div 25 = -0,936$



B. **Un número entero entre un número decimal.** Se convierte el divisor en un número entero, para ello se multiplica al dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el divisor. Luego, se divide como números enteros o naturales.

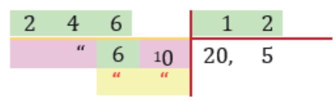
Ejemplo B. $62 \div 0,4 = 620 \div 4 = 155$



C. **Un número decimal entre otro número decimal.** Se convierte el divisor en un número natural, para ello se multiplica al dividendo y divisor por la unidad seguida de tantos ceros como decimales tenga el divisor. Luego, se procede a dividir como en los casos A y B.

Ejemplo C

$24,6 \div (-1,2) = 246 \div (-12) = -20,5$



Operaciones combinadas con números enteros racionales y decimales

Actividad 45. Resolvamos las operaciones combinadas con números decimales en el cuaderno de ejercicios:

1) $-20,04 + 2,170 + 312,0003 - 51 + 0,005 + 1,1 - 671,0349 =$

2) $-6 + 17,017 - 3,0005 - 2,4 + 3,0043 + 4,4 - 1,032 =$

3) $4 * 0,892 * (-28,34) =$ 4) $3,8 \div (-5) =$ 5) $56,03 + 9 - 3,0512 =$

Actividad 46. Después de haber estudiado los números enteros, racionales y decimales, resolvamos ejercicios combinados:

1) $\frac{1}{5} + 3 + 0,2$ 2) $\sqrt{81} + 0,5 - \left(\frac{2}{3}\right)^2$ 3) $\sqrt{\frac{25}{144}} - \frac{1}{6}$

4) $\sqrt{\frac{2}{3} * \frac{1}{24}} - (-1)^3 + 0,25$ 5) $7^2 + \frac{1}{2^3} - (0,4 * 4)$ 6) $\left(-7 + \frac{1}{7}\right) + (7^2 \div 7) - (1 - 0,95)$

¡Realicemos la valoración!

En las operaciones matemáticas que se realizan a diario para resolver problemas cotidianos, casi todos los números que se manejan son racionales, utilizándolos constantemente, a veces sin darnos cuenta.

Actividad 47. Analicemos sobre la aplicación de los números racionales en la vida diaria y respondamos las siguientes preguntas, en el cuaderno de ejercicios.

1) ¿Qué problemas cotidianos resuelves aplicando números decimales?
2) ¿Cómo crees que el ser humano descubrió los números racionales, ¿por qué motivo?
3) ¿Cuál es la importancia de conocer los procedimientos correctos para realizar operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 48. Resolvamos en el cuaderno de ejercicios:

1) Elaboramos una lista de las compras semanales que se realizan en la familia y expresamos las cantidades de peso, kilo, costo, etc. con números racionales y/o decimales o enteros, realizando las operaciones adecuadas para encontrar el peso total de los productos de la canasta familiar, el costo económico, etc.

2) Elabora una receta que agrade a tu familia u otra que esté de acuerdo a tus posibilidades, para poder prepararla en casa utilizando como patrón los números racionales.

RAZONES, PROPORCIONES Y REGLA DE TRES APLICADOS A LA COMUNIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Iniciamos con la historia de Francisco, cuando viajó a la ciudad de La Paz, acompañado de su padre, Julio.

Francisco y su querido papá, Julio, llegaron a la ciudad de La Paz desde Potosí. Francisco, muy sorprendido y emocionado por pasear en el teleférico, le dijo a su padre: "papito, lo primero que haremos en esta hermosa ciudad es ir a dar un paseo por todos los teleféricos, ¿puedes complacer mi deseo? ¿Por qué no?, le respondió su padre, -entonces vamos- dijo Francisco.

Al llegar al teleférico rojo, Francisco observó una gran cantidad de gente y preguntó al encargado cuántas personas pueden entrar en cada cabina. El encargado le respondió que seis.

Luego preguntó cuántas cabinas hay en el color rojo y el encargado le dijo que 15 cabinas.

Francisco, muy inquieto por tener más información sobre el teleférico, preguntó a su padre - papito, el encargado dijo que entran seis personas en cada cabina y tienen 15 cabinas. ¿Cuántas personas entran en total en todas las cabinas?, su padre le respondió: "solo multiplica, hijito". Si en una entran seis, entonces multiplicas 6 por 15.

$$1\,cabina \rightarrow 6\,personas$$
$$15\,cabinas \rightarrow x$$

dividir

$$\begin{array}{ccc} 1 & \rightarrow & 6 \\ 15 & \rightarrow & x \end{array}$$

multiplicamos

$$x = \frac{15 * 6}{1}$$

$$x = \frac{90}{1}$$

$$x = 90\,personas$$

Actividad 49. De acuerdo a la lectura, realicemos un breve análisis y respondamos las siguientes preguntas en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Por qué se realizó la multiplicación para conocer el número de personas que pueden entrar a las cabinas?
2. ¿Cómo identificamos los factores para poder multiplicar?
3. ¿Qué tipo de regla o algoritmo se utilizó para responder las preguntas de Francisco?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Razones y proporciones

Una razón es un cociente indicado entre dos números a/b, sus términos son el antecedente y el consecuente.

Una Proporción es una igualdad entre dos razones de una misma clase. Los términos de una proporción son los medios y extremos.

Ejemplo: Las dos razones entre las cantidades de azúcar y harina se escriben como proporción de la siguiente manera:

$\frac{4}{2} = \frac{12}{6}$ o $4 \div 2 = 12 \div 6$ Y leemos así: ***4 es a 2*** *como* ***12 es a 6***. Donde **4** y **6** son extremos, **2** y ***12*** son ***medios***.

Actividad 50. Realicemos las siguientes actividades en el cuaderno de ejercicios:

Escribe **V** (*verdadero*) y **F** (*Falso*) en las etiquetas de las razones que forman o no una proporción.

$\frac{12}{6}=\frac{6}{2}$	$\frac{8}{2}=\frac{4}{1}$	$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}=\frac{2}{20}$	$\frac{8}{4}=\frac{6}{3}$

Escribe cómo se lee cada una de las siguientes proporciones:

$\frac{3}{5}=\frac{6}{10}$ $\qquad$ $8 \div 2 = 4 \div 1$ $\qquad$ $\frac{7}{3}=\frac{14}{6}$

....

Escribe proporciones cuya razón sea igual a los diferentes incisos. Aplica tus conocimientos de fracciones equivalentes.

a) $\boxed{9} \to \boxed{\frac{99}{11}} = \boxed{\frac{9}{1}}$ **b)** $\boxed{3} \to \boxed{\frac{\ }{\ }} = \boxed{\frac{\ }{\ }}$ **c)** $\boxed{8} \to \boxed{\frac{\ }{\ }} = \boxed{\frac{\ }{\ }}$ **d)** $\boxed{5} \to \boxed{\frac{\ }{\ }} = \boxed{\frac{\ }{\ }}$

Propiedad fundamental de las proporciones

En toda proporción, el **producto** de los extremos **es igual** al producto de los medios.

Actividad 51. A partir de la propiedad fundamental de las proporciones completemos la siguiente tabla en el cuaderno de ejercicios:

Proporciones	Extremos	Medios	Producto de los extremos	Producto de los medios
$\frac{6}{8}=\frac{12}{16}$	$6\ y$ ___	$8\ y$ ___	$6 * 16 = 96$	$8 * 12 = 96$
$\frac{12}{6}=\frac{24}{12}$	$12\ y$ ___	6 y 24	$12 * 12 = 144$	___ $*$ ___ $= 144$
$\frac{6}{8}=\frac{18}{24}$	___ $y\ 24$	___ $y\ 18$	$6 *$ ___ $=$ ___	$8 *$ ___ $=$ ___

Calcula el término desconocido de las siguientes proporciones

$$\frac{20}{\ }=\frac{40}{8} \qquad \frac{3}{4}=\frac{75}{\ } \qquad \frac{1}{25}=\frac{\ }{100} \qquad \frac{36}{10}=\frac{\ }{5} \qquad \frac{1}{50}=\frac{2}{\ } \qquad \frac{7}{14}=\frac{70}{\ }$$

Magnitudes directamente proporcionales

Dos magnitudes son directamente proporcionales cuando, al aumentar o disminuir una de ellas, la otra también lo hace en la misma manera y proporción.

Ejemplo*:* Si 2 Kg de carne de pollo cuestan Bs 64 ¿Cuánto se pagará por 6 kg de carne de pollo?

Carne de pollo en Kg	Precio en Bs.
2	64
6	x

Si **aumentan** los kg de carne de pollo, entonces **aumentará** el precio.
Esto es proporcionalidad **DIRECTA.**

Expresando como proporción: $\frac{2}{32}=\frac{6}{96}$

Magnitudes inversamente proporcionales

Dos magnitudes son inversamente proporcionales cuando al aumentar una disminuye la otra en la misma proporción.

Ejemplo*:* Un albañil construye un muro en 2 días. ¿Qué tiempo tardarán 2 albañiles en construir el mismo muro?

Número de albañiles	Número de días
1	2
2	x

Los datos de las magnitudes reflejan que si **aumenta** la cantidad de albañiles entonces **disminuye** la cantidad de días. Esto es proporcionalidad **INVERSA.**

Expresando como proporción: $\frac{1}{2} = \frac{2}{\mathbf{1}}$

Actividad 52. Llenemos los datos en las tablas de los ejercicios 1, 2 y 3, encerremos la respuesta correcta en el cuaderno de ejercicios:

1) 5 hombres construyeron dos habitaciones en 2 semanas. En otro pueblo, un grupo de 10 hombres realizó el mismo trabajo en una semana.

Hombres	Semanas

2) 15 personas trabajan para arar completamente una parcela en un solo día, para 3 parcelas se necesitan 45 personas.

Parcela	Personas

3) Para transportar 90 estudiantes se necesitan 3 buses, entonces para 300 estudiantes se necesitan 10 buses.

Estudiantes	Buses

4) María corre alrededor del parque a una velocidad constante, si tarda 9 minutos para dar 3 vueltas, ¿Cuánto se demora en dar 15 vueltas?

45 minutos ; 20 minutos ; 46 minutos ; 12 minutos

5) Un compañero compra hamburguesas en un carro de comidas rápidas, el señor del carrito le dice que 3 hamburguesas le cuestan Bs. 15 y 5 le cuesta Bs. 25. ¿Cuál es el precio de 1 hamburguesa y la razón de proporcionalidad?

Bs. *3* Bs. *5* Bs. *75* Bs. *2*

2. Porcentaje

Se llama porcentaje o tanto por ciento al valor que corresponde a 100 en una proporción. Se representa por "%".
Ejemplo: Hallar el 15% de 32.

%	Número
100%	32
15%	x

$$x = \frac{15 * 32}{100} = \frac{480}{100} = 4{,}8$$

R. El 15% de 32 es 4,8

Ejemplo*:* En un curso de 40 estudiantes de secundaria, 6 reprobaron el área de Matemática, determina el % de estudiantes reprobados.

%	Estudiantes
100%	40
x	6

$$x = \frac{100 * 6}{40} = \frac{600}{40} = 15$$

El porcentaje de reprobados es 15%.

3. Regla de tres simple

3.1 Regla de tres simple

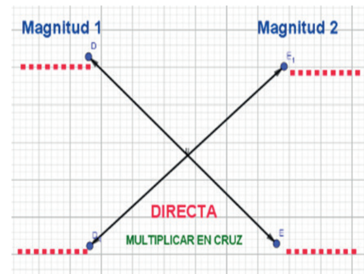
Es una forma sencilla de resolver problemas de proporcionalidad en la que se tienen tres datos conocidos y una incógnita. Recordemos que una incógnita es una cantidad que no conocemos, generalmente se representa con las últimas letras del abecedario. La regla de tres es simple cuando solamente intervienen en ella dos magnitudes, las cuales pueden ser directa o inversa.

a) Regla de tres simple directa

Al aumentar una magnitud la otra también aumenta, al disminuir una magnitud la otra también disminuye, a esto se llama regla de tres directa.

Para resolver un problema aplicando regla de tres simple directa, seguimos 3 pasos:

1.) Agrupar datos tomando en cuenta las magnitudes.
2.) Multiplicar datos en diagonal o cruz.
3.) El número solo divide.



Ejemplos:

1. Si con Bs 5 se compran 10 panes, ¿cuánto se necesitan para comprar 30 panes?
R. Significa que se necesitan Bs 15 para comprar 30 panes.
2. Si un obrero gana Bs 35 por día de trabajo ¿Cuánto dinero gana en 31 días?

Siguiendo los pasos: 1. Agrupamos datos 2. Multiplicamos en cruz 3. Dividimos entre el número que queda	Bs	Panes
	5	10
	x	30

$$x = \frac{5 * 30}{10} = \frac{150}{10} = 15$$

Días	Bs.
1	*35*
31	*x*

$$x = \frac{35 * 31}{1} = 1085$$

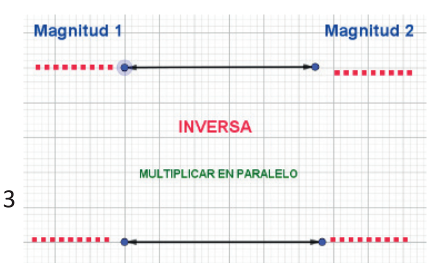
R. Significa que el obrero gana en 31 días 1085 Bs.

Actividad 53. Resolvamos los siguientes problemas en el cuaderno de ejercicios:

1. Si 4 libros de lectura cuestan Bs 32. ¿Cuánto costarán 12 libros?
2. Un electricista cobra Bs 60 por punto de instalación domiciliaria ¿Cuánto ganaría si hace la instalación de una vivienda que consta de 30 puntos?
3. 500 hojas de papel tienen un costo de Bs 28 ¿Cuánto cuestan 300 hojas?

b) Regla de tres simple inversa

Al aumentar una magnitud la otra disminuye o al disminuir una magnitud la otra aumenta.



Para poder resolver un problema aplicando regla de tres simple inversa, seguimos 3 pasos:

1.) Agrupar datos tomando en cuenta las magnitudes.
2.) Multiplicar datos en paralelo.
3.) El número que queda solo, divide.

Ejemplos:

1. 4 obreros hacen una obra en 12 días ¿En cuántos días podrían hacer 7 obreros la misma obra?

Obreros	Días
4	12
7	X

$$x = \frac{4 * 12}{7} = \frac{48}{7} = 6.857$$

R. Significa que 7 obreros podrían hacer la misma obra en 6 días.

2. Una cierta cantidad de alimentos puede abastecer a 18 personas durante 7 días. Esa misma cantidad de alimento, ¿a cuántas personas puede abastecer durante 63 días?

Personas	Días
18	7
x	63

$$x = \frac{\overset{1}{18 * 7}}{\underset{9}{63}} = \frac{18 * 1}{9} = \frac{18}{9} = 2$$

R. Puede abastecer a 2 personas.

Actividad 54. Resolvamos los siguientes problemas en el cuaderno de ejercicios:

1) Una empresa telefónica contrató 50 empleados para instalar una red de fibra óptica. ¿Cuánto tiempo tardarán en hacerlo ya que un proyecto similar fue realizado por 80 empleados en 45 días?
2) Un grupo de comunarios quiere comprar un tractor agrícola, han calculado que entre 50 personas la cuota sería de Bs 6300, si llegaran a 75 comunarios. ¿Cuánto sería el aporte individual?
3) Una conexión a internet con una velocidad promedio en nuestro país tiene un costo de Bs 280. Con este precio, el servicio es accesible a 3 millones de bolivianos. Si la tarifa se redujera a Bs 100. ¿Cuántas personas podrían contratar este servicio?

4. Regla de tres compuesta

Cuando se relacionan tres o más magnitudes o variables, se trata de una regla de tres compuesta.
Las situaciones problemáticas en las que se aplica la regla de tres compuesta, dependiendo del tipo de relación de proporcionalidad entre variables, pueden ser directas, inversas o mixtas.

Ejemplos:

1) Si 8 obreros construyen 2000 metros de una carretera en 30 días ¿Cuántos metros construirán 12 obreros en 45 días?

Trabajadores	metros	días
De menos 8	$+2000$	*De menos* 30
a mas de 12	x	*A más* 45

$$\begin{array}{ccc} A_1 \leftrightarrow & B_1 & C_1 \\ A_2 \leftrightarrow & B_2 & x \end{array}$$

$$x = \frac{A_2 * B_2 * C_1}{A_1 * B_1}$$

$$\mathbf{x} = \frac{12 * 2000 * 45}{8 \cdot 30} = \frac{1080000}{240} = 4500$$

R. Construirán 4500 metros

- Primero se identifican las variables o magnitudes.
- Se observa la relación de proporcionalidad entre las magnitudes y la incógnita, si es directa o inversa aplicamos como en la regla de tres simple, colocando signo + a las cantidades que se multiplican y – a las que se dividen.

2) Por el consumo de electricidad equivalente a 12 focos encendidos permanentemente durante un periodo de 30 días, una familia paga 150 Bs. ¿Cuánto pagarían por el consumo equivalente a 9 focos permanentemente encendidos durante un periodo de 40 días?

Focos	Bs	Días
-12	$+150$	-30
$+9$	x	$+40$

$$x = \frac{9 * 150 * 40}{12 * 30} = \frac{54000}{360} = 150$$

R. La familia pagaría 150 Bs.

3) En 4 días, 6 impresoras han impreso 100 libros. ¿Cuántos días tardarán en imprimir 50 libros si tenemos 4 impresoras?

Días	Impresoras	Libros
$+4$	$+6$	-100
x	-4	$+50$

$$x = \frac{4 * 6 * 50}{4 * 100} = \frac{1200}{400} =$$

R. Tardarán en imprimir 3 días

Actividad 55. Resolvamos los siguientes problemas en el cuaderno de ejercicios:

1. El servicio de 3 Mbps satisface las necesidades de conexión de 5 dispositivos domésticos y tiene un costo de Bs 280 por mes. Si se contrata un servicio de 6 Mbps para conectar 8 dispositivos. ¿Cuál sería su precio si el incremento fuera proporcional?
2. Para contratar 10 constructores durante 15 días, se necesita un presupuesto de Bs 60 000. ¿Cuánto dinero se necesita para contratar 30 constructores durante 60 días?
3. Si 3 pintores tardan 10 días en pintar una casa. ¿Cuántos días tardarán 6 pintores en hacer el mismo trabajo?
4. ¿Cuántos ladrillos son necesarios para enladrillar un patio de 30 metros de largo y 23 metros de ancho, si se ocuparon 7 560 ladrillos para enladrillar un patio de 18 metros y 14 de ancho?
5. ¿Qué cantidad de gasolina requiere una motosierra para cortar 50 tablas? Si con 20 litros se cortaron 90 tablas.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 56. Resolvamos los siguientes problemas en el cuaderno de ejercicios:

La estudiante María quería construir un huerto de forma circular con las mismas dimensiones que se determinó en consenso de dieciséis metros cuadrados ($16m^2$), asimiló que para tener ese resultado tendría que utilizar las siguientes fórmulas:

- Para un terreno cuadrado $A_{\blacksquare} = a^2$
- Para un terreno circular de $A_{\bullet} = \pi r^2$
- Como ambas áreas tienen el mismo valor lo expresó como $A_{\blacksquare} = A_{\bullet}$
- Obteniendo la relación $a^2 = \pi r^2$
- Donde pudo calcular el radio "r" que generará la superficie deseada $r = \sqrt{\frac{a^2}{\pi}}$ llegando a ser: $r = \sqrt{\frac{4^2}{\pi}}$ **=2.257 m**

Con el radio calculado construyó su huerto y recibió muchas ovaciones de sus compañeras, compañeros y maestro.

Actividad 57. Respondamos los siguientes preguntas en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿En qué situaciones cotidianas aplicamos representaciones geométricas?
2. ¿Qué tan importante es el aprendizaje de los ángulos y su relación con la vida?
3. En tu contexto. ¿Cómo se aplican los conocimientos geométricos?
4. ¿Cuál es la importancia del estudio de las razones y proporciones en la cotidianidad en otras problemáticas?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 58. Realicemos los siguientes actividades en el cuaderno de ejercicios:

- En tu hogar realiza un huerto familiar adecuado al espacio disponible de forma creativa utilizando las figuras planas y nociones matemáticas con referencia al cálculo de áreas, perímetros y proporciones.
- Puedes proponer huertos de tipo flotantes, verticales, camas movibles, decorativos, terapéuticos u otros.
- Puedes elegir plantas, legumbres, hortalizas u otras en función de las necesidades de tu hogar.
- Argumenta el espacio que la planta necesita en tu huerto para su buen crecimiento y producción.

LA FORMA, EL NÚMERO Y LA SEMEJANZA DE LA GEOMETRÍA EN LA COMUNIDAD

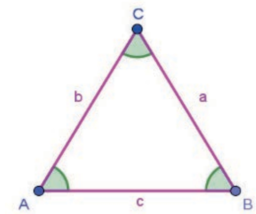
¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Después de leer la lectura "LA HISTORIA DE ISÓSCELES EL TRIÁNGULO" que se encuentra en el código QR, responde en tu cuaderno:

– ¿Cuál es tu opinión acerca de respetar la diferencia nuestra y la de los demás?
– ¿Cómo podrías ayudar al niño Isósceles a construir su árbol familiar?
– ¿Qué actividades propones para dar acogida a un nuevo miembro en tu salón de clases?
– Elabora un glosario con las palabras nuevas mencionadas en el cuento, que se refieren al tema.

Escanea el QR

Ingresa el QR para ver más acerca del tema.



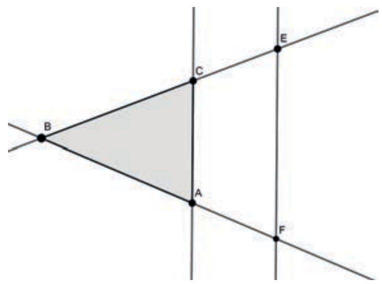
¡Continuemos con la teoría!

1. Triángulos semejantes

Teorema de Thales. Es el teorema fundamental de la teoría de semejanza de triángulos y menciona que: “Si dos rectas cualesquiera en diferente posición y con un punto de corte son cortadas por otras dos rectas paralelas, entonces los segmentos que determinan a ellas son proporcionales:

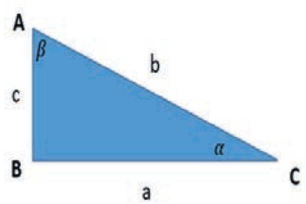
Entonces tendremos:

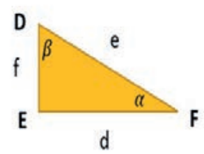
$$\frac{BE}{BC} = \frac{BF}{BA} = \frac{FE}{CA}$$



Mediante es te teorema podremos establecer una proporción de lados.

Dos triángulos son semejantes si ambos tienen sus ángulos iguales, aunque no tengan la misma dimensión.





Los triángulos son semejantes:

$$\Delta BCA \sim \Delta EFD$$

Por tanto: $\sphericalangle BCA = \sphericalangle EFD$ $\quad \sphericalangle CAB = \sphericalangle FDE$

$$\frac{c}{f} = \frac{a}{d} = \frac{b}{e} = k$$

¡Realicemos la valoración!

Actividad 59. Respondemos de manera reflexiva las siguientes preguntas:

- ¿La semejanza de triángulos es aplicable en situaciones de la vida?
- ¿Puedes identificar triángulos semejantes en tu entorno?
- ¿Cuál es tu opinión sobre la importancia del estudio de los triángulos semejantes?

¡Es hora de la producción!

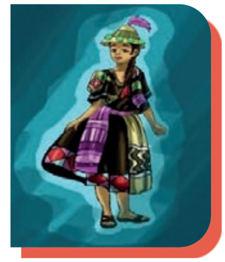
Actividad 60. Realizamos las siguientes actividades:

- Observamos la naturaleza y nuestro entorno para identificar triángulos semejantes y representarlos en una maqueta.
- Para ello podremos utilizar materiales reciclados como cartón, botellas vacías, papel reciclado, etc.
- Exponemos en la clase de matemática nuestras maquetas realizadas explicando las propiedades de los triángulos semejantes.

PERÍMETROS, ÁREAS Y FORMAS GEOMÉTRICAS APLICADAS EN LA VIDA COTIDIANA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

La diversidad cultural de nuestro país muestra una innumerable riqueza en cuanto a los diseños y tejidos propios de cada región, que son valorados bajo estándares internacionales.



Actividad 61. Resolvamos los siguientes problemas en el cuaderno de ejercicios:

Respondamos las siguientes preguntas:
- Desde tu vivencia. ¿Cuáles son los tejidos que puedes mencionar?, descríbelo.
- En los diseños que pudiste observar. ¿Cuáles son las figuras geométricas que distingues?
- Dibuja en tu cuaderno, los polígonos que mencionaste.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

La palabra polígono hace referencia a una figura plana delimitada por lados rectos, también podemos indicar que se refiere a una figura geométrica formada por una línea poligonal cerrada. Los polígonos pueden ser regulares o irregulares.

Polígonos regulares   Polígonos irregulares

- **Polígonos regulares:** cuando todos sus lados son iguales, por tanto, sus ángulos también lo son.
- **Polígonos irregulares:** cuando sus lados y ángulos son diferentes

Actividad 62. Dibujemos tres polígonos regulares que conozcas y tres polígonos irregulares en el cuaderno de ejercicios:

1. Perímetro de polígonos regulares e irregulares

El perímetro de un polígono es igual a la suma de la longitud de todos sus lados.

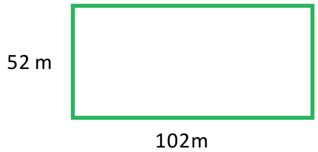
Perímetros de polígonos regulares

Polígono	Figura	Perímetro	Ejemplo
Triángulo equilátero	*l*	P =3* *l*	2 cm P = 3 * *l* P = 3 *(2 cm) P = 6 cm
Cuadrado	*l*	P = 4* *l*	2 cm P = 4 * *l* P = 4 * (2 cm) P = 8 cm
Rectángulo	*a* *b*	P = 2a + 2b	1 cm 2 cm P = 2a + 2b P = 2(1) + 2(2) P = 6 cm
Rombo	*l*	P = 4 * *l*	1 cm P = 4 * *l* P = 4 * (1 cm) P = 4 cm
Romboide o paralelogramo	*a* *b*	P = 2a + 2b	1 cm 3 cm P = 2a + 2b P = 2(1) + 2(3) P = 8 cm
Trapecio isósceles	*c* *a* *a* *b*	P = 2a + b + c	2.5 cm 1 cm 3 cm P = 2a + b + c P = 2(1) + 3 + 2,5 P = 7,5 cm
Polígono regular	*l*	P= n* *l* "n" es el número de lados iguales del polígono	1.5 cm P = n * *l* P = 5(1,5) P = 7,5 cm

Ejemplos:

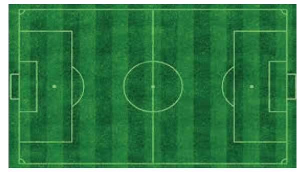
1). En un campo de fútbol, el largo es de 100 metros y el ancho 50 metros, se quiere colocar una malla perimetral, con un margen de 1m en cada lado, para dejar espacio a los jugadores. ¿Cuántos metros de malla podemos comprar?

Resolución: La cancha mide 100 m por 50 m, sin embargo, debemos dar un margen de 1 metro a cada lado, por tanto el rectángulo a considerar es:



El perímetro es:

$$P = 2a + 2b$$
$$P = 2(52m) + 2(102m)$$
$$P = 308\ m$$



Cancha de futbol.

Es decir, que necesitaremos 308 metros de malla.

2). Un carpintero que construye mesas hexagonales para kínder, colocará una cinta alrededor de la misma para evitar rasmilladuras en los niños, si cada mesa tiene de lado 50 cm y debe construir 6 mesas. ¿Cuántos centímetros de cinta necesitará?

Determinamos el perímetro de un hexágono regular:

$$P = n * l$$

En este caso como se trata de un hexágono, tenemos n = 6, el lado mide 50 cm. Entonces tenemos:

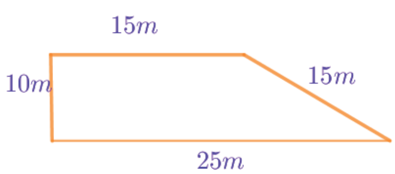
$$P = n * l$$
$$P = 6 * 50cm$$
$$P = 300cm$$

El carpintero construirá 6 mesas, entonces necesita: 6*300 cm = 1800 cm de cinta para el borde de todas las mesas.

- Perímetro de polígonos irregulares, recordemos que los polígonos irregulares tienen sus lados diferentes, para hallar su perímetro simplemente sumamos las longitudes de todos sus lados.

Ejemplos:

Dña. Juana sembrará verduras en una parte de su lote, para evitar que los animales ingresen, cercará con cuatro filas de alambre este sector, su pequeño terreno tiene estas medidas. ¿Cuántos metros de alambre necesitará en total?



Calculamos el perímetro: $P = 25m + 15m + 15m + 10m$

$$P = 65m$$

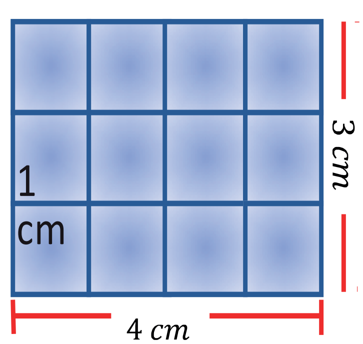
Como utilizará cuatro filas de alambre, entonces, necesitará un total de:
4*65 = 260 metros de alambre.

2. Áreas de figuras planas: triángulos, polígonos regulares e irregulares

2.1. Definición de área

Es el lugar geométrico comprendido dentro de los límites (el perímetro) de una figura geométrica cerrada, el cual es llamado también superficie o área. El área de las figuras geométricas está dado en unidades cuadradas "u²" (m^2; cm^2; Km^2; ft^2; $yard^2$; $pulg^2$; etc), lo cual nos indica cuántos cuadrados de una unidad de lado por otra unidad de lado entran en una figura geométrica. Analicemos el gráfico.

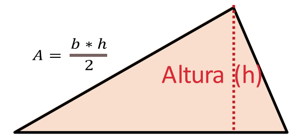
El rectángulo está formado por 12 cuadrados de 1cm por 1cm de lado, por lo tanto se dice que el rectángulo tiene 12 cm^2 de superficie o de área.



A diferencia del perímetro, que se obtiene sumando sus lados. El área se obtiene multiplicando el largo por el ancho de sus lados, pero debido a las características que cada figura posee, la forma de determinar su área varía. Veamos.

3. Triángulos

En un triángulo el área se obtiene multiplicando la base (cualquiera de los lados), por la altura (distancia perpendicular a la base, con el vértice opuesto del triángulo) y dividido entre dos.



4. Polígonos regulares

Los polígonos regulares son figuras geométricas planas cuyos lados tienen el mismo tamaño, inscritos dentro una circunferencia, por lo cual la forma de determinar el área puede depender de los lados de la figura o del radio de la circunferencia. Nosotros estudiaremos la obtención del área, dependiendo de sus lados.

Cuadrado: llamado también tetrágono, es la figura geométrica de cuatro lados iguales, su área de obtiene multiplicando dos de sus lados. $A = l * l$

Ejemplo 1: Determinar el área de un cuadrado de 5m de lado.

Solución:

$A = l * l$

$A = (5\ m) * (5\ m)$

$A = 25\ m^2$

Respuesta:

El área del cuadrado es:25 m^2

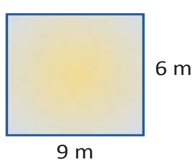
5. Polígonos irregulares

La forma de determinar el área de estas figuras es realizando una partición de la figura en otras más simples y de simple determinación de áreas, triángulos o rectángulos.

Antes de determinar áreas de figuras geométricas compuestas, iremos estudiando las áreas de figuras geométricas simples.

Rectángulo: es la figura geométrica de cuatro lados (dos pares desiguales), su área se obtiene multiplicando el ancho (a), por el largo (l). A = a *

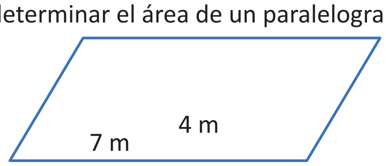
Ejemplo 2: determinar el área de un rectángulo de 6m por 9m de lado.



Solución:	Respuesta:
$A = a * l$	El área del cuadrado es:
$A = (6\ m)*(9\ m)$	54 m^2

Paralelogramo: es la figura geométrica de cuatro lados (dos pares iguales) de lados inclinados paralelos, su área se obtiene multiplicando uno de los lados por la altura formada con esta. A = a*h

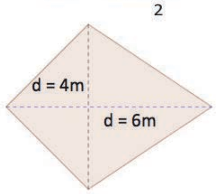
Ejemplo 3: determinar el área de un paralelogramo de 7m lado por 4m de altura.



Solución:	Respuesta:
$A = a*h$	El área del cuadrado es:
$A = (7\ m)*(4\ m)$	28 m^2

Ejemplo 4: determinar el área del rombo mostrado.

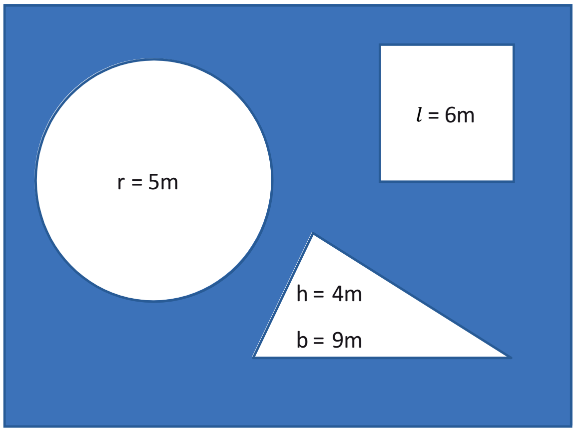
Rombo: es la figura geométrica de cuatro lados, el área de esta figura se obtiene multiplicando la diagonal mayor ***(D)***, por la diagonal menor ***(d)*** y dividido entre dos. $A = \frac{D * d}{2}$



Solución:	Respuesta:
$A = \frac{(D*d)}{2}$	El área del cuadrado es:
$A = \frac{(6\ m)*(4\ m)}{}$	12 m^2

Trapecio: Es la figura geométrica de cuatro lados (dos lados opuestos paralelos) de diferentes dimensiones, el área de esta figura se obtiene multiplicando la altura “h” entre los lados paralelos, por la suma de los lados paralelos “B,b” y divididos entre dos. A=(h*(B+b))

Ejemplo 5: calcular el área sombreada de la figura mostrada.



Solución:

La parte sombreada es no es completa, le faltan tres partes. Por lo cual al área más grande le quitaremos las áreas máspequeñas.

$$A_T = A_R - A_\Delta - A_o - A_\blacksquare$$

A_R =45 m*36 m=1.620m²

A_Δ = $\frac{(9\,m*4\,m)}{2}$=18m²

A_o = π*5 m*5 m=78,54m²

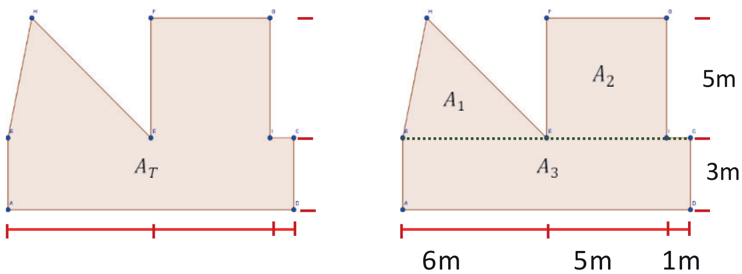
$A_\blacksquare$ = 6 m*6 m=36m²

A_T =1.620m²-18m²-78,54m²-36m²

A_T = **1.487,46 m²** es lo que mide el área sombreada

Para determinar el área de algunos polígonos, es necesario poder transformarlo en dos o más figuras geométricas básicas, de las cuales se determinará su área, para luego sumarlas y así obtener el área total.

Ejemplo 6: determinar el área del polígono irregular mostrado.



Solución:

A_1 = 15m²

A_2 = 25 m²

A_3 = 36m²

$A_T = A_1 + A_2 + A_3$

A_T = 15m²+25 m²+36m²

A_T = 76m²

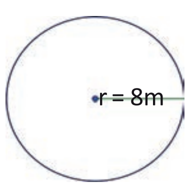
Nota. En este ejemplo podemos notar que una figura geométrica irregular se puede convertir en otra de formas básicas.

6. Círculo y circunferencia

Círculo. Es una figura geométrica plana, que representa a la superficie (o área) comprendida dentro de una circunferencia. La forma de determinar su área está definida por la fórmula: A = π * r² = π * r * r, donde “r” es la distancia del centro a cualquier parte de la circunferencia. Es importante hacer notar que π=3,14159265…

Circunferencia. Es una figura geométrica que representa a la línea exterior de una figura circular, la cual puede ser considerada también como el perímetro del círculo. La forma de determinarla está dada por la fórmula: P=2π*r

Ejemplo 8: determinar el valor del círculo y la circunferencia del radio de 8m.



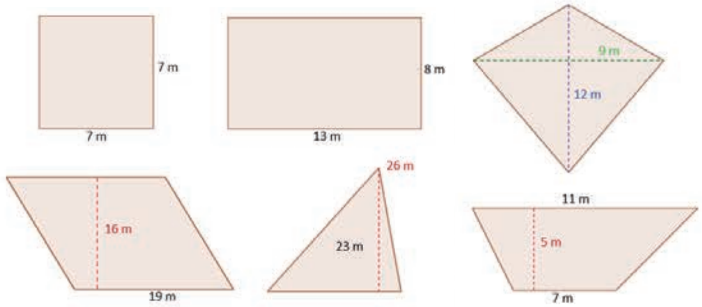
Solución:

P = 2π(8 m)=2*3,1416*8 m=50,26 m*

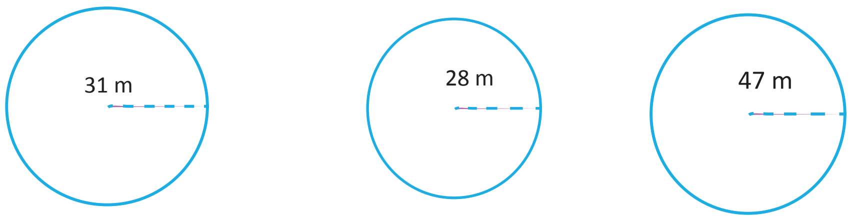
La circunferencia mide 50,26 m

A=π(8m)*(8m)=3.1416*64πm²=201,06m²El círculo tiene un área de: 201,06 m²*

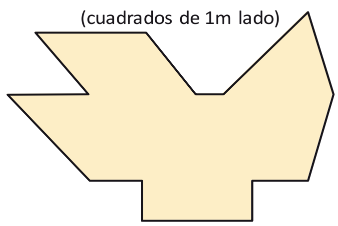
Actividad 61. Calculemos el valor de los perímetros de las siguientes figuras en el cuaderno de ejercicios:

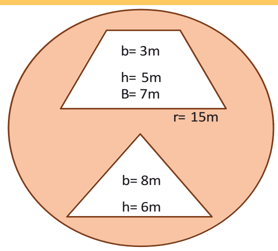


Actividad 63. Calculemos el valor del círculo y de la circunferencia en las figuras mostradas en el cuaderno de ejercicios:



Actividad 64. Calculemos el área de las partes sombreadas de las figuras en el cuaderno de ejercicios:





¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

En nuestro país, tenemos una multitudinaria muestra de tejidos que realizan nuestros artesanos, tales como los que mostramos a continuación:

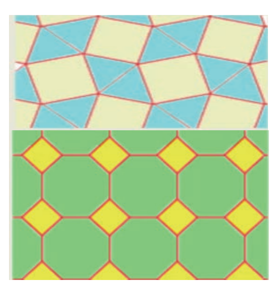
Conocedores, tal vez de algunas formas geométricas o polígonos, para la elaboración de estas muestras de tejido con calidad de exportación, nos llevan a reflexionar acerca de la importancia de valorar lo nuestro.

Actividad 66. Realicemos la siguiente actividad en el cuaderno de ejercicios:

Observamos con mucha atención las imágenes de los tejidos, luego en nuestro cuaderno, representamos gráficamente los polígonos que hemos observado.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Un teselado es la combinación de polígonos regulares o irregulares, que coinciden en algunos de sus lados y muestran así una sincronía tanto de colores como de polígonos utilizados.



Realizamos dos teselados utilizando polígonos regulares o irregulares.

LABORATORIO MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 67. Realicemos las siguiente investigaciones:

1. Investiguemos sobre la aplicabilidad del software matemático en procesos productivos.
2. Investiguemos sobre el origen del ajedrez y el sudoku.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. GeoGebra

1.1 Representación de los números enteros y racionales

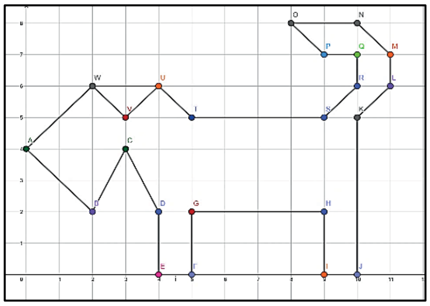
Sin duda uno de los softwares más utilizados en el área de Matemática es Geogebra, para poder observar e interactuar con el enlace del siguiente código QR, debes instalar en el dispositivo móvil que utilizas para hacer tus tareas, te ayudará a realizar varias actividades con mucha precisión.

Escanea el QR

Adición y sustracción de números enteros

1.2 Grafica de figuras planas

Siempre se han representado las figuras en el plano cartesiano, porque ambos elementos trabajan sobre dos dimensiones. Las cuales permiten que los puntos sean ubicados con precisión y presenten la forma deseada o requerida para su estudio.



A = (0, 4)	M = (11, 7)
B = (2, 2)	N = (10, 8)
C = (3, 4)	O = (8, 8)
D = (4, 2)	P = (9, 7)
E = (4, 0)	Q = (10, 7)
F = (5, 0)	R = (10, 6)
G = (5, 2)	S = (9, 5)
H = (9, 2)	T = (5, 5)
I = (9, 0)	U = (4, 6)
J = (10, 0)	V = (3, 5)
K = (10, 5)	W = (2, 6)
L = (11, 6)	

En este ejemplo puedes observar como de manera armónica se unen los segmentos para dar lugar a la silueta de una mascota.

2. Manejo de la calculadora

Escanea el QR

Uso y manejo de una calculadora científica.

Una vez ingresando al video escaneando el código QR, podrás observar las principales funciones de una calculadora científica, observa con mucha atención, recuerda si tienen dudas puedes ingresar varias veces así consolidad tus conocimientos acerca del maneo de la calculadora científica.

3. Taller de pensamiento lógico

El pensamiento lógico matemático es una de las habilidades más relevantes en la educación, pues ha venido adquiriendo interés en relación con el crecimiento exponencial de la tecnología.

Hoy queremos compartir contigo las razones más importantes por las que debemos fortalecer el desarrollo del pensamiento lógico matemático, así como algunas estrategias que podrás aplicar en el aula.

La vida es matemática, considera que todas nuestras acciones y decisiones diarias consisten en una “sutil configuración de patrones matemáticos”, los cuales nos permiten explicar cómo se conduce el mundo a través de cálculos estadísticos, probabilidades o leyes de la lógica que sin darnos cuenta, rigen nuestras decisiones diarias.

Técnicamente, utilizamos el razonamiento lógico matemático todo el día: cuando calculamos el tiempo para llegar al colegio, o cuando hacemos cálculos para comprar algo; todo el día estamos razonando situaciones que requieren aplicar las matemáticas.

Te presentamos algunas opciones para que puedas mejorar tu pensamiento lógico matemático: resolver **crucigramas matemáticos,** que son mejores si tu los elaboras con los temas que sean de tu interés, una forma de compartir con tu familia es el armar **rompecabezas,** harán que tus pensamientos lógicos no sólo se enfoquen en números, sino también en colores y formas, completar sudokus, es un juego de capacitación en la que debes relacionar columnas y filas de 9 números distribuidos en 9 casillas, que a su vez están distribuidas en regiones, te ayudarán a mejorar tus capacidades intelectuales y tomar mejores decisiones.

4. Ajedrez I

4.1. Nociones básicas

El Ajedrez es sin duda el deporte ciencia que puede practicarse desde cualquier edad, con las experiencias cotidianas que suceden, a veces es necesario realizar un análisis de cada situación para tomar las mejores decisiones, seguramente encontraras un sinfín de opciones para practicar este deporte, te presentamos una página en la que podrás encontrar todos los detalles para que seas un ajedrecista destacado.

Escanea el QR

Escanea el QR, para aprender las nociones básicas del ajedrez.

Escanea el QR

Ejercicios de mate en un movimiento.

4.2. Ejercicios de razonamiento (mate en 1, mate en dos, etc.)

Una vez que te familiarices con las principales jugadas de las piezas del tablero de ajedrez, podrás estar en campeonatos para desempeñar y mostrar tus potencialidades, así te presentamos esta página escaneando el código QR, para que puedas conocer como hacer mate en la menor cantidad de jugadas posibles y válidas.

Escanea el QR

Ejercicios de mate en dos movimientos.

5. Sudoku

Ingresa al siguiente código QR para acceder a las respuestas de las diferentes actividades, pero solo debe realizar para verificar si llegaste a la respuesta correcta.

¡Realicemos la valoración!

Actividad 68. Reflexivamente respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué es importante el desarrollo del pensamiento lógico matemático?
2. ¿Por qué es importante la aplicación de software matemático en la resolución de problemas?
3. ¿Cómo nos ayuda el ajedrez y el sudoku a desarrollar el pensamiento lógico matemático?

¡Es hora de la producción!

Actividad 69. Realicemos las siguientes actividades:

1. Investiga los diferentes tipos de tableros de ajedrez que existen.
2. Construye tu tablero de ajedrez y sus piezas con materiales del contexto.
3. Graba un videotutorial de la aplicación de GeoGebra en la resolución de problemas del contexto.

Escanea el QR

Conocemos las respuestas en el siguiente QR.

2 SECUNDARIA

ÁREA MATEMÁTICA

LOS NÚMEROS RACIONALES Y SUS APLICACIONES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 1

Susana organizó una reunión con sus compañeros de la promoción 2022, la invitación era para las 14:00, todos llegaron por grupos, el primer grupo llegó $\frac{3}{4}$ de hora tarde, el segundo $\frac{1}{2}$ hora después del primero, el tercer grupo $\frac{5}{6}$ de hora después del segundo y el último grupo llegó $\frac{1}{3}$ de hora después del tercero ¿A qué hora se reunieron todos?

Vamos a sumar los tiempos de demora.

$$\frac{3}{4}+\frac{1}{2}+\frac{5}{6}+\frac{1}{3}=\frac{9+6+10+4}{12}=\frac{29}{12}=2\frac{5}{12}$$

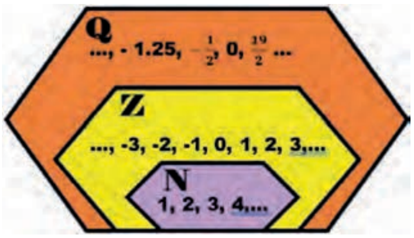
Dividiendo 60 minutos entre 12 tenemos: $\frac{60}{12}$=5 min, tenemos entonces 5(5 *min*) = 25 *min*

Interpretación: Por lo tanto, 14:00 más 2 h y 25 min es 16:25, hora en la que estuvieron todos sus invitados.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Número racional

Todo número racional **Q**, tiene la forma $\frac{a}{b}$, donde "a" y "b" son números enteros, en el cual "a" es el numerador (indica cuántas partes tomamos de la unidad a dividida) y "b" el denominador (indica en cuántas partes se ha dividido la unidad) y "b" distinto de cero.



Clases de fracciones

Fracción propia	, cuando el numerador es **menor** que el denominador.
Fracción impropia	, cuando el numerador es **mayor** que el denominador.
Fracción igual a la unidad	, el numerador es **igual** al denominador.
Fracción mixta	, son el resultado de las fracciones impropias, está compuesta de un número entero y una fracción propia.
Fracciones equivalentes	$\frac{3}{7}=\frac{6}{14}=\frac{9}{21}=\frac{33}{77}$, son fracciones con el mismo valor y se puede demostrar cuando el producto de los extremos es igual al producto de los medios.

Actividad 2:

Suma y resta

1) =

2) =

3) =

4) =

5) =

6) =

7) =

8) =

9) =

10) =

1. Operaciones con números racionales

Suma y resta de fracciones

a) Fracciones homogéneas, son aquellas que tienen igual denominador.

Ejemplo: 1) $\frac{5}{9}-\frac{2}{9}=\frac{5-2}{9}=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$ 2) $-\frac{16}{3}-\frac{7}{3}=\frac{-16-7}{3}=-\frac{23}{3}=-7\frac{2}{3}$

b) Fracciones heterogéneas, son aquellas que tienen denominadores diferentes.

Ejemplo:

1) $\frac{11}{8}+\frac{7}{6}-\frac{1}{4}=\frac{33+28-6}{24}=\frac{61-6}{24}=\frac{55}{24}=2\frac{7}{24}$

8	6	4	2
4	3	2	2
2	3	1	2
1	3		3
	1		

m.c.m. $=2^3*3=24$

Multiplicación de fracciones

Para multiplicar fracciones, se multiplica el numerador con numerador y denominador con denominador.

Ejemplo:

$$\left(-\frac{7}{8}\right)\left(\frac{24}{35}\right)=-\frac{168}{280}=-\frac{3}{5}$$

División de fracciones

En la división se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción y el producto se escribe como numerador del resultado, posteriormente se multiplica el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción, cuyo producto es el denominador del resultado.

Ejemplo: efectuamos.

$$-\frac{23}{19}\div-\frac{23}{33}=\frac{23*33}{19*23}=\frac{33}{19}=1\frac{14}{19}$$

Actividad 3:

Multiplicación

1) =   2) =

3) =   4) =

5) =

División

6) =   7) =

8) =   9) =

10) =

Potenciación y radicación de fracciones

Ejemplo:

$$\left(-\frac{4}{5}\right)^3=\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{64}{125}\quad\rightarrow\quad\sqrt[3]{-\frac{64}{125}}=-\frac{4}{5}$$

2. Operaciones combinadas con números enteros, racionales y decimales

Ejemplo 1. Resolvemos los siguientes ejercicios combinados:

$$\sqrt{\frac{49}{81}}+5\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{9}\right)-\left(-\frac{2}{3}\right)^2-5\frac{5}{6}$$

$$=\frac{7}{9}+5\left(\frac{27-2}{18}\right)-\frac{4}{9}-\frac{35}{6}$$

$$=\frac{7}{9}+5\left(\frac{25}{18}\right)-\frac{4}{9}-\frac{35}{6}$$

$$=\frac{7}{9}+\frac{125}{18}-\frac{4}{9}-\frac{35}{6}$$

$$= \frac{14+125-8-105}{18} = \frac{139-113}{18} = \frac{26}{18} = \frac{13}{9} = \mathbf{1\frac{4}{9}}$$

Ejemplo 2: efectuamos

$$\left(-\tfrac{1}{2}\right)^3 - \sqrt[3]{\frac{8}{27}} + 0{,}4 + \sqrt{0{,}25} - (1.5)^2$$

$$= \left(-\tfrac{1}{8}\right) - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \sqrt{\tfrac{1}{4}} - \left(\tfrac{3}{2}\right)^2$$

$$= -\tfrac{1}{8} - \tfrac{2}{3} + \tfrac{2}{5} + \tfrac{1}{2} - \tfrac{9}{4}$$

$$= \frac{-15-80+48+60-270}{120}$$

$$= \frac{108-365}{120} = -\frac{257}{120} = \mathbf{-2\,\frac{17}{120}}$$

RECORDATORIO

Cómo convertir un decimal a fracción

1. $0,\mathbf{4} = \frac{4}{\mathbf{10}} = \frac{2}{5}$
2. $0,\mathbf{25} = \frac{25}{\mathbf{100}} = \frac{1}{4}$
3. $1,\mathbf{5} = \frac{15}{\mathbf{10}} = \frac{3}{2}$

Actividad 4. Resolvemos las siguientes operaciones combinadas:

1) $\sqrt{\frac{25}{36}} - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - 2\frac{1}{6} + 1{,}25 =$

2) $\left(\frac{3}{2}\right)^3 - \sqrt[4]{\frac{81}{16}} + 0{,}2 + \sqrt{0{,}36} - (0.5)^2 =$

3) $\frac{3}{4} - \sqrt{\frac{49}{144}} + 2{,}4 - \left(-\frac{3}{2}\right)^4 =$

3. Problemas de números racionales aplicados al contexto y la tecnología

Juan tiene en su celular 1GB de datos móviles, debe enviar 2 archivos de 1/5 de GB cada uno y necesita mínimamente 7/10 de GB para pasar sus clases por Zoom, ¿podrá cumplir con sus responsabilidades de estudio?, ¿cuántos megas le sobrarán o faltarán? (1GB = 1024 MB).

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Analicemos la siguiente historia:

HISTORIA DE LAS FRACCIONES

El origen de las fracciones se remonta hace miles de años cuando los egipcios resolvían problemas mediante operaciones con fracciones, como la distribución del pan, el sistema de construcción de pirámides y el estudio de la tierra. En el siglo VI, los hindúes establecieron las reglas de las operaciones con fracciones. Las reglas que utilizamos en la actualidad con las fracciones, fueron obra del Mahavira en y Bháskara.

Como podemos ver, desde tiempos antiguos hubo la necesidad de dividir un entero en partes iguales. Por ejemplo, cuando compramos pan y lo dividimos en partes iguales.

Respondamos las siguientes preguntas:
¿Quiénes crees que fueron las civilizaciones más antiguas en resolver sus problemas a través de las fracciones?
¿En qué situaciones de la cotidianidad aplicamos los números racionales?
¿Cómo a través de los números racionales se desarrolló la ciencia y la tecnología?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Un grupo de voluntarios tienen como dato que hay 29 niños en una comunidad alejada, deben llevar solo lo necesario, ya compraron unos presentes, pero desean invitar algo de comer y pensaron en 2/4 tajadas de manzana, 3/4 de cada plátano, 1/10 de papaya y un vaso de yogurt para cada porción. Cada botella contiene 8 vasos, entonces ¿Cuántas frutas y botellas necesitan para los 29 niños? ¿Cuántos trozos les sobraron?

EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES Y REALES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 5

En la clase de matemática, medimos el radio de algunos objetos con forma de círculo: del reloj del curso, de 1 llanta de la bicicleta y de un basurero de forma circular. Con seguridad, obtuvimos diferentes resultados.

1. En la fórmula para calcular el área de una circunferencia utilizamos el número π ¿Te preguntaste por qué se utiliza este número para las formas circulares?

2. ¿Sabes por qué el valor de π no se puede convertir a fracción?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Números irracionales, son aquellos que no pueden ser expresados como fracción y que se caracterizan por poseer infinitas cifras decimales no periódicas y se representa con la letra “I”.

1. Los números irracionales y su clasificación

a) Irracionales algebraicos	Son el conjunto de todos los números que son solución de alguna ecuación polinómica con coeficientes enteros, pero que no puede ser expresado como una fracción de números enteros con denominador no nulo. **Ejemplo:** La siguiente ecuación $x^2 - 2 = 0$ *despejando* $x = \sqrt{2}$ tenemos un número irracional. Entonces, un número es algebraico irracional, si este es solución de un polinomio de coeficientes enteros, pero que es irreducible en los racionales.
b) Irracionales transcendentes	No son solución de ningún polinomio con coeficientes racionales; provienen de las llamadas funciones trascendentes (trigonométricas, logarítmicas y exponenciales, etc.) **Ejemplo:** e ≈ 2,71828182845904...

Actividad 6. Marcamos en el cuaderno, en cada ejercicio con **I.A.** sí es Irracional Algebraico, con **I.T.** sí es Irracional Transcendente y con **R** si es número racional.

1) $\boldsymbol{\pi}$ .... 2) $\sqrt{\mathbf{3}}$............. 3) $\sqrt[3]{-27}$ .... 4) e .... 5) $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{2}}$ ....

6) $\sqrt{\mathbf{20}}$ .... 7) $\left(\sqrt{5}\right)^2$ .... 8) $\boldsymbol{\Phi}$ .... 9) $\sqrt[3]{\mathbf{3}}$ .... 10) 1,25 ....

2. Operaciones con números irracionales

Los números irracionales son decimales con infinitas cifras por lo tanto las operaciones de suma, resta, multiplicación y división para los números irracionales no son operaciones bien definidas. Sin embargo, debemos tomar en cuenta estas dos afirmaciones, que siempre son válidas:

Si a es racional y b es irracional, entonces la suma $a+b$ siempre es irracional.	$\frac{7}{9}+\sqrt{7}$ es irracional.
Si $a \neq 0$ es racional y b es irracional, entonces el producto $a*b$ siempre es irracional.	$\frac{5}{11}*\sqrt{3}=\frac{5\sqrt{3}}{11}$ es irracional.

Así mismo

El inverso aditivo de un número irracional es un número racional.	**Ejemplo:** 1) $-b+b=0$ 2) $\pi+(-\pi)=0$

El inverso multiplicativo de un irracional es un número racional.	**Ejemplo:** Tenemos π y su inverso es $\frac{1}{\pi}$. entonces $\pi*\frac{1}{\pi}=1$

Así mismo el inverso aditivo de un número irracional, es un número racional.

Ejemplo: $-b+b=0,$ tenemos el $\sqrt{2}$ y su inverso es $-\sqrt{2}$ ahora sumamos $\sqrt{2}+(-\sqrt{2})=0$

Como también el inverso multiplicativo de un irracional, es un número racional.

Ejemplo: $b*\frac{1}{b}=1$, tenemos el $\sqrt{3}$ y su inverso es $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ahora multiplicamos $\sqrt{3}*\frac{1}{\sqrt{3}}=1$

3. Racionalización

Es el proceso mediante el cual expresiones que tienen denominador irracional, transforman su denominador en racional. Se tiene dos casos de racionalización:

Cuando el denominador es un monomio.	$\frac{a}{b\sqrt{c}}$	$\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5}{\sqrt{3}}*\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$ $\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{1+\sqrt{7}}{\sqrt{7}}*\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}(1+\sqrt{7})}{\sqrt{7}*\sqrt{7}}=\frac{\sqrt{7}+7}{7}$
	$\frac{a}{b\sqrt[n]{c^m}}$	$\frac{5}{\sqrt[5]{2^3}}=\frac{5}{\sqrt[5]{2^3}}*\frac{\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^2}}=\frac{5\sqrt[5]{2^2}}{\sqrt[5]{2^5}}=\frac{5\sqrt[5]{4}}{2}$
Cuando el denominador es un binomio.	$\frac{a}{\sqrt{b}\pm\sqrt{c}}$ ó $\frac{a}{b\pm\sqrt{c}}$	$\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{3}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}*\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{3(\sqrt{7}-\sqrt{5})}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})(\sqrt{7}-\sqrt{5})}$ $=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{7-5}=\frac{3\sqrt{7}-3\sqrt{5}}{2}$

Actividad 7. Racionalizamos los siguientes ejercicios en el cuaderno:

1) $\frac{6}{\sqrt{5}}=$ 2) $\frac{8}{4\sqrt{3}}=$ 3) $\frac{\sqrt{8}}{2\sqrt{2}}=$ 4) $\frac{9}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$ 5) $\frac{5}{\sqrt[3]{2^5}}=$ 6) $\frac{1}{5\sqrt{2}}=$ 7) $\frac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=$ 8) $\frac{3-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}=$

4. Números reales y su relación de orden

En el conjunto de los números reales existe un orden que queda constatado al representarlos gráficamente en la recta numérica.

Ejemplo:

Donde $a \leq b$

5. Propiedades de los números reales

PROPIEDAD	EJEMPLO
Tricotomía de números R $a < b$ ó $a > b$ ó $a=b$	$2 < 3$; $9 > 4$; $5=5$
Transitiva Si $a > b$ y $b > c$ <=> $a > c$	$9 > 4$ y $4 > 0$ <=> $9 > 0$
Respecto a la adición $a < b$ <=> $a+c < b+c$	$2 < 7$ <=> $2+3 < 7+3$ $5 < 10$
Respecto a la multiplicación $a < b$ con $c > 0$ entonces $ac < bc$	$8 < 11$ con $3 > 0$ entonces $(8)(3) < (11)(3)$ $24 < 33$

6. Operaciones con los números reales

Propiedades de la adición de números reales.

PROPIEDAD	EJEMPLO
1.- Interna: resultado de sumar dos números reales es otro número real. $\boldsymbol{a + b \in R}$	$3\pi + 4 = 13.424777996...$
2.- Asociativa: el modo de agrupar los sumandos no varía el resultado. $\boldsymbol{(a + b) + c = a + (b + c)}$	$(2+1)+\frac{4}{5} = 2+(1+\frac{4}{5})$ $3+\frac{4}{5} = 2+\frac{9}{5}$ $\frac{19}{5} = \frac{19}{5}$
3.- Conmutativa: el orden de los sumandos no varía la suma. $\boldsymbol{a + b = b + a}$	$\sqrt[3]{5} + 3{,}5 = 3{,}5 + \sqrt[3]{5}$ $5{,}20997 = 5{,}20997$
4.- Elemento neutro: el 0 es el elemento neutro de la suma porque todo número sumado con él da el mismo número. $\boldsymbol{a + 0 = a}$	$e + 0 = e$
5.- Elemento opuesto: dos números son opuestos si al sumarlos obtenemos como resultado el cero. $\boldsymbol{e - e = 0}$ El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número. $\boldsymbol{-(-\varphi) = \varphi}$	$\frac{2}{3} - \frac{2}{3} = 0$ $-(-\sqrt{7}) = \sqrt{7}$

Actividad 8. Resolvemos las siguientes sumas aplicando las propiedades estudiadas, en el cuaderno de ejercicios:

1) $\pi - \pi =$ **2)** $(3+2{,}5)+\frac{8}{9} = 3+\left(2{,}5+\frac{8}{9}\right)$ **3)** $-(-0.333\ldots) =$ **4)** $\sqrt[5]{7}+2 = 2+\sqrt[5]{7}$ **5)** $\frac{11}{935}+0 =$

Propiedades de la multiplicación de los números reales

PROPIEDAD	EJEMPLO
1.- Interna: resultado de multiplicar dos números reales. ***a*b* ε *R***	*(π·10) = 31.4159265359…*
2.- Asociativa: el modo de agrupar los factores no varía el resultado. Si a, b y c son números reales cualesquiera, se cumple que: ***(a *b)*c=a*(b * c)***	$(7*8)*\frac{3}{5}=7*(8*\frac{3}{5})$ $(56)*\frac{3}{5}=7*(\frac{24}{5})$ $\frac{168}{5}=\frac{168}{5}$
3.- Conmutativa: el orden de los factores no varía el producto. $a*b=b*a$	$\sqrt{11}*\frac{1}{2}=\frac{1}{2}*\sqrt{11}$ $\frac{\sqrt{11}}{2}=\frac{\sqrt{11}}{2}$
4.- Elemento neutro: el 1 es el elemento neutro de la multiplicación porque todo número multiplicado por él da el mismo número. $a*1=a$	$e*1=e$
5.- Elemento inverso: un número es inverso del otro si al multiplicarlos obtenemos como resultado el elemento unidad. $a*\frac{1}{a}=1$	$\pi*\frac{1}{\pi}=1$
6.- Distributiva: el producto de un número por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada uno de los sumandos. $a*(b+c)=a*b+a*c$	$\sqrt{19}*\left(\frac{1}{2}+3\right)=(\sqrt{19}*\frac{1}{2})+(\sqrt{19}*3)$ $\sqrt{19}*\left(\frac{7}{2}\right)=\frac{\sqrt{19}}{2}+3\sqrt{19}$ $\frac{7\sqrt{19}}{2}=\frac{7\sqrt{19}}{2}$

Actividad 9. Resolvemos los siguientes ejercicios aplicando las propiedades de la multiplicación e indicamos la propiedad aplicada, en el cuaderno de ejercicios:

1) $\sqrt{5}*\frac{1}{5}=\frac{1}{5}*\sqrt{5}$ **2)** $e*\frac{1}{e}=1$ **3)** $\frac{1}{3}*\left(\sqrt{7}+8\right)=$ **4)** $\left(3*\sqrt{2}\right)*\frac{7}{11}=3*\left(\sqrt{2}*\frac{7}{11}\right)$ **5)** $1*\frac{33}{85}$

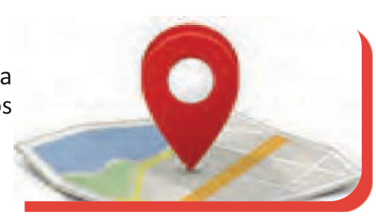
7. Números trascendentes

Los números transcendentes no pueden representarse mediante un número finito de raíces libres o anidadas; provienen de las llamadas funciones trascendentes: trigonométricas, logarítmicas y exponenciales. Como ejemplos más representativos de este conjunto numérico tenemos al número **π** y al número ***e*** .

8. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

a) Número Pi (π)

GPS: Calcular el número Pi con una alta precisión, es necesario, para que la tecnología moderna como el GPS funcione en la ubicación de aviones y barcos, debido a que los mismos recorren el arco de un círculo en viajes de larga distancia.



b) Número de Euler (e)

Crecimiento exponencial: para este tipo de crecimiento se aplica la siguiente fórmula:

$$N = No \cdot e^t$$

Esto nos permite precisar cual será la población "N" en un tiempo "t" a partir de la población inicial "No"

c) Número de Oro (φ)

En la naturaleza y el arte: existen diversos patrones y proporciones que son visibles que sin darnos cuenta, están presentes en el medio ambiente. El número de oro equivale a 1,618034...

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Escanea el QR

Observemos el siguiente video sobre la aplicabilidad del número pi y el número de Euler.

Actividad 10. Analizando reflexivamente el contenido de los números irracionales y reales, respondemos las siguientes preguntas y realizamos las actividades mencionadas:

- ¿Crees qué sin la utilización de números irracionales y reales podemos aplicar o desarrollar nuevas tecnologías? Fundamenta tu respuesta.
- Describimos ¿Qué número irracional te llamo más la atención? ¿Por qué?
- En tu casa o comunidad educativa identifica y menciona alguna aplicación de los números irracionales.
- ¿Cuál es la aplicación del conjunto de los números irracionales y reales?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 11. Realizamos las siguientes actividades:

- Dibuja o recorta en tu cuaderno imágenes de la naturaleza donde se encuentre el número de Oro (φ).
- Investigamos otras aplicaciones del número "e" y los números trascendentes para socializar con los compañeros del curso.

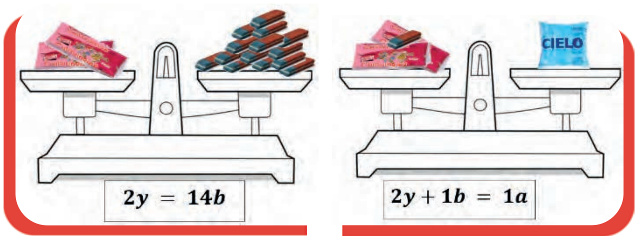
EL ÁLGEBRA Y SU RELACIÓN CON LAS ACTIVIDADES DE LA VIDA COTIDIANA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 12. En la clase de matemática reunimos los siguientes materiales:

Objeto	Cantidad	Valor en unidades
	30 borradores = ($30b$)	$1b = 1u$
	13 bolsas de yogurt = ($13y$)	$1y = 7u$
	3 bolsas de agua = ($3a$)	$1a = 15u$

Ubicamos nuestros objetos sobre la balanza buscando diferentes valores e igualdades, que lo registraremos en nuestros cuadernos.



¿Qué igualdades, más puedes encontrar?

Escribe en tu cuaderno, todas las opciones posibles.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Nociones básicas de álgebra

El álgebra es una rama de la matemática que emplea números, letras y signos para hacer referencia a las distintas operaciones aritméticas que se realizan. En la actualidad el álgebra como recurso matemático se usa en las relaciones de estructuras y cantidad. El álgebra elemental es el más común ya que emplea operaciones aritméticas como la suma, resta, multiplicación y división ya que a diferencia de la aritmética, ésta se vale de símbolos como "x", "y" siendo los más comunes en lugar de usar números.

2. Expresiones algebraicas y la modelización

Ante los problemas que se presentan en la vida cotidiana, es importante plantear un modelo matemático correcto para buscar una solución al mismo, para lo cual podemos seguir los siguientes pasos:

1. Se observa el problema.
2. Una vez hecho un análisis e investigación pasamos a la formulación del problema (definir las variables).
3. Se plantea el modelo matemático con expresiones algebraicas.
4. Se busca el algoritmo correcto para solucionar el modelo matemático.
5. Finalmente, la interpretación de los resultados obtenidos debe ser lógicos y coherentes.

Para construir modelos matemáticos con base a expresiones algebraicas es importante traducir correctamente el lenguaje común al lenguaje algebraico, para ello tenemos algunos ejemplos:

Lenguaje común	Lenguaje algebraico
Un número par cualquiera	$2x$
Un número cualquiera aumentado en siete	$x+7$
La diferencia de dos números cualesquiera	$x-y$
El doble de un número excedido en cinco	$2x+5$
La división de un número entero entre su antecesor	$\frac{x}{x-1}$
La mitad de un número	$\frac{x}{2}$
El cuadrado de un número	x^2
La semisuma de dos números	$\frac{x+y}{2}$

Ejemplo 1:

Problema	Verónica guarda Bs 30 en su billetera, para sumar una cuarta parte del dinero que ya tiene. ¿Cuánto dinero hay en la billetera?
Análisis e investigación	Si x es el dinero que tiene en la billetera Bs 30 es la cuarta parte de lo que tiene.
Modelo matemático	$30 = \frac{x}{4}$
Algoritmo de solución	$x = 30*4$ $x = 120$
Interpretación	La cantidad total es Bs 30 + Bs 120 = Bs 150, es el total que ahora tiene en su billetera.

Ejemplo 2:

<table>
<tr><td>Problema</td><td colspan="3">Se tiene tres peceras y 56 peces. El tamaño de las peceras es pequeño, mediano y grande, siendo la mediana el doble del pequeño y la grande el doble del mediano. Como no se tiene ninguna preferencia en cuanto al reparto de los peces, se decidió que en cada pecera haya la cantidad proporcional al tamaño de cada pecera. ¿Cuántos peces habrá en cada pecera?</td></tr>
<tr><td>Análisis e investigación</td><td colspan="3">$\frac{x}{2}$ es la cantidad de peces que estarán en la pecera pequeña.

x es la cantidad de peces que estarán en la pecera mediana.

$2x$ los peces que estarán en la grande.</td></tr>
<tr><td>Modelo matemático</td><td colspan="3">$x + \frac{x}{2} + 2x = 56$</td></tr>
<tr><td>Algoritmo de solución</td><td>$3x + \frac{x}{2} = 56$

$\frac{6x + x}{2} = 56$

$\frac{7x}{2} = 56$</td><td>$7x = 56 * 2$

$7x = 112$

$x = \frac{112}{7}$

$\boldsymbol{x = 16}$</td><td>Entonces:

$\frac{x}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$2(16) = 32$</td></tr>
<tr><td>Interpretación</td><td colspan="3">En la pecera pequeña estarán 8 peces.
En la mediana 16 peces.
En la grande 32 peces.</td></tr>
</table>

Actividad 13. En nuestros cuadernos realizamos los siguientes ejercicios:

<table>
<tr><td>a) Expresemos las siguientes oraciones en lenguaje algebraico.

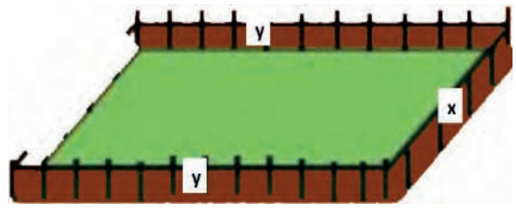
1) Luis tiene Bs 15 más que Karen.
2) Un número que es la cuarta parte de otro número.
3) Dos múltiplos de tres números consecutivos.
4) El 35% de un número cualquiera.
5) La diferencia del costo de un objeto que cuesta Bs A y se vende por Bs B.
6) El valor de un lápiz, si 15 lápices cuestan Bs A.
7) La edad de José es nueve veces la de Ramiro.
8) Un número que representa 16 unidades menos que otro.
9) Un número que es tres veces mayor que el número “n”.
10) La suma de un número más su quinta parte.</td><td>b) Expresamos los siguientes términos algebraicos en lenguaje común.

1) xy 6) $xy - 2(x - y)$
2) $2x + y$ 7) $x(x + 1)$
3) $m - 3n$ 8) $\sqrt{a^2 + b^2}$
4) $\frac{x-y}{2}$ 9) $c^2 = a^2 + b^2$
5) $\frac{x}{4} - 3$ 10) $x - \frac{x}{2} + 2x$</td></tr>
</table>

Para expresar y analizar eventos un tanto más complejo utilizamos un proceso de cuatro pasos denominado modelo matemático.

Modelación matemática: este proceso trata de traducir a través de expresiones matemáticas los fenómenos y problemas cotidianos. Comprende cuatro etapas, detectar el problema de la vida real, formular el modelo matemático, obtener las conclusiones a partir de la resolución del modelo planteado e interpretar las predicciones realizadas y por último validar lo obtenido. Sin embargo, solo nos centraremos en las dos primeras etapas enfocándonos en la representación del problema o evento del cotidiano vivir, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Tenemos que amurallar un terreno rectangular solo en tres de sus cuatro lados. Si el área del terreno es de 180m², representamos a través de una expresión la longitud del muro en relación al lado no amurallado.



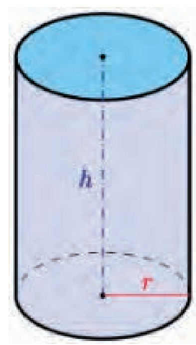
Solución: como el terreno es rectangular los lados son; "x" y "y"

Por lo tanto: la longitud de los muros es $= x + 2y$

Ejemplo 2. En un estacionamiento del centro de nuestra ciudad se cobra Bs 10 la primera hora, posteriormente Bs 5 por cada hora adicional. Representamos a través de una expresión algebraica la cuota de estacionamiento en relación al número de horas estacionadas.

Solución: "x" representa número de horas.

Hora adicional $5(x\text{-}1)$ Por lo tanto: Cuota de estacionamiento $= 10 + 5(x\text{-}1)$

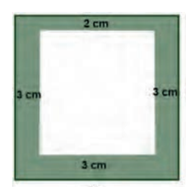


Actividad 14. Para fortalecer la capacidad de abstracción matemática que desarrollamos, resolvamos los siguientes problemas propuestos:

1) Debemos construir un recipiente cilíndrico sin tapa con un volumen de 68 π centímetros cúbicos. El costo del material usado para la base es el triple que el del material usado para la parte lateral curva. Representamos el costo del recipiente en función del radio de la base de dicho cilindro.

2) Calculamos el área máxima que puede tener un triángulo rectángulo tal que la suma de la longitud de sus dos catetos es equivalente a 12 cm.

3) Las páginas de un libro deben medir cada una 600 cm² de área. Sus márgenes laterales y el inferior miden 3 cm. y el superior mide 2 cm. Calculamos las dimensiones de la página que nos permitan obtener la mayor área de impresión posible.



4) Debemos construir un depósito abierto similar a un prisma de base cuadrada con capacidad para 22,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcular las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea el menor posible.

5) A partir de una cartulina cuadrada de 60 cm de lado se va a construir una caja de base cuadrada, sin tapa, a base de recortar cuatro cuadrados iguales en las esquinas de la cartulina y doblando después de la manera adecuada. Un observador indica que la caja de más capacidad se obtendrá si los cuadrados eliminados tienen 10 cm. de lado. Decidir si la observación es correcta o no. (PAU, JUN 2001).

3. Estudio de variables y constantes

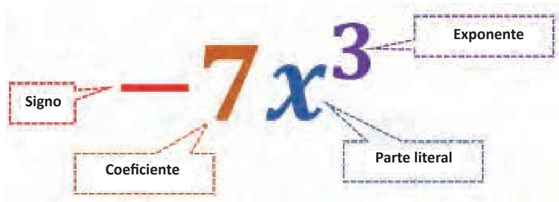
Las variables, llamadas también incógnitas están representadas por letras, los cuales pueden tener diferentes valores.
Las constantes son números los cuales tienen un valor específico.

Ejemplo: 1

Sean $4a,\ -7x,\ \pi,\ \sqrt{7},\ 0.5\,n,\ \frac{3}{7}m - \frac{m}{n}$

Donde 4, -7, π, 0.5, $\sqrt{7}$, $\frac{3}{7}$ son constantes y a, x, m, n son variables

4. Término algebraico



Por lo general el 1 no se anota cuando es coeficiente o exponente, tampoco el signo (+) cuando esta al inicio de una expresión algebraica, $m5 + 6n - mn$

Ejemplo 1.

Término	Signo	Coeficiente	Parte literal (base/s)	Exponente/s
$6x^2$	+	6	x	2
$-\frac{2}{3}ab^x$	-	$\frac{2}{3}$	a,b	$1,x$
$-\frac{1}{5}m^{a-1}$	-	$\frac{1}{5}$	m	a-1

Actividad 15. Completamos la tabla en el cuaderno de ejercicios separando los elementos de un término o lo construimos según corresponda:

Término	Signo	Coeficiente	Parte literal (base/s)	Exponente/s
$-12a^6$			a	6
$\frac{1}{7}x^a y$				
$-\frac{3}{4}m^2n^3$	-			2,3
	+	15	a	x+1
$2(x-y)^{2m}$				
$-\frac{7}{9}m^{3x}$	-			$3x$

5. Términos semejantes, reducción y su aplicación

Cuando hablamos de semejantes, nos referimos a objetos, eventos o personas, que tienen características en común, por ejemplo, el uniforme de los estudiantes que identifiquen a su unidad educativa.

Dos o más términos son semejantes cuando tienen la misma base y el mismo exponente.

Ejemplo:

a) $3x, -8x, x$ son semejantes

b) $-\frac{2}{7}x^{2n}y^5z^{-4}, 3x^{2n}y^5z^{-4}$ son semejantes

c) $-7a^4b, -7ab^4$ NO son semejantes

Reducción de términos semejantes

Para reducir o simplificar expresiones algebráicas que contengan términos semejantes, debemos sumar o restar sus coeficientes aplicando la ley de signos y copiamos la parte literal.

Ejemplo 1. Reducir la siguiente expresión $-4ab^3 + 6ab^3 - ab^3$.

$$-4ab^3 + 6ab^3 - ab^3 = (-4 + 6 - 1)ab^3 = \boldsymbol{ab^3}$$

Ejemplo 2. Reducir $0{,}4m^2n^3 + 2m^2n - \frac{5}{3}m^2n^3 - 0{,}8m^2n + 5m^2n^3$

$$\begin{aligned} 0{,}4m^2n^3 + 2m^2n - \tfrac{5}{3}m^2n^3 - 0{,}8m^2n + 5m^2n^3 &= \tfrac{2}{5}m^2n^3 + 2m^2n - \tfrac{5}{3}m^2n^3 - \tfrac{4}{5}m^2n + 5m^2n^3 \\ &= \left(\tfrac{2}{5} - \tfrac{5}{3} + 5\right)m^2n^3 + \left(2 - \tfrac{4}{5}\right)m^2n \\ &= \left(\tfrac{6-25+75}{15}\right)m^2n^3 + \left(\tfrac{10-4}{5}\right)m^2n \\ &= \boldsymbol{\tfrac{56}{15}m^2n^3 + \tfrac{6}{5}m^2n} \end{aligned}$$

Ejemplo 3. $9x - 3y + z - 3 + 12y - 8x - 2z + 1 - 8y - x$

Agrupamos los términos semejantes

$$\begin{aligned} 9x - 3y + z - 3 + 12y - 8x - 2z + 1 - 8y - x &= (9 - 8 - 1)x + (-3 + 12 - 8)y + (1 - 2)z - 3 + 1 \\ &= 0x + (1)y + (-1)z - 2 \\ &= \boldsymbol{y - z - 2} \end{aligned}$$

Actividad 16.

En nuestros cuadernos simplificamos los siguientes ejercicios propuestos:

1) $3x - 5x$	7) $\frac{2}{3}y^3z - \frac{1}{3}y^3z - \frac{5}{3}y^3z$
2) $8m^3n + 9m^3n$	8) $-x^{2a}y^b + 5x^2y^a + 7x^{2a}y^b - 2x^2y^a$
3) $-14xy^4 - 3xy^4 - xy^4$	9) $0{,}25x + \frac{1}{7}y + z - \frac{3}{5}x - \frac{22}{7}y$
4) $6x^2y^3z - 6x^2y^3z$	10) $0{,}5m^{x-1} + 0{,}2n^{x-2} + 0{,}8m^{x-1} - n^{x-2} - \frac{1}{5}mn$
5) $12ab - 3ab + 4ab - 9ab$	
6) $-x + y + x + y$	

6. Clasificación de expresiones algebraicas y su notación

Las expresiones algebraicas se clasifican por el número de términos que la componen.

Expresión	Tipo	Descripción
$-12x^3y$	*Monomio*	Expresión algebraica que consta de un solo término.
$\frac{1}{2}a^2b + \sqrt[3]{5a^2bc}$	*Binomio*	Expresión algebraica que consta de dos términos.
$-x + \frac{3}{2}x^7y + 9$	*Trinomio*	Expresión algebraica que consta de tres términos.
$3a^3 - 7ab + b^3c - 8c + 3$	*Polinomio*	Cuando la expresión algebraica consta de dos o más términos.

7. Grado relativo y absoluto de un monomio y un polinomio

a) Grado de un monomio

– Grado absoluto (G.A.). El grado absoluto de un monomio se determina por la suma de todos los exponentes de sus variables (bases).
– Grado relativo (G.R.). Es el grado con respecto a cada exponente de las variables.

Ejemplo 1. Determinamos los grados del siguiente monomio: $-6x^3y^5z^7$ tenemos entonces:

$$G.A. = 3 + 5 + 7 = 15; \text{ el monomio es de grado absoluto 15}$$

$$G.R. = \begin{cases} GR_x = 3 \text{ con respecto a } x \\ GR_y = 5 \text{ con respecto a } y \\ GR_z = 7 \text{ con respecto a } z \end{cases}$$

Actividad 17. Completa el siguiente cuadro, en el cuaderno de ejercicios:

Monomio	G. A.	GR_x	GR_y	GR_z
x^6yz^3				
$-\frac{1}{5}x^9y^3z^{11}$				
$-xy^8z^5$				
$2x^4z^7$				
$3x^{19}y^{13}z^{17}$				

b) Grado de un polinomio

– Grado absoluto de un polinomio (G.A.P.). El grado absoluto de un polinomio está determinado por el término que tiene mayor grado absoluto.

– Grado relativo de un polinomio (G.R.P.). Este grado está determinado por el término cuya variable (base) contiene al mayor exponente.

Ejemplo 1. Determinar los grados del siguiente polinomio P.

$$P(x;y;z) = \frac{2}{3}x^6y^2z^7 + 5x^5y^4z^3 + 0{,}4x^7y^3z^8$$

Solución: como no podemos especificar el grado, debemos realizar el análisis del absoluto y el relativo.

$$G.A.P. = \begin{cases} G.A.\ de\ \frac{2}{3}x^6y^2z^7\ \ es\ \ 6+2+7 = 15 \\ G.A.\ de\ \ 5x^5y^4z^3\ \ es\ \ 5+4+3 = 12 \\ G.A.\ de\ \ 0{,}4x^7y^3z^8\ \ es\ \ 7+3+8 = 18 \end{cases}$$

Por lo tanto: el *G.A.P.*= 18

Para el grado relativo, debemos tomar el mayor exponente de cada variable (base).

$$G.R.P. = \begin{cases} GR_x = 7\ con\ respecto\ a\ x \\ GR_y = 4\ con\ respecto\ a\ y \\ GR_z = 8\ con\ respecto\ a\ z \end{cases}$$

Por tanto: el G.R.P. es con respecto a z, porque tiene el mayor exponente.

Actividad 18. Completa el siguiente en el cuaderno de ejercicios:

Monomio	G.A.	GR_x	GR_y	GR_z
$3x^2yz^3 + x^9y^3z^7$				
$-xyz^8 + x^3y^6z^{11} - \frac{9}{32}x^2y^3z^5$				
$x^{12}y^7z^2 + xy^8z^5 - xy^8z^5$				
$x^{27}y^{19} - x^{31}y^{40} + x^{15}y^{15}$				
$x^6y^2z^2 + xy^5z^9 - x^{14}y^{13}z^7$				

8. Valor numérico

El valor numérico de una expresión algebraica es el número que resulta de sustituir las variables de dicha expresión por valores numéricos y realizar las operaciones indicadas. Una misma expresión algebraica puede tener muchos valores numéricos diferentes, en función del número que se asigne a cada una de las variables de la misma.

Ejemplo 1: Hallamos el valor numérico del siguiente monomio.

$$P(a,b,c) = \frac{5a+6b^3}{9c} \qquad \text{con} \quad a = 3\,; \; b = -2 \; y \; c = 5$$

Reemplazando los valores dados, tenemos lo siguiente:

$$P(3,-2,5) = \frac{5(3)+6(-2)^3}{9(5)} = \frac{15-48}{45} = \frac{-33}{45} = -\mathbf{\frac{11}{15}}$$

Ejemplo 2: Hallamos el valor numérico del siguiente polinomio.

$$Q(x,y) = \frac{x^3}{2} - \frac{5xy^2}{3} + \frac{y}{2x}; \; \text{con} \; x = 2, \qquad y = \frac{1}{2}$$

Reemplazando los valores dados, tenemos lo siguiente:

$$Q\left(2,\frac{1}{2}\right) = \frac{(2)^3}{2} - \frac{5(2)\left(\frac{1}{2}\right)^2}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{2(2)} = \frac{(8)}{2} - \frac{10\left(\frac{1}{4}\right)}{3} + \frac{\frac{1}{2}}{4} = \frac{8}{2} - \frac{\frac{10}{4}}{3} + \frac{1}{8} = 4 - \frac{5}{6} + \frac{1}{8} = \frac{96-20+3}{24} = \frac{79}{24}$$

Actividad 19. Calculamos el valor numérico de las siguientes expresiones algebraicas.

Si $a = 2;\; b = 5;\; c = -3; d = -1; f = \frac{1}{2}$

1) $6ab =$ **2)** $-adf =$ **3)** $3bc^3 - \frac{4}{9}c^3f =$ **4)** $2a^2 - 3bc - 7d =$ **5)** $4ab + 3\,bc - 15d =$

6) $\frac{3}{4}a^3f =$ **7)** $a^2 - \frac{7}{4}b - 3c^2 - \frac{2}{5}d^5 =$ **8)** $-4(a-b) + 2(d-f) =$ **9)** $\frac{c}{6} + \frac{b}{4} - \frac{a}{5} =$ **10)** $(c+f)^3 =$

9. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Como observamos a lo largo del texto, las matemáticas son utilizadas como un lenguaje representativo de los acontecimientos en nuestro entorno. Analicemos los siguientes ejemplos de aplicación de lo aprendido:

Ejemplo. Se cuenta solo con una cinta métrica de *5m (1u=5m)*, con el cual se mide un terreno rectangular, cuyo largo es *7u-9m* y el ancho *5u+2m* ¿Cuál es el área de dicho terreno?

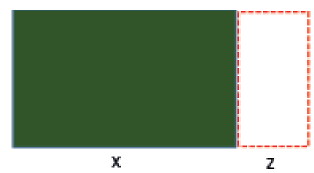
Solución: Para determinar el área, debemos multiplicar las expresiones y reducir términos semejantes.

Reemplazando $\boldsymbol{u} = \mathbf{5}\boldsymbol{m}$ Largo: $7u - 9m = 7(5m) - 9m = 35m - 9m = 26m$ Ancho: $3u + 2m = 3(5m) + 2m = 15m + 2m = 17m$	**Solución:** $A = (26m)(17m) = 442m^2$ área del terreno

Actividad 20. En nuestro cuaderno resolvemos los siguientes ejercicios, posteriormente compartimos los resultados con los compañeros.

1. Calcular el valor del polinomio $E = P(-3)$; Sabiendo que: $P(x) = 4x^3 + 6x^2 + 2x - 9$
2. Calcular el valor del polinomio $N = M(-1)$; Sí $M(x) = x^2 - 2x + 1$

Resolver los siguientes problemas:



3. El jardín de legumbres de María mide $x=30m$ por $y=10m$, de modo que su área es de $x \cdot y=300\ m^2$. Ella decide agrandarlo, como se ve en la figura, para que el área aumente a A = y(x+z) ¿Cuál será área después de aumentar z?

4. Un automóvil recorre una distancia d=480 km a una velocidad constante $v = 80\ km/h$, es decir no acelera ni desacelera, si la fórmula para calcular es $t=d/v$. ¿Cuál es el tiempo?

5. Se debe calcular la distancia entre dos coordenadas cartesianas P_1 (2; 3) y P_2 (5;7) , por ello, se recurre a calcular dicha distancia través de la fórmula de distancia entre dos puntos.

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

¡Realicemos la valoración!

Fórmula de velocidad	Fórmula de interés simple	Regla de tres simple
$\boldsymbol{Velocidad} = \dfrac{\boldsymbol{desplazamiento}}{\boldsymbol{tiempo}}$ $\vec{V} = \dfrac{\vec{d}}{t}$	$\boldsymbol{CF = C * \left(1 + \frac{n*i}{100}\right)}$ $CF = Capital\ Final$ $C = Capital\ Inicial$ $n = Periodo$ $i = interés$	$\boldsymbol{x} = \dfrac{b * c}{a} \Rightarrow \begin{cases} a \to b \\ c \to x \end{cases}$

Las fórmulas que se observan son algunas de las más utilizadas en nuestro diario vivir, los datos se van reemplazando con los que conocemos y otros que los encontramos realizando las operaciones correspondientes.

Ejemplo: cuando alguien está conduciendo un automóvil se aplica la primera fórmula para calcular el tiempo y distancia de acuerdo a la velocidad con la que se transita.

El segundo ejemplo cuando nos prestamos dinero con interés de algún familiar, amigo o el banco. Debemos calcular el monto a devolver.

Y la tercera regla de 3 simple es aplicado a datos proporcionales, cuando conocemos tres datos y desconocemos del cuarto. Aplicando la formula, obtendremos el dato que falta.

Reflexivamente respondemos las siguientes preguntas:
¿Qué otras aplicaciones del algebra se aplican en nuestro contexto? menciona 5 ejemplos.
¿Cómo aplicamos el lenguaje algebraico en nuestra cotidianidad?
¿Cómo aportó el algebra en el desarrollo de la ciencia y tecnología?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 21. De acuerdo a las fórmulas observadas anteriormente resolvemos los siguientes problemas:

1) Si José corre a una velocidad de *35 m/min* ¿Cuál es la distancia de su casa a su colegio si demora *9 min*?
2) María le presta a su amiga *Bs 5000* con un interés del *20% anual* ¿Cuánto debe cancelar en total su amiga en *2 años*?
3) Si acomodamos a *2* estudiantes por pupitre y en el aula se tiene *16 pupitres* ¿Cuántos estudiantes pueden ingresar?

OPERACIONES CON EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Los comerciantes de un mercado se encuentran vendiendo sus productos en las calles, ofreciendo, ropa, frutas, verduras, juguetes, zapatos, etc.

Debido al comercio los vecinos del lugar hicieron aprobar la construcción de un mercado donde deben instalarse lo comerciantes.

Actividad 22. Analicemos lo sucedido y respondemos las siguientes preguntas, en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Los comerciantes deben ingresar como les guste y al puesto de su preferencia?
2. ¿Cómo deberían organizarse los representantes de los comerciantes?
3. ¿Cómo aplicamos nuestros conocimientos algebráicos para esta distribución?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Operaciones con expresiones algebraicas

1.1. Adición y sustracción

Adición y sustracción de monomios: Se suman o restan los coeficientes y se copia la o las mismas letras y exponentes.

Ejemplo 1. Sumamos los siguientes monomios

a) $3x; -2x, -8x$

Solución: $3x + (-2x) + (-8x) = 3x - 2x - 8x = (3 - 2 - 8)x = -7x$

b) $-5x^2yz^5; \frac{2}{3}x^2yz^5; -x^2yz^5$

Solución: $\left(-5 + \frac{2}{3} - 1\right)x^2yz^5 = \left(-6 + \frac{2}{3}\right)x^2yz^5 = \left(\frac{-18+2}{3}\right)x^2yz^5 = -\frac{16}{3}x^2yz^5$

Actividad 23. En nuestro cuaderno realizamos las siguientes sumas de monomios

1) $-m; 2m; -3m$	4) $x^{a-1}; -3x^{a-1}; 10x^{a-1}$	7) $3ab; -\frac{7}{3}ab; -\frac{5}{6}ab; ab$
2) $\frac{1}{2}ab; -\frac{3}{2}ab; -ab$	5) $3mn^{\frac{1}{2}(a-b)}; -9mn^{\frac{1}{2}(a-b)}; mn^{\frac{1}{2}(a-b)}$	8) $2z^{2a^{2a}}; -5z^{2a^{2a}}; 7z^{2a^{2a}}; -2z^{2a^{2a}}$
3) $10\frac{x^2}{y}; 2\frac{x^2}{y}; -12\frac{x^2}{y}$	6) $0{,}75m; -0{,}25m$	9) $x^{y^a+a}; -5x^{y^a+a}; \frac{1}{5}x^{y^a+a}$
		10) $2n^{\sqrt{x+y}}; -7n^{\sqrt{x+y}}; 5n^{\sqrt{x+y}}$

Adición y sustracción de polinomios: Seleccionamos los términos semejantes y aplicamos la suma y resta de monomios en cada grupo.

Ejemplo1: Sumamos los siguientes polinomios: $7x^2 - 4x^3 + 3x - 6; -2x^2 + 3x^3 + 2; 3x^2 + x^3 - 2x + 4$

Solución: $7x^2 - 4x^3 + 3x - 6 - 2x^2 + 3x^3 + 2 + 3x^2 + x^3 - 2x + 4 = 8x^2 + x$

Procedimiento: $7x^2 - 2x^2 + 3x^2 = (7 - 2 + 3)x^2 = 8x^2$

$$-4x^3 + 3x^3 + x^3 = (-4 + 3 + 1)x^3 = 0$$

$$3x - 2x = (3 - 2)x = x$$

$$-6 + 2 + 4 = 0$$

Ejemplo 2: $\left(\frac{1}{3}x^{m-2} - \frac{5}{6}y^{n-2} - \frac{1}{9}\right) + \left(\frac{1}{2}x^{m-2} + \frac{1}{4}y^{n-2} + \frac{1}{3}\right)$

Solución: $\frac{1}{3}x^{m-2} - \frac{5}{6}y^{n-2} - \frac{1}{9} + \frac{1}{2}x^{m-2} + \frac{1}{4}y^{n-2} + \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{5}{6}x^{m-2} - \frac{7}{12}y^{n-2} + \frac{2}{9}}$

Procedimiento: $\frac{1}{3}x^{m-2} + \frac{1}{2}x^{m-2} = \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right)x^{m-2} = \boldsymbol{\frac{5}{6}x^{m-2}}$

$$-\frac{5}{6}y^{n-2} + \frac{1}{4}y^{n-2} = \left(-\frac{5}{6} + \frac{1}{4}\right)y^{n-2} = -\boldsymbol{\frac{7}{12}y^{n-2}}$$

$$-\frac{1}{9} + \frac{1}{3} = \frac{-1 + 3}{9} = \boldsymbol{\frac{2}{9}}$$

Actividad 24. En nuestros cuadernos resolvemos los siguientes ejercicios propuestos:

1) Sumar $5x - y + z; 13x + 4y - 6z$

2) Sumar los poligonos $-10a - 6b + 9; 7a + 4b - 3$

3) Efectuar $(a^3 - 15a^2 + 4a) + (6a^3 + 3a^2 - 6a + 2)$

4) $5m^4 - n^4;\ 6m^3n - m^2n^2 + mn^3;\ -5m^4 - 8m^3n + 2m^2n^2; -5mn^3 + 11n^4$

5) Sumar $\frac{5}{3}x^3 - 7xy + \frac{3}{2}y^2;\ -\frac{1}{5}x^3 + \frac{7}{2}xy - \frac{1}{6}y^2;\ -5x^3 + \frac{5}{3}xy + \frac{3}{5}y^2$

6) $\left(\frac{3}{4}m^2 + \frac{1}{6}n^2 - \frac{9}{8}mn\right) + \left(-\frac{3}{2}m^2 + \frac{1}{3}n^2 - \frac{7}{4}mn\right) + \left(-3m^2 + \frac{1}{2}mn - 4n^2\right)$

7) $\left(\frac{3}{5}x^3 - \frac{1}{5}x^2 - 5x + \frac{2}{5}\right) + \left(\frac{1}{2}x^3 + \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{3}x + 2\right)$

8) $4m^{3x} - 6m^{2x-1} + 4m^{2x-2}; m^{3x} + 5m^{2x-1} + m^{2x-2}; -5m^{3x} - 7m^{2x-1}$

9) $\frac{7}{5}a^{1-x} - \frac{3}{4}a^{1-2x} - a^{1-3x}; -\frac{1}{10}a^{1-x} + \frac{2}{3}a^{1-3x} + a^{1-2x}; \frac{5}{3}a^{1-x} + \frac{9}{2}a^{1-2x}$

10) Sumar $\frac{1}{8}y^{3x} - \frac{2}{3}y^x + y; -\frac{1}{2}y^{3x} + y^x - \frac{3}{5}y; -y^{3x} + 11y$

1.2. Multiplicación de expresiones algebraicas

Producto de bases iguales. En la multiplicación de bases iguales los exponentes se suman.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Producto de monomios: Primero se anota el signo correspondiente de acuerdo a la regla de signos, posteriormente se multiplican los coeficientes y en la parte literal se aplica la ley de bases iguales.

Ejemplo 1. Multiplicamos $-\frac{1}{2}m^2n^5; \frac{3}{5}m^2n^5; -2ab$

Solución: $\left(-\frac{1}{2}m^2n^5\right)\left(\frac{3}{5}m^2n^5\right)(-2ab) = \left(-\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}\times(-2)\right)m^{2+2}n^{5+5}ab = \frac{3}{5}x^5yz^7$

Ejemplo 2. Multiplicamos $(2x^{3m-2}y^{2m})(-7x^{2m-1}y^{3m})$

Solución: $(2x^{3m-2}y^{2m})(-7x^{2m-1}y^{3m}) = -14x^{3m-2+(2m-1)}y^{2m+3m} = \mathbf{-14x^{5m-3}y^{5m}}$

Actividad 25. Multiplicamos los siguientes monomios, en el cuaderno de ejercicios.

1) $(7x)(-4x)$	7) $(-mnp)(mnp)$	12) $(-2x^{2a-5}y^{4a+1})(-3x^{4a+1}y^{5a-7})$
2) $(5x^3y^3z)(7x^5y^6z)$	8) $\left(-\frac{4}{7}mn\right)\left(-\frac{3}{5}m^3np\right)$	13) $\left(-\frac{6}{7}a^{3x-2}b^{3x}c\right)\left(-\frac{3}{11}a^{x+1}bc^{x-1}\right)$
3) $(-8a^7c^4)(3a^2b^2c^3)$	9) $(0{,}4xyz)(0{,}75xyz)$	14) $\left(-\frac{1}{3}m^{2x-1}n^{4x}\right)(9m^{2+3x}n^{1-3x})$
4) $\left(\frac{2}{3}abc\right)\left(-\frac{3}{5}c^5\right)$	10) $(0{,}12x^6y^4)(0{,}5xy^2)$	15) $(5x^3y)(-3x^2y)(2x^6y^2)(-7y^3)$
5) $(-11m^5n)(-7m^3n^3)$	11) $(7a^{3x+4}b^{3x})(-5a^{x-3}b^3)$	
6) $(6a^5b^8c^2)\left(-\frac{1}{3}a^3b\right)$		

Producto de un polinomio por un monomio. Se debe multiplicar cada término del polinomio por el monomio o viceversa, como se muestra en los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Hallamos el producto de $(3x^4y^3 - 5x^3y^2z + 2xz^4)(-2x^5y)$

Solución: multiplicamos los términos del polinomio por el monomio.

$$= (3x^4y^3 - 5x^3y^2z + 2xz^4)(-2x^5y) = (3x^4y^3)(-2x^5y) + (-5x^3y^2z)(-2x^5y) + (2xz^4)(-2x^5y)$$
$$= -6x^9y^4 + 10x^8y^3z - 4x^5yz^4$$

Ejemplo 2. $\left(\dfrac{3}{2}x^{a-2} - \dfrac{5}{3}x^{a-3} + \dfrac{7}{4}x^{a-4}\right)\left(-\dfrac{3}{7}x^{a+2}\right)$

Solución: multiplicamos los términos del polinomio por el monomio.

$$\left(\frac{3}{2}x^{a-2} - \frac{5}{3}x^{a-3} + \frac{7}{4}x^{a-4}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right) = \left(\frac{3}{2}x^{a-2}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right) + \left(-\frac{5}{3}x^{a-3}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right) + \left(\frac{7}{4}x^{a-4}\right)\left(-\frac{3}{7}x^{a+2}\right)$$
$$= \left(\frac{3}{2}\left(-\frac{3}{7}\right)\right)x^{a-2+a+2} + \left(-\frac{5}{3}\left(-\frac{3}{7}\right)\right)x^{a-3+a+2} + \left(\frac{7}{4}\left(-\frac{3}{7}\right)\right)x^{a-4+a+2}$$
$$= -\frac{9}{14}x^{2a} + \frac{5}{7}x^{2a-1} - \frac{3}{4}x^{2a-2}$$

Actividad 26. En nuestros cuadernos resolvemos las siguientes multiplicaciones de polinomios:

1) $(-7x)(-3x - 2x)$	6) $(5x^3y^3)\left(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 3x^3y - 5y^{\frac{1}{3}}\right)$
2) $(x^3y^3z)\left(-\frac{1}{2}x^2y^2z^2 + 7x^5y^6z\right)$	7) $\left(\frac{1}{2}x^4y^3 - \frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{3}{2}x^2y^7\right)$
3) $\left(-\frac{1}{3}a^3c^2\right)\left(7a^6b^2c^3 - \frac{3}{5}a^4b^3c^7\right)$	8) $\left(\frac{4}{5}x^3y^2z\right)\left(\frac{15}{2}x^6yz^3 - \frac{9}{7}yz^3 + 4xy\right)$
4) $\left(\frac{5}{3}abc\right)\left(-2abc - \frac{3}{4}c^5\right)$	9) $(8ab)\left(\frac{8}{3}a^xb^{3y-1} + \frac{11}{2}a^{x-2}b^{3y-4}\right)$
5) $(15m^3n^3 - 11m^3n)(-m^3n^3)$	10) $\left(-\frac{2}{7}m^{6x}n^4\right)\left(\frac{5}{2}m^{2x+7}n^{4a} - \frac{2}{5}m^{3x+4}n^{3x-1} - \frac{1}{9}m^{5x}n\right)$

Producto de un polinomio por un polinomio

El producto de polinomios se obtiene multiplicando cada término del primer polinomio por el segundo y reduciendo luego, los términos semejantes. De este modo obtenemos el polinomio resultante.

Ejemplo 1: Multiplicamos $(3x^2-2x-2)(5x-5x^2-7)$

Solución:

$$\begin{array}{r} 3x^2-2x-2 \\ \times\quad -5x^2+5x-7 \\ \hline -15x^4+10x^3+10x^2\qquad\qquad\qquad \\ 15x^3-10x^2-10x\qquad \\ -21x^2+14x+14 \\ \hline -15x^4+25x^3-21x^2+4x+14 \end{array}$$

Ejemplo 2: $\left(\frac{3}{2}a^2-4ab+\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b\right)$

Solución: Estos polinomios podemos ordenarlos de manera horizontal.

$$\left(\frac{3}{2}a^2-4ab+\frac{1}{3}b^2\right)\left(\frac{1}{3}a-\frac{2}{5}b\right)=\frac{3}{6}a^3-\frac{4}{3}a^2b+\frac{1}{9}ab^2-\frac{6}{10}a^2b+\frac{8}{5}ab^2-\frac{2}{15}b^3$$

$$=\frac{1}{2}a^3+\left(-\frac{4}{3}-\frac{6}{10}\right)a^2b+\left(\frac{1}{9}+\frac{8}{5}\right)ab^2-\frac{2}{15}b^3=\boldsymbol{\frac{1}{2}a^3-\frac{29}{15}a^2b+\frac{77}{45}ab^2-\frac{2}{15}b^3}$$

Ejemplo 3: Efectuamos $(3x^{a+2}+4x^{a+1}-x^{a-1}-x^{a-2})(x^{a+2}-3x^a-x^{a-1})$

Solución: Ordenamos los polinomios en forma general y realizamos el procedimiento anterior.

$$\begin{array}{l} \qquad 3x^{a+2}+4x^{a+1}-x^{a-1}-x^{a-2} \\ \times\qquad\qquad x^{a+2}-3x^a-x^{a-1} \\ \hline 3x^{2a+4}+4x^{2a+3}\qquad -x^{2a+1}-x^{2a} \\ \qquad\qquad -9x^{2a+2}-12x^{2a+1}\qquad +3x^{2a-1}+3x^{2a-2} \\ \qquad\qquad\qquad -3x^{2a+1}-4x^{2a}\qquad +x^{2a-2}+x^{a-3} \\ \hline \boldsymbol{3x^{2a+4}+4x^{2a+3}-9x^{2a+2}-16x^{2a+1}-5x^{2a}+3x^{2a-1}+4x^{2a-2}+x^{a-3}} \end{array}$$

Actividad 27. En nuestros cuadernos realizamos la multiplicación de los siguientes polinomios:

1) $(7x^3+5x^2-x)(3x-4x^2-4x^3)$
2) $(6a^5b^8c^2-8a^7c^4)\left(-\frac{1}{3}a^3b-3a^2b^2c^3\right)$
3) $\left(\frac{2}{3}a^3-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{3}a\right)\left(-\frac{3}{5}a^2+\frac{1}{3}a\right)$
4) $(m^5n-4m^4n^2-5m^3n^3-7m^2n^4)(6mn+2)$
5) $(6a^3b+9a^2b^2-3ab^3)\left(-\frac{1}{3}a^3-\frac{1}{6}a^2b-2ab^2\right)$
6) $\left(-\frac{3}{2}mn-\frac{2}{5}m^2n^2-\frac{1}{2}m^3n^3\right)\left(\frac{1}{2}m^3n^3+\frac{3}{2}m^2n^2+\frac{1}{3}mn\right)$
7) $(3a^{4x}b^4-4a^{3x}b^3-7a^{2x}b^2-5a^xb)(a^{3x}b^2-2a^{2x}b+5a^x)$
8) $(-2x^{2a+1}y^{3b+1}-5x^{2a+2}y^{3b+2})\left(\frac{1}{2}x^{a+1}y^{b+1}-\frac{1}{5}x^{a+2}y^{b+2}\right)$
9) $\left(\frac{1}{3}m^2-\frac{2}{3}mn-\frac{5}{6}n^2\right)\left(3m^2+\frac{1}{2}mn-\frac{2}{3}n^2\right)$
10) $\left(\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{3}a-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{3}a^4-2a^3+3a^2+a\right)$

1.3. División de monomios y polinomios

División de bases iguales: en la división de bases iguales se copia la misma base y se restan los exponentes.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

División entre monomios: para dividir monomios, primero debemos dividir los coeficientes y luego aplicamos la ley de división de bases iguales a las variables, siempre y cuando sean las mismas, caso contrario se mantienen.

Ejemplo 1. Dividimos $-8x^5yz^3$ entre $2x^3y^2z^3$

Solución: $\frac{-8x^5yz^3}{2x^3y^2z^3} = -4x^{5-3}y^{1-2}z^{3-3} = -4x^2y^{-1}z^0 = -\frac{\mathbf{4x^2}}{\mathbf{y}}$

Ejemplo 2. Dividimos $-9a^4b^7c^5$ entre $-15a^{-2}b^3c^{-1}$

Solución: $\frac{-9a^4b^7c^5}{-15a^{-2}b^3c^{-1}} = \left(\frac{-9}{-15}\right)a^{4-(-2)}b^{7-3}c^{5-(-1)} = \frac{3}{5}a^{4+2}b^4c^{5+1} = \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}}\mathbf{a^6b^4c^6}$

Ejemplo 3. Dividimos $-10x^{2n-1}y^{n+4}z^4$ entre $2x^{n+2}y^{3n+3}c^{-n}$

Solución:

$$\frac{-10x^{2n-1}y^{n+4}z^4}{2x^{n+2}y^{3n+3}c^{-n}} = -\frac{10}{2}x^{2n-1-(n+2)}y^{n+4-(3n+3)}z^{4-(-n)} = -5x^{2n-1-n-2}y^{n+4-3n-3}z^{4+n} = \mathbf{-5x^{n-3}y^{-2n+1}z^{4+n}}$$

Actividad 28. En nuestro cuaderno de ejercicios resolvemos las siguientes divisiones de monomios:

1) $\frac{5x^8y^7z}{7x^5y^6z}$	4) $\frac{-11m^5n}{-77m^3n^3}$	7) $0{,}4xyz^2 \div 0{,}2xyz$
		8) $(7a^{3x}b^x) \div (-5a^{-3}b^2)$
2) $\frac{-8a^7b^2c^4}{12a^2b^2c^3}$	5) $(6a^5b^8c^2) \div \left(-\frac{1}{3}a^3bc\right)$	9) $(-3x^{9a}y^{7a}) \div (-3x^{4a}y^{5a})$
3) $\frac{\frac{2}{3}abc}{-\frac{3}{5}abc^5}$	6) $\left(-\frac{4}{7}mn\right) \div \left(-\frac{3}{5}m^3np\right)$	10) $\left(-\frac{6}{7}a^{3x-2}b^{3x}c\right) \div \left(-\frac{3}{11}a^{x+1}bc^{x-1}\right)$

División de un polinomio entre un monomio: cuando se presente este caso debemos dividir cada término del polinomio entre el monomio, como se muestra en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. Dividimos la siguiente expresión: $\frac{21x^8y^6z - 9x^6y^4z^2 + 3x^4y^2}{-3x^2yz}$

Solución: dividimos cada término del polinomio entre el monomio

$$\frac{21x^8y^6z}{-3x^2yz} - \frac{9x^6y^4z^2}{-3x^2yz} - \frac{3x^4y^2}{-3x^2yz} = 7x^{8-2}y^{6-1} + 3x^{6-2}y^{4-1}z^{2-1} - \frac{x^{4-2}y^{2-1}}{z} = \mathbf{7x^6y^5 + 3x^4y^3z - \frac{x^2y}{z}}$$

Ejemplo 2. Calculamos el cociente de: $\frac{3x^{2m-1} - 7x^{3m-2} - 16x^{m+1}}{2x^{m-2}}$

Solución: dividimos cada término del polinomio entre el monomio

$$\frac{3x^{2m-1} - 7x^{3m-2} - 16x^{m+1}}{2x^{m-2}} = \frac{3x^{2m-1}}{2x^{m-2}} - \frac{7x^{3m-2}}{2x^{m-2}} - \frac{16x^m}{2x^{m-2}}$$

$$= \frac{3}{2}x^{2m-1-(m-2)} - \frac{7}{2}x^{3m-2-(m-2)} - 8x^{m-(m-2)}$$

$$= \mathbf{\frac{3}{2}x^{m+1} - \frac{7}{2}x^{2m} - 8x^2}$$

Actividad 29. Realizamos las siguientes divisiones de polinomios entre monomios en nuestro cuaderno de ejercicios.

1) $(-3x - 2x^2) \div (-7x)$	6) $\left(2x^{\frac{1}{3}}y^{\frac{2}{3}} - 3x^3y - 5y^{\frac{8}{3}}\right) \div (5x^3y^3)$
2) $\left(-\frac{1}{2}x^2y^2z^2 + 6x^5y^6z\right) \div (x^3y^3z)$	7) $\left(\frac{1}{2}x^4y^3 - \frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{5}\right) \div \left(-\frac{3}{2}x^2y^7\right)$
3) $\left(7a^6b^2c^3 - \frac{3}{5}a^4b^3c^7\right) \div \left(-\frac{1}{3}a^3c^2\right)$	8) $\left(\frac{2}{15}x^6yz^3 - \frac{7}{9}yz^3 + 4xy\right) \div \left(\frac{3}{5}x^3y^2z\right)$
4) $\left(7abc - \frac{3}{2}c^5\right) \div \left(\frac{1}{3}abc\right)$	9) $\left(\frac{8}{3}a^xb^{3y-1} + \frac{11}{2}a^{x-2}b^{3y-4}\right) \div (8ab)$
5) $(4m^3n^3 - 3m^3n) \div (-m^3n^3)$	10) $\left(\frac{1}{2}m^{6x+7}n^x - m^{3x+4}n^{x-1} - \frac{1}{9}m^{5x}n\right) \div \left(-\frac{2}{7}m^{2x}n^4\right)$

División de un polinomio entre otro polinomio

Para dividir polinomios, debemos observar el orden de los términos según el exponente de la base y si falta un término lo completamos con un cero.

Método Clásico

Ejemplo 1. Efectuamos la división de $4a^2 - 7a + \frac{3}{2}$ entre $2a - 3$

Solución: Expresamos en forma de división

$$\begin{array}{rrr|l} 4a^2 & -\,7a & +\,\frac{3}{2} & 2a-3 \\ \cline{4-4} \underline{-4a^2} & \underline{+\,6a} & & 2a-\frac{1}{2} \\ 0 & -\,a & +\,\frac{3}{2} & \\ & \underline{a} & \underline{-\,\frac{3}{2}} & \\ & & 0 & \end{array}$$

Anotamos en el cociente $2a$ y multiplicamos por el divisor

$(2a)(2a) = 4a^2$, pero al pasar a restar se registra con signo contrario. $-4a^2$.

Luego multiplicamos $(2a)(-3) = -6a$, pero pasa a restar con signo contrario $6a$.

Posteriormente realizamos la misma operación con $-\frac{1}{2}$

Por lo tanto: el cociente es: $2a - \frac{1}{2}$ y el resto 0

Ejemplo 2. Dividimos $-3x + 2x^4 - x^2 - 1$ entre $x + x^2 + 1$

Solución: debemos ordenar tanto el dividendo como el divisor de forma decreciente respecto a los exponentes.

$$\begin{array}{rrrrr|l} 2x^4 & 0 & -\,x^2 & -\,3x & -\,8 & x^2+x+1 \\ \cline{6-6} \underline{-2x^4} & \underline{-\,2x^3} & \underline{-\,2x^2} & & & 2x^2-2x-1 \\ 0 & -\,2x^3 & -\,3x^2 & -\,3x & & \\ & \underline{2x^3} & \underline{+\,2x^2} & \underline{+\,2x} & & \\ & 0 & -\,x^2 & -\,x & -\,8 & \\ & & \underline{x^2} & \underline{+\,x} & \underline{+\,1} & \\ & & & & -7 & \end{array}$$

Por lo tanto: el cociente es: $2x^2$-$2x$-1 y el resto es *-7*

Actividad 30. En nuestro cuaderno de ejercicios dividimos los siguientes polinomios.

1) $\frac{15x^2-xy-28y^2}{5x-7y}$	5) $\frac{3a^4-9a^2-40}{a^2-8}$	8) $\frac{5a^4-9a^3-23a^2+36a+12}{a^2-4}$
2) $\frac{7x^2-31xy+12y^2}{x-4y}$	6) $\frac{12a^4 - 36a^3 - 29a^2 + 38a + 14}{2a^2 - 5a - 6}$	9) $\frac{12a^4+9a^3-11a^2-6a+2}{3a^2-2}$
3) $\frac{12a^2-5ab-2b^2}{4a+b}$	7) $\frac{a^4+2a^2+5a+3}{a^2-3a+6}$	10) $\frac{10x^4-41x^3y+9x^2y^2+38xy^3+14y^4}{2x-7y}$
4) $\frac{18a^4-21a^2b^2-15b^4}{6a^2+3b^2}$		

Método de Horner

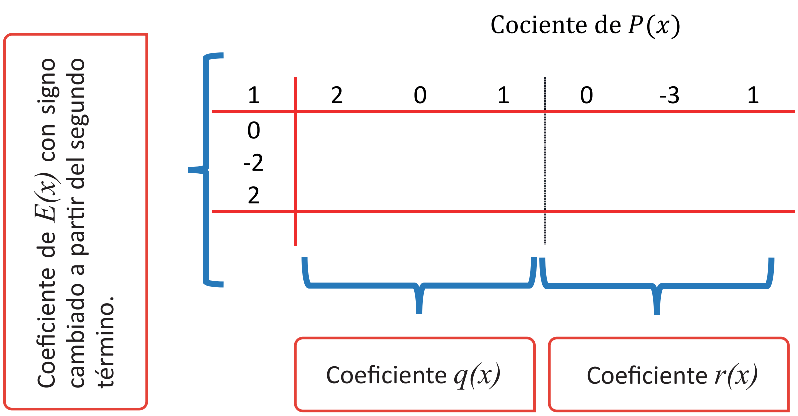
Este método nos permite dividir polinomios a través de las operaciones con sus coeficientes, por ejemplo:

Dividimos los siguientes polinomios $P(x) \div E(x)$ donde: $P(x) = 2x^5 + x^3 - 3x + 1$ y $E(x) = x^3 - 2x + 2$

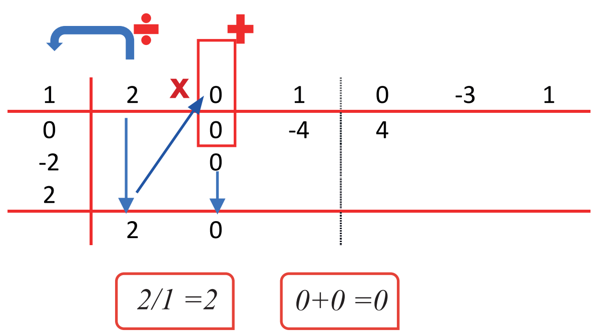
1ro. Si los polinomios no tienen todos los términos en relación al exponente de su variable, debemos completar con ceros ambos polinomios. Posteriormente ubicamos los coeficientes:

$P(x) = 2x^5 + 0x^4 + x^3 + 0x^2 - 3x + 1$ $\qquad$ $E(x) = x^3 + 0x^2 - 2x + 2$

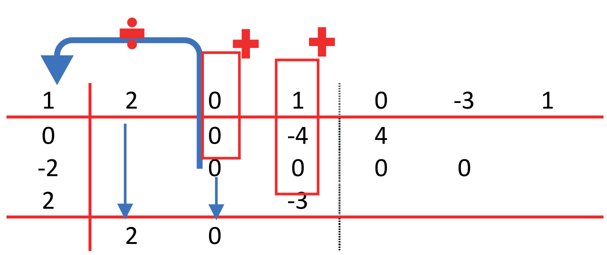
Colocamos una línea divisora punteada en los coeficientes de $P(x)$, para ello contamos de derecha a izquierda la misma cantidad de columnas que el exponente del divisor, que en este caso es 3.



2do. Dividimos el primer coeficiente del dividendo por el primer coeficiente del divisor y anotamos el resultado en la parte inferior $q(x)$ sobre la misma columna, posteriormente multiplicamos el resultado por los demás coeficientes del divisor y anotamos los resultados sobre cada columna.



3er. Repetimos el procedimiento anterior, sumando $0+0$ y el resultado lo dividimos con 1, el resultado se anota en q(x), y luego se multiplica este número por los coeficientes del divisor.



4to. Nuevamente realizamos el mismo procedimiento, ahora sumamos 1 + (-4) + 0 = -3, el resultado lo dividimos entre 1 y anotamos el resultado en q(x). posteriormente multiplicamos el resultado por los coeficientes del divisor.

					+	+	+
1	2	0	1		0	-3	1
0		0	-4		4		
-2		0	0		0	0	
2			-3		0	6	-6
	2	0	-3		4	3	-5

Por lo tanto, tenemos que cociente $q(x)$ y resto $r(x)$ son:

$$q(x) = 2x^2 + 0x - 3 = 2x^2 - 3$$

$$r(x) = 4x^2 + 3x - 5$$

Método de divisiones sucesivas (Ruffini)

La regla de Ruffini es un método particular que permite determinar el cociente y el resto de la división de un polinomio por un binomio de la forma $x \pm a$.

Divisor	Dividendo	Término independiente
	Cociente	resto

Analicemos los pasos a través de un ejemplo:

Ejemplo 1. Determinamos el cociente de: $(6x^3 - 3x + 4) \div (x - 2)$

1ro. Ordenamos en forma decreciente en relación al exponente del dividendo y se anotan en orden sus coeficientes. Si en el polinomio del dividendo faltan términos, se completa con ceros. Debajo, y desplazado a la izquierda, **el divisor** es el término independiente 2 con signo contrario. El primer coeficiente del cociente es igual al primer coeficiente del dividendo; por lo cual, bajamos el número 6.

	6	0	-3	4
2	↓			
	6			

2do. Se multiplica el divisor por el primer valor del cociente y se anota el producto debajo del segundo dividendo. Luego sumamos o restamos lo valores del segundo término.

	6	0	-3	4
2		12		
	6	12		

3er. Sumamos $0+12=12$ y multiplicamos el divisor con el resultado.

	6	0	-3	4
2		12	24	
	6	12		

4to. Luego de sumar $-3+24=21$ se multiplica el divisor por el resultado.

	6	0	-3	4
2		12	24	42
	6	12	21	46

5to. Se expresa el cociente en forma de polinomio y se identifica el resto.

$$\frac{6x^3-3x+4}{x-2} = 6x^2 + 12x + 21$$

$P(x) = 6x^2 + 12x + 21$

Resto = 46

Ejemplo 2. Hallar el cociente y el resto de $(9x^4 - 2x^3 - x - 2) \div (3x - 2)$

Solución: aplicamos los pasos del anterior ejemplo.

$3x - 2 = 0$	9	-2	0	-1	-2
$\frac{2}{3}$	$\downarrow$	6	$\frac{8}{3}$	$\frac{16}{9}$	$\frac{14}{27}$
	9	4	$\frac{8}{3}$	$\frac{7}{9}$	$-\frac{40}{27}$

Por lo tanto, **Cociente** $= 9x^3 + 4x^2 + \frac{8}{3}x + \frac{7}{9}$ y el **Resto** = $-\frac{40}{27}$

1.4. Teorema del resto

Este teorema nos permite calcular el resto o residuo de la división de un polinomio $P(x)$ por otro polinomio $Q(x)$ de primer grado y de la forma x-a, donde el resto es $r(a)$.

Ejemplo 1: dividir $P(x) = -3x^4 + 4x^2 - 5$ y $Q(x) = x - 2$

Solución: Igualamos a cero el divisor y despejamos x

$x - 2 = 0$ entonces $\boldsymbol{x = 2}$

Remplazando el valor de $\boldsymbol{x}$, tenemos $P(2) = -3(2)^4 + 4(2)^2 - 5 = -3(16) + 4(4) - 5 = -37$

Por lo tanto, el resto es $\boldsymbol{-37}$

Ejemplo 2: dividir $P(x) = 2x^3 - 3x + 6$ entre $Q(x) = 3x - 2$

Solución: igualamos a cero el divisor y despejamos x

$3x - 2 = 0$ entonces $x = \frac{2}{3}$

Remplazando el valor de $\boldsymbol{x}$, tenemos $P\left(\frac{2}{3}\right) = 2\left(\frac{2}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2}{3}\right) + 6 = \frac{16}{27} - 2 + 6 = \frac{124}{27}$

Por lo tanto, el resto es 124/27

Actividad 32. En nuestro cuaderno determinamos el resto de los siguientes polinomios.

1) $(2x^3 - 9x - 15) \div (x - 2)$	4) $(x^4 - 4x^3 + 5x + 2) \div (3x + 2)$
2) $(4x^3 - x^2 - 3x + 1) \div (x + 2)$	5) $(4a^2 - 3a - 5) \div (2a - 5)$
3) $(3x^4 + 4x^3 + x^2 - 5) \div (7x - 7)$	6) $(3m^4 + 6m^3 + 4m^2 + 2m - 1) \div (2m - 1)$

2. Operaciones algebraicas combinadas

Para resolver operaciones combinadas con fracciones y expresiones algebraicas, se debe tomar en cuenta las siguientes consideraciones:

Actividad 31.

Resolver por la regla de Ruffini:

1) $(x^4 - x^3 - 9x - 15) \div (x - 3)$
2) $(2x^5 + 3x^4 - 3x^3 - 5x^2 - 3x + 1) \div (x + 2)$
3) $(-2x^4 + 4x^3 + 3x^2 - 5) \div (x - 3)$
4) $(x^5 + 4x^4 + 5x + 2) \div (x + 1)$
5) $(a^4 - 3a^3 - 7a^2 - 3a - 5) \div (a - 5)$
6) $(3m^5 + 9) \div (m - 2)$
7) $(-3x^4 + 2x^2 - 7x) \div (x - 2)$
8) $(x^5 - 7x^3 + 4x^2 + 18) \div (x + 3)$
9) $(x^4 - 3x^2 - 5) \div (x + 4)$
10) $(3x^4 + 2x^3 + 1) \div \left(x + \frac{1}{3}\right)$

1ro. Si se tiene signos de agrupación debemos suprimir los mismos y después efectúamos el resto de las operaciones.

2do. Si no existen signos de agrupación, debemos resolver primero las multiplicaciones y las divisiones, posteriormente las sumas y las restas.

Observemos los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1. Simplificamos la siguiente expresión.

$$\frac{2}{3}+\frac{a+3}{2}-\frac{2(a-1)}{5}$$

Solución: Hallamos el m.c.m. de los denominadores y aplicamos procedimientos de suma y resta de fracciones.

$$\frac{20+15(a+3)-12(a-1)}{30}=\frac{20+15a+45-12a+12}{30}=\frac{3\boldsymbol{a}+77}{30}$$

Ejemplo 2. Simplificamos la siguiente expresión:

$$\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}$$

Solución: Calculamos el común denominador y posteriormente realizamos las operaciones.

$$\frac{\frac{x+2}{x-1}+2}{\frac{x+2}{x-1}-1}=\frac{\frac{x+2+2(x-1)}{x-1}}{\frac{x+2-1(x-1)}{x-1}}=\frac{x+2+2x-2}{x+2-x+1}=\frac{\boldsymbol{x}+2\boldsymbol{x}}{3}$$

Actividad 33. En nuestro cuaderno resolvemos los siguientes ejercicios.

1) $(2x+3x-11)(7x-15+7)$ 2) $\left(2m^3-5m^2-6m\right)\div(15m-11m)$ 3) $\frac{3a}{8}-\frac{6a}{5}+\frac{a}{2}$ 4) $\frac{2x+5}{4}+\frac{6x-7}{3}-\frac{x}{6}$	5) $\frac{\frac{1+x}{4}+\frac{1-x}{2}}{\frac{1-x}{2}-\frac{1-x}{4}}=$ 6) $\frac{x}{1+\frac{\frac{1+x}{x}}{1-\frac{1-x}{x}}}=$	7) $\frac{\frac{1-x}{1+x}+1}{\frac{1-x}{1+x}-1}=$ 8) $\frac{x}{1-\frac{\frac{1}{x}+1}{\frac{1}{x}-1}}=$

3. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

Gran parte de los problemas de la vida cotidiana están expresados en forma de expresiones algebraicas los cuales son resueltos siguiendo los pasos que corresponde y aplicados a diferentes situaciones y contextos.

Ejemplo. Un club deportivo después de gestionar donaciones con algunas instituciones para la compra de poleras, logro reunir $4x^2+4x$ del cual se destinó $Bs\ 20$ para transporte. Comprando por mayor se rebajo $Bs\ 3$, siendo x el precio de cada polera $(x=50\ Bs)$, respondemos las siguientes preguntas:

a) ¿Cuánto de dinero se logró reunir? **b) ¿Cuántas poleras compraron?** **c) ¿Les sobró dinero?**

Solución: Sumamos la cantidad recaudada, restamos el pasaje y el sobrante dividimos entre el precio de las poleras.

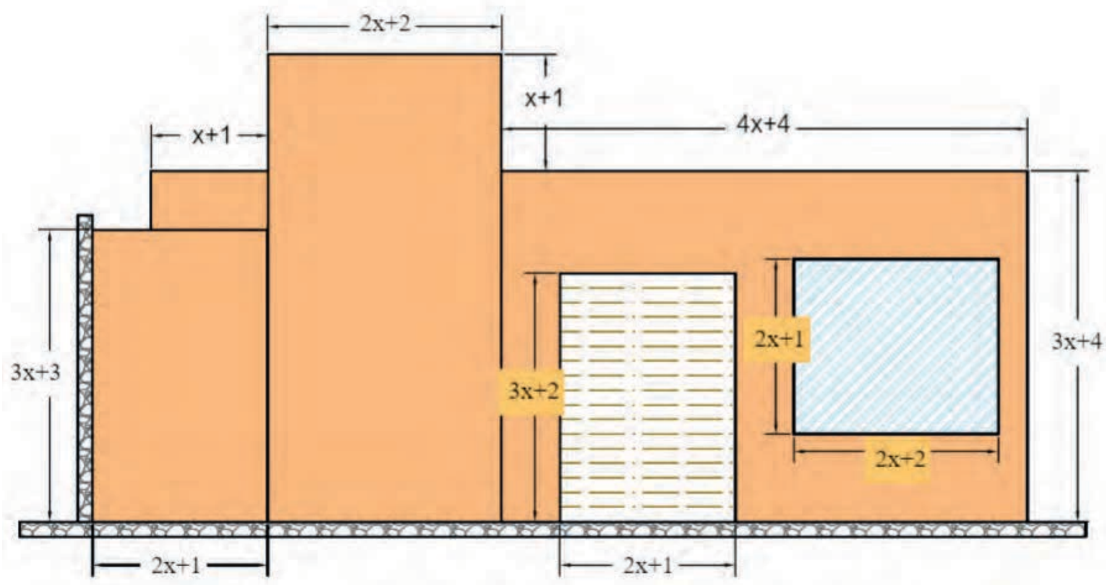
$4x^2 + 4x - 20$ | $x - 3$ $\underline{-4x^2 + 12x}$ | $4x + 16$ $16x - 20$ $\underline{-16x + 48}$ $\mathbf{28}$	**Reemplazando** $x=50$ $4(50)^2+ 4(50)-20 =10180$ Costo de 1 polera con la rebaja x-3 = 47 Cantidad de poleras adquiridas 4(50)+16 = 216	**Respuesta:** a) Total Bs 10200 b) 216 poleras c) Sí, Bs 28

Actividad 34. En nuestro cuaderno resolvemos los siguientes problemas:

1. Se desea calcular el volumen de una piscina de base rectangular cuyas dimensiones longitudinales son: $2x-4$ de largo, $5x+2$ de ancho y $6x+1$ de altura. ¿Cuál es el volumen de la piscina?

2. Debemos cargar gasolina en botellas plásticas de capacidad $x-y$ litros, y tenemos $4x^2-7xy+3y^2$ litros. ¿Cuántas botellas plásticas se necesitan?

3. Debemos pintar la fachada frontal de una tienda cuyas dimensiones se observa en la imagen.
¿Cuál es el área total que se debe pintar?
Tomemos en cuenta que no se pintara la ventana y la puerta de persiana metálica.



4. Encontrar el área y perímetro de una cancha de futbol que tiene de largo igual a $12x+6$ y ancho igual $7x-4$.

5. Cada semana, un jardín cuya forma es cuadrada, es podado solo por los alrededores. El resto del jardín se mantiene sin podar para que los animales se refugien en él. El jardín mide b metros por b metros y la franja podada es de x metros de ancho. Representar el problema en expresiones algebraicas y graficar.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

En el mundo existen términos y valores que son iguales o semejantes, el estudio de las ciencias exactas, los símbolos y valores los cuales son comprendidos de la misma forma en casi todo el mundo, ejemplo los símbolos de las operaciones matemáticas, entre otros.

Actualmente con el incremento del uso de la tecnología, muchos de los términos usados son iguales o semejantes, veamos algunos ejemplos y completamos la tabla con otros que conozcamos:

GLOSARIO DE TÉRMINOS UTILIZADOS EN LAS TICs	
Android: Conjunto de herramientas y aplicaciones para teléfonos móviles.	**Chip:** Circuito integrado (CI)
Antivirus: Aplicaciones dedicadas a la prevención, búsqueda, detección y eliminación de programas malignos en sistemas informáticos.	**Hacker:** Experto en informática capaz de de entrar en sistemas cuyo acceso es restringido.
Aplicación: Programa diseñado para una determinada función, como los procesadores de texto o las	
plantillas de cálculo.	
Avatar: Los avatares pueden ser fotografías o dibujos, e incluso algunas tecnologías permiten el uso de representaciones en 3D.	

Actividad 35. Analicemos y reflexionemos para responder las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué es importante las operaciones algebraicas en la resolución de problemas del contexto?
2. ¿Cómo influye la aplicación del lenguaje algebraico en el desarrollo tecnológico?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

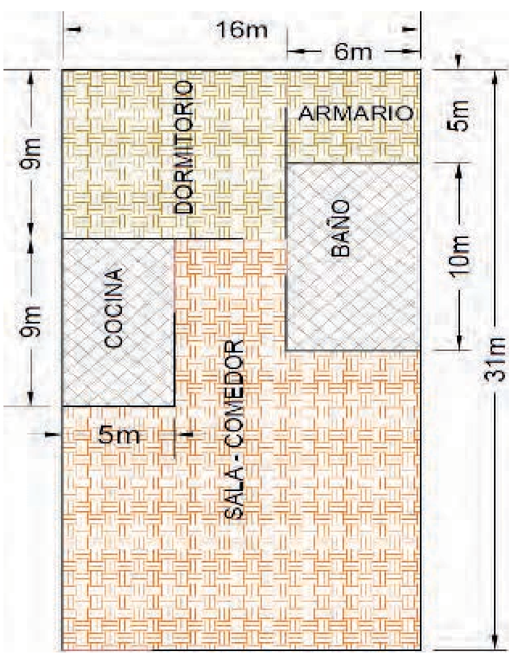


Figura 2

Actividad 36. Realicemos las siguientes actividades:

1. Debemos calcular el área de cada dependencia en el plano. Para ello realizamos las siguientes operaciones: (figura 2)

a) Área de la cocina $A=9m\times 5m=\mathbf{45m^2}$

b) Área del baño $A=10m\times 6m=\mathbf{60m^2}$

c) Área del armario $A=5m\times 6m=\mathbf{30m^2}$

d) Área del dormitorio: Para calcular el área del dormitorio debemos restar 6 m a los 16 m que es la longitud total de uno de los lados del lote.

$$A=9m\times(16m-6m)$$
$$A=9m\times 10m=\mathbf{90m^2}$$

e) Área del comedor: para calcular el área del comedor debemos restar del área total el área de las demás dependencias.

$$A=(31m\times 16m)-(45m^2+60m^2+30m^2+90m^2)$$
$$A=496m^2-225m^2$$
$$A=271m^2$$

2. Elabora una maqueta escala tomando como datos las áreas de los diferentes ambientes de la figura 2.

ECUACIONES DE PRIMER GRADO EN LA COMUNIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 37. Analicemos el siguiente problema y respondemos las preguntas planteadas: Gabriel le pregunta a Josué la edad de sus padres, y él responde de la siguiente forma: mi mamá es menor por 4 años que mi padre y la mitad de la edad de mi mamá es 19.

1. ¿Cómo puedes plantear este problema en tu cuaderno?
2. ¿Cuál es la edad de los papás de Josué?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición de igualdad, identidad y ecuaciones

Igualdad, es la expresión de equivalencia de dos cantidades numéricas o literales.

Identidad, es una igualdad de expresiones algebraicas que es cierta siempre, para cualquier valor que tomen las variables.

Ejemplo:

a) $(x+5)(x-5) = x^2 - 25$

b) $5x(3x-2) = 15x^2 - 10x$

Ecuación es una igualdad que sólo es cierta para determinados valores de la variable que se denominan soluciones de la ecuación.

$6x - 3 = -x + 11$ sí y solo si $x = 2$

$x^2 - 3x = x + 5$ sí y solo si $x_1 = 5$, $x_2 = -1$

Lo que cambia de lugar pasa con signo u operación contraria.

- La suma pasa al otro miembro como resta, y viceversa.
- La multiplicación pasa al otro miembro a dividir y viceversa.
- La potencia pasa al otro miembro como raíz y viceversa.

2. Definición de ecuaciones de primer grado

Una ecuación de primer grado o ecuación lineal es una igualdad algebraica cuya potencia es equivalente uno, pudiendo contener una, dos o más incógnitas.

Las ecuaciones de primer grado con una incógnita poseen la forma: $\boldsymbol{ax + b = 0}$

Con a y b E R y x la incógnita

3. Elementos de una ecuación

En una ecuación se pueden distinguir varios elementos:

Incógnita. Es la letra que aparece en la ecuación.
Términos. Cada uno de los sumandos que componen los miembros de la ecuación.
Miembro. Es cada una de las dos expresiones algebraicas separadas por el signo "=".
Grado. Es el mayor de los exponentes de las incógnitas.

$$\overbrace{\mathbf{5x - 7}}^{\text{Primer miembro}} = \overbrace{\mathbf{4x + 3}}^{\text{Segundo miembro}}$$

Donde:
x es la incognita
5x,4x términos dependientes
-7,3 términos independientes

Actividad 38

Resuelvemos las siguientes ecuaciones y realiza la verificación correspondiente.

1) $3x+1=6x-8$

2) $7x+8=5x+6$

3) $15-2x=3x+10$

4) $2(x-5)=3x-17$

5) $20=2x-(10-4x)$

6) $10-9x=4(x-4)$

7) $5x+3=2x+5$

8) $4x+6=4+10x$

9) $\frac{2x}{6}-\frac{x}{4}=x-11$

10) $\frac{3x}{2}+1=x+2$

4. Resolución de ecuaciones

Regla de transposición de términos en la ecuación, consiste en pasar todos los términos con las "x" a un lado de los miembros y los términos independientes al otro miembro.

Verificación de la solución es aplicar valor numérico, reemplazar las variables con el valor encontrado.

Ejemplo 1.	**Verificación**
$4x-7=3x+5$ $4x-3x=7+5$ $\boldsymbol{x=12}$	$4(\mathbf{12})-7=3(\mathbf{12})+5$ $48-7=36+5$ $41=41$
Ejemplo 2.	**Verificación**
$8x+4-2x=2-2x-6$ $8x-2x+2x=2-4-6$ $8x=-8$ $x=\frac{-8}{8}$ $\boldsymbol{x=-1}$	$8(\mathbf{-1})+4-2(\mathbf{-1})=2-2(\mathbf{-1})-6$ $-8+4+2=2+2-6$ $-2=-2$

5. Aplicación de ecuaciones en la resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Ejemplo 1.

Si un número aumentado en 3 unidades es igual al doble de dicho número, el número aumentado en 5 unidades ¿cuánto será?

Solución:	**Planteamiento de la ecuación**
Analicemos los datos Sea el número Un numero aumentado en 3 unidades: $x+3$ Doble de dicho número: $2x$	$x+3=2x$ $3=2x-x$ $3=x$
Por tanto, el número aumentado en 5 unidades: $x+5=3+5=8$	

Ejemplo 2.

Julieta tiene 16 años y sus dos hermanos pequeños tienen 2 y 3 años. ¿Cuántos años han de pasar para que el doble de la suma de las edades de los hermanos de Carmen sea la misma que la que tiene ella?

Solución:	**Planteamiento de la ecuación**
Analicemos los datos $x=$ años que tienen que pasar Cuando pasen esos años los hermanos tendrán: $2+x$ el menor y $3+x$ el mayor. La edad de Julieta será $16+x$.	$2[(2+x)+(3+x)=16+x]$ $2(2x+5)=16+x$ $4x+10=16+x$ $4x-x=16-10$ $3x=6$ $x=\frac{6}{3}=2$
Interpretación. Es decir, tienen que pasar 2 años.	

Actividad 39. En el cuaderno de ejercicios resolvemos los siguientes problemas con ecuaciones.

1) ¿Cuáles son las medidas de la base y la altura de un rectángulo cuyo perímetro es 150 cm, si su base es el doble de su altura?

2) María enviará por correo tres paquetes A, B y C. La oficina de correo cobra por peso, y se sabe que el paquete A pesa cinco gramos menos que el B, y el C pesa diez gramos más que A. Si los tres paquetes juntos pesan 32 gramos, ¿cuánto pesa cada paquete?

3) Se compraron 9 materiales de escritorio entre laminas y lápices. El precio de una lámina es Bs 4 y el de un lápiz Bs 2. Si se gastaron Bs 26, ¿cuántas laminas y lápices se compró?

4) Hallar tres números consecutivos pares que sumados sea igual a 24.

5) Si la edad de Susana es el triple que la de Paola y dentro de 10 años será el doble, ¿cuál es la edad actual de Susana y Paola?

¡Realicemos la valoración!

En la vida diaria se nos presentan problemas con datos que no conocemos y hacemos varias operaciones mentales para encontrar esa información, pero aplicando ecuaciones podemos encontrar datos exactos y de forma más rápida y sencilla. Por ejemplo, cuando compramos unas bolsas de galletas y refrescos, y nos cobran un monto económico y solo sabemos que el refresco es el doble de las galletas.

Actividad 40. Respondemos de manera reflexiva las siguientes preguntas:
¿Cómo aplicamos la resolución de ecuaciones de primer grado en la cotidianidad?
¿Por qué es importante resolver ecuaciones de primer grado?

¡Es hora de la producción!

Actividad 41. Realicemos las siguientes actividades:
- Investiguemos problemas del contexto y la tecnología que se resuelven con ecuaciones de primer grado.
- Elaboramos un modelo matemático para dar solución a los problemas investigados

INTRODUCCIÓN A LA TRIGONOMETRÍA Y SU APLICACIÓN EN EL CÁLCULO DE DISTANCIAS

¡Iniciemos desde la práctica!

Si observamos las gradas están construidas sobre una recta horizontal y vertical que forman un ángulo recto. Vamos a observar la forma de los triángulos que están debajo de las gradas, registraremos los datos en un cuaderno y analizaremos los datos obtenidos (medida de ángulos y lados).

Si ya pudiste observar o hacer memoria, casi todas las gradas están construidas sobre un triángulo rectángulo.

Actividad 42. Respondemos las siguientes preguntas:
1. ¿Será que todas las gradas se construyen sobre una recta vertical y horizontal?, ¿por qué?
2. ¿Existen otros modelos de escalera que ofrecen mayor resistencia a la gravedad?

¡Continuemos con la teoría!

Trigonometría. Es una rama de las matemáticas cuyo propósito es el estudio de la relación entre los lados y ángulos de un triángulo rectángulo.

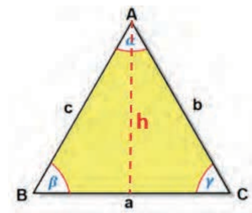
La palabra **TRIGONOMETRÍA** está compuesta de dos términos griegos “trigonon” significa triángulo y “metron” medir. Relaciona los lados de un triángulo con sus ángulos.

TRI: Tres

GONO: Ángulo

METRÍA: Medida

Partes de un triángulo

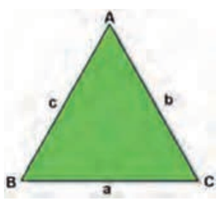


- Lados (a, b, c)
- Altura (h)
- Vértices (A, B, C)
- Ángulos (α, β, γ)

1. Triángulos y su clasificación

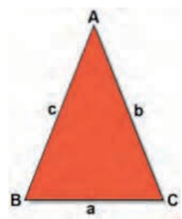
TRIÁNGULOS SEGÚN SUS LADOS

Equilátero



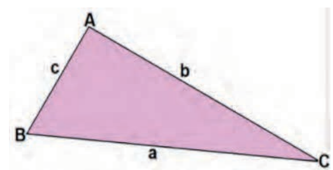
Todos sus lados son iguales
a = b = c

Isósceles



Dos lados son iguales
b = c

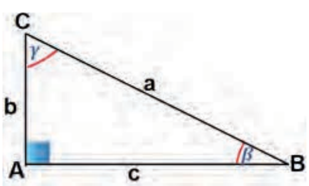
Escaleno



Todos sus lados son diferentes
a ≠b ≠ c

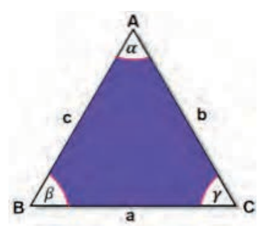
TRIÁNGULOS SEGÚN SUS ÁNGULOS

Rectángulo



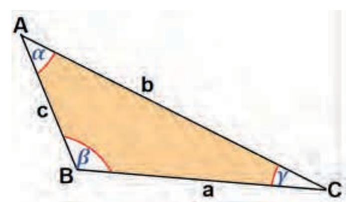
Uno de sus ángulos es igual a 90°
Â = 90°

Acutángulo



Todos sus ángulos son menos de 90°
α,β,γ <90°

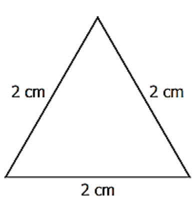
Obtusángulo



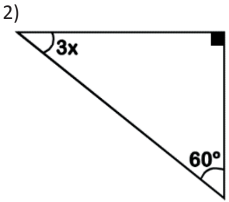
Uno de sus ángulos es mayor a 90°
β>90°

Actividad 43. Observemos los gráficos e indicamos que clase de triángulos son, de acuerdo a sus lados o ángulos.

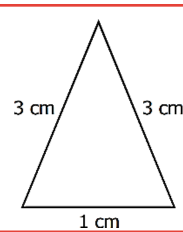
1)



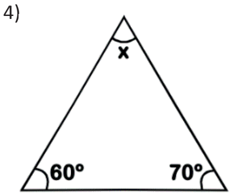
2)



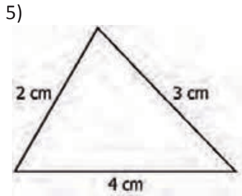
3)



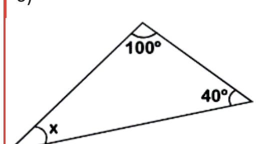
4)



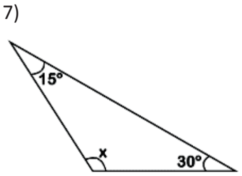
5)



6)



7)



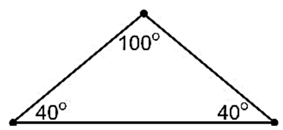
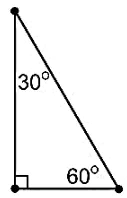
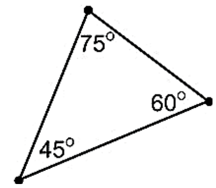
8) Grafica un triángulo rectángulo

9) Grafica un triángulo oblicuángulo

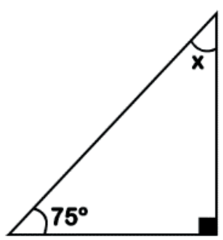
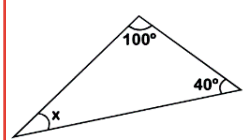
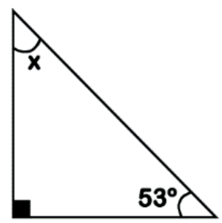
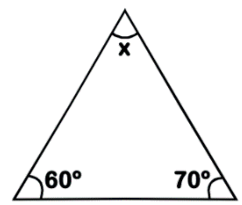
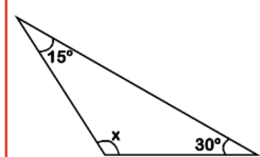
10) Grafica un triángulo isósceles

2. Suma de ángulos internos de un triángulo cualquiera

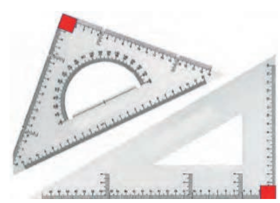
La suma de los ángulos de cualquier triangulo es siempre 180°.

		
40° + 40° + 100° = 180°	90° + 30° + 60° = 180°	45° + 75° + 60° = 180°

Actividad 44. En los siguientes triángulos calculemos el valor de "x".

				
$x=$________	$x=$________	$x=$________	$x=$________	$x=$________

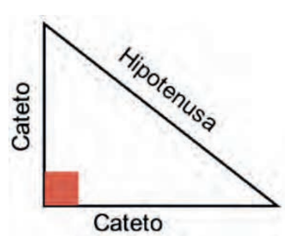
3. Triángulo Rectángulo

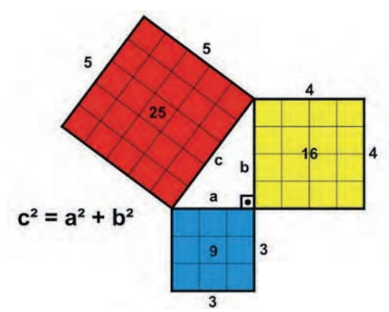


De acuerdo a la clasificación de los triángulos por sus ángulos, el triángulo rectángulo es aquel que tiene uno de sus ángulos igual a 90°.

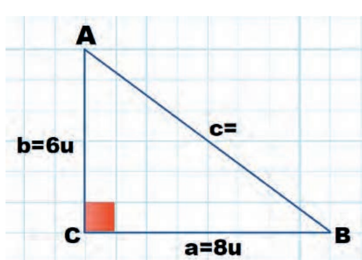
3.1. Teorema de Pitágoras

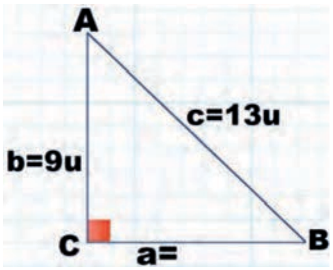
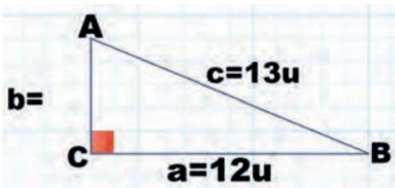
El teorema recibe su nombre del reconocido filósofo griego Pitágoras, este teorema combina nociones de matemáticas, geometría y trigonometría. Dentro de su enunciado se establece que el cuadrado del lado más largo, conocido como hipotenusa, equivale a la suma de los cuadrados de los catetos, siendo estos los lados más cortos del triángulo rectángulo. Para que se comprenda mejor vamos a ver el siguiente gráfico donde cada lado del triángulo es el lado de un cuadrado.



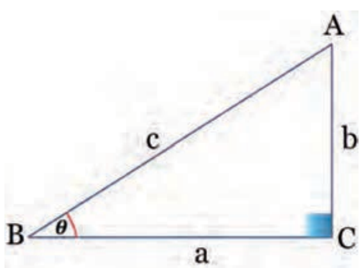


Ejemplos:

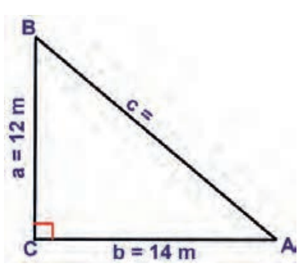
	**Reemplazando la fórmula** $c^2 = a^2 + b^2$ $c^2 = (8u)^2+(6u)^2$ $c^2 = 64u^2 + 36u^2$ $c = \sqrt{100u^2}$ $c = 10u$	

<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>Despejando "a" de la fórmula tenemos:
$a^2 = c^2 - b^2$
$a^2 = (13u)^2 - (9u)^2$
$a^2 = 169u^2 - 81u^2$
$a = \sqrt{88u^2}$
$a = 9.4u$</td>
<td rowspan="2">
</td>
</tr>
<tr>
<td>
</td>
<td>Despejando "b" de la fórmula tenemos:
$b^2 = c^2 - a^2$
$b^2 = (13u)^2 - (12u)^2$
$b^2 = 169u^2 - 144u^2$
$b = \sqrt{25u^2}$
$b = 5u$</td>
</tr>
</table>

3.2. Razones trigonométricas

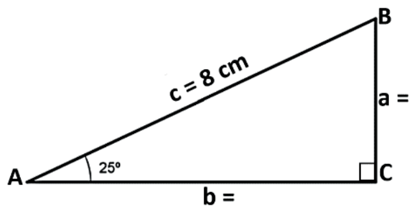
<table>
<tr>
<td>
</td>
<td>$\boldsymbol{Sen\ \theta} = \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Hipotenusa} = \dfrac{b}{c}$
$\boldsymbol{Cos\ \theta} = \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Hipotenusa} = \dfrac{a}{c}$
$\boldsymbol{Tan\ \theta} = \dfrac{Cateto\ Opuesto}{Cateto\ Adyacente} = \dfrac{b}{a}$</td>
<td>$\boldsymbol{Csc\ \theta} = \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ Opuesto} = \dfrac{c}{b}$
$\boldsymbol{Sec\ \theta} = \dfrac{Hipotenusa}{Cateto\ Adyacente} = \dfrac{c}{a}$
$\boldsymbol{Cot\ \theta} = \dfrac{Cateto\ Adyacente}{Cateto\ Opuesto} = \dfrac{a}{b}$</td>
</tr>
</table>

Ejemplo 1: Completar los datos que faltan del siguiente triángulo rectángulo.

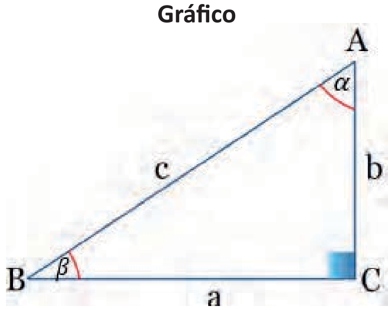
<table>
<tr>
<th>Gráfico</th>
<th>Procedimiento</th>
</tr>
<tr>
<td>

$= 90°$
$a = 12\ m$
$b = 14\ m$</td>
<td>Reemplazando en el Teorema de Pitágoras
$c^2 = a^2 + b^2$
$c^2 = (12m)^2 + (14m)^2$
$c^2 = 144m^2 + 196m^2$
$c = \sqrt{340m^2}$
$c = 18.4\ m$</td>
</tr>
<tr>
<td>Hallamos el ángulo $\hat{B}$
$Sen\ B = \dfrac{14\ m}{18,4\ m}$
$Sen\ B = 0,76087$
$B = Sen^{-1}(0,76087)$
$B = 49°\ 32'\ 27,44''$</td>
<td>Para hallar el ángulo   reemplazamos la siguiente igualdad
$\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$
+ 49° 32' 27,44''+ 90°= 180
= 180 - 49° 32' 27,44''- 90°
= 40°36'4,32''</td>
</tr>
</table>

Ejemplo 2:

Gráfico	Procedimiento
 = 90° = 25° c = 8 cm	**Reemplazando** $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180°$ $25° + \hat{B} + 90° = 180°$ $\hat{B} = 180° - 25° - 90°$ $\hat{B} = 65°$
Hallamos "a" reemplazando $Sen\ A$ $Sen\ A = \frac{a}{c}$ $Sen\ 25° = \frac{a}{8\ cm}$ $Sen\ 25° * 8cm = a$ $a = (0{,}42262)(8cm)$ $a = 3{,}4\ cm$	**Reemplazando en el Teorema de Pitágoras** $b^2 = c^2 - a^2$ $b^2 = (8\ cm)^2 + (3{,}4\ cm)^2$ $b^2 = 64\ cm^2 + 11{,}56\ cm^2$ $b = \sqrt{75{,}56\ cm^2}$ $b = 8{,}7\ cm$

Actividad 45. Grafiquemos y calculemos los datos que faltan de acuerdo al gráfico del triángulo rectángulo:

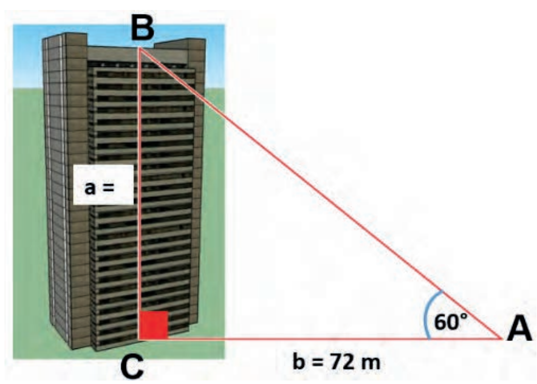
Gráfico	
	1) $c = 20\ cm$; $b = 12\ cm$ 2) $\beta = 50°$; $a = 5u$ 3) $a = 6\ cm$; $b = 8\ cm$ 4) $\alpha = 45°$; $b = 5u$ 5) $c = 17\ cm$; $a = 13\ cm$

4. Problemas aplicados al contexto y la tecnología

INSTRUMENTOS DE MEDICIÓN		
Gracias al avance de la tecnología los equipos de medición de alturas, distancias y ángulos, fueron evolucionando y mejorando, haciendo de que cada vez se tenga datos más exactos y sencillos de calcular. El avance tecnológico que abre el camino para realizar levantamientos topográficos de una forma diferente a la realizada en el pasado, en la cual se realizaban levantamientos topográficos primero en mediciones por cinta métrica, después con los avances tecnológicos apareció el teodolito, la estación total y en la actualidad se utiliza los drones.	**Cinta métrica** 	
	Nivel topográfico o de ingeniero 	
	GPS 	**Nivel total** 

Drones		Para el uso correcto de estos equipos tecnológicos, la ubicación y la interpretación de los datos es necesario tener claro los conceptos básicos de trigonometría, caso contrario no se hará el uso correcto de los materiales topográficos.

Ejemplo: Debemos hallar la altura del edificio del Banco Central de Bolivia, teniendo los datos que se observan en el gráfico.



Vamos a buscar la fórmula que mejor se adecue al problema, en este caso para halla $''a''$.

$$Tan\ A = \frac{a}{b}$$

$$Tan\ 60° = \frac{a}{72\ m}$$

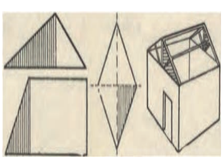
$$Tan\ 60° * 72\ m = a$$

$$a = (1.73205)(72\ m)$$

$$a = 124.7\ m$$

Como veras calculamos la altura del edificio de forma sencilla.

¡Realicemos la valoración!



Desde tiempos muy antiguos se aplicó las medidas de ángulos rectos en las contrucciones. El triángulo rectángulo es uno de los triángulos más importantes en la geometría, ya que su ángulo recto permite que otros polígonos sean estudiados dibujando en ellos triángulos rectángulos.

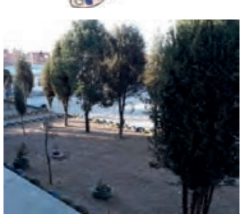
A partir de un triángulo rectángulo se definen los senos, cosenos tangentes (y sus inversas). Estas funciones a su vez tienen amplias aplicaciones en la física, porque describen fenomenos físicos como la corriente alterna, el movimiendo ondulatorio, (péndulo), ondas electromagnéticas etc.

Tiene muchas aplicaciones debido a que los triángulos rectángulos poseen propiedades que ayudan a los ingenieros a construir puentes, edificios, parques, etc, debido a que aplican en el cálculo de distancias y ángulos.

Actividad 46. Respondemos reflexivamente las siguientes preguntas:

1. ¿Qué otras aplicaciones en la ciencia y la tecnología tienen los triángulos rectángulos?
2. ¿Cómo aplicas las propiedades de los triángulos rectángulos en la cotidianidad?

¡Es hora de la producción!



Actividad 47. Vamos a elaborar un clinómetro

Construimos un clinómetro como la imagen de la izquierda u otros materiales que veas conveniente de acuerdo a tu contexto.

Ahora podemos probar midiendo la altura de los arboles de la plaza de la zona o nuestro colegio.

LAS FORMAS EN EL ESPACIO TRIDIMENSIONAL Y LOS RECURSOS TECNOLÓGICOS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

En la ciudad de La Paz, se puede observar el monumento Alexander, que en la parte superior tiene un objeto en forma de una esfera.

En el otro lado vemos un cubo elaborado con lanas de color, esta misma que se vio en otras tres, se encuentra en varias ciudades.


Monumento Alexander


Hilos y cubos de telar

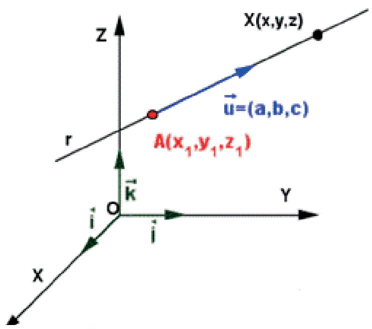
Actividad 48. Menciona y describe en tu cuaderno de ejercicios otras formas tridimensionales que se encuentran en tu entorno y el significado de ellas.

¿Qué son los cuerpos geométricos?

Los cuerpos geométricos son sólidos formados estructuralmente por figuras geométricas o planos delimitados en tres dimensiones (largo, ancho, alto), por que ocupa un lugar en el espacio, en consecuencia, tiene un área y volumen.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. El espacio tridimensional: punto, recta, segmento y plano

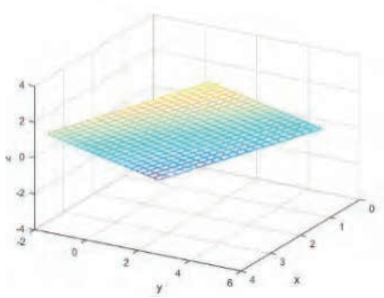


El espacio tridimensional también conocido como 3D y está delimitado por tres planos ortogonales y coordenadas cartesianas (eje x, eje y, eje z) empezamos con los siguientes elementos: punto, recta, segmento y plano.

En la figura se puede observar los puntos $A(x,y,z)$ y $X(x,y,z)$ y la recta $U=(a,b,c)$

Punto: es un ente abstracto que no tiene longitud, área o volumen y que puede ser visible, así mismo geométricamente definido aparece en la intersección de dos rectas.

Recta: es una sucesión infinita de puntos colineales formados con una misma dirección, así también se puede formar por la intersección de dos planos.



Segmento: está definido como una distancia entre un punto de partida y uno final, y se representa con letras para identificarlos.

Plano: es el espacio comprendido entre dos dimensiones, alto y ancho además que contienen infinitos puntos e infinitas rectas.

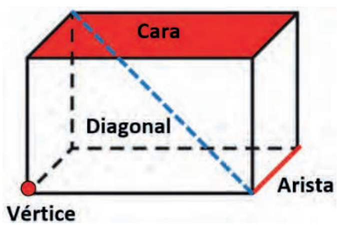
2. Clasificación de los cuerpos geométricos

Los cuerpos geométricos están divididos en dos grupos los poliedros y figuras de revolución además que están limitados por planos o curvas, ejemplo:


Pelota


Cono de transito


Dado



3. Características de los cuerpos geométricos

Poliedros: Es todo cuerpo geométrico limitado por planos y tiene los siguientes elementos: caras, vértices y aristas.

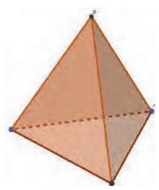
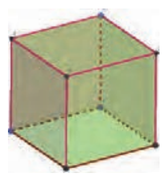
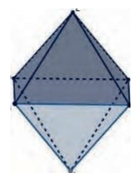
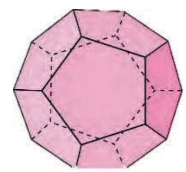
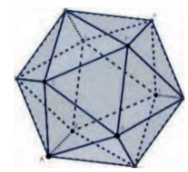
Vértice: Son puntos que se intersecan en tres o más aristas.

Aristas: Son segmentos que limitan a las caras o planos generados.

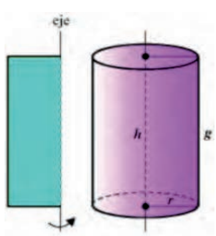
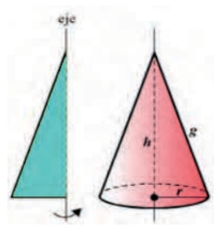
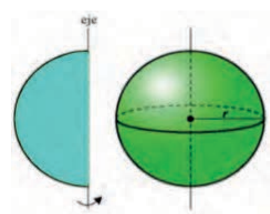
Caras: Son las superficies planas o regiones poligonales limitadas por las aristas.

Diagonal: Segmento que une dos vértices de distintas caras.

Existen **Poliedros de forma regular,** que tienen las mismas figuras geométricas iguales, como el: tetraedro, hexaedro, octaedro, dodecaedro, icosaedro.

Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
				

Figuras de revolución: El cuerpo de revolución se origina una vez que gira una figura, que es el semicírculo en un eje y este refleja caras en forma de curvas.

El ***cilindro*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un rectángulo alrededor de uno de sus lados.	El ***cono*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un triángulo rectángulo alrededor de uno de sus catetos.	La ***esfera*** es el cuerpo geométrico que se obtiene al girar un semicírculo alrededor de su diámetro.
		
Altura (h) es el segmento que une el centro de las dos bases. Es perpendicular a ambas bases. ***Radio (r)*** es el radio de cada uno de los círculos que forman sus bases. ***Generatriz (g)*** es el segmento que genera el cilindro. Su medida coincide con la de la altura.	***Altura (h)*** es el segmento que une el vértice y el centro de la base. Es perpendicular a la base. ***Radio (r)*** es el radio del círculo que forma su base. ***Generatriz (g)*** es el segmento que genera el cono.	***Radio (r)*** es el segmento que une el centro con un punto cualquiera de la superficie que limita la esfera. ***Diámetro (d)*** es el segmento que une dos puntos de la superficie esférica pasando por el centro.

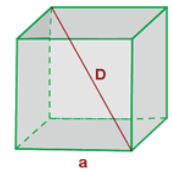
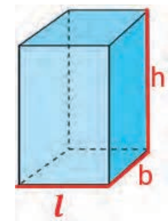
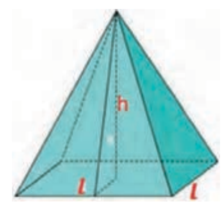
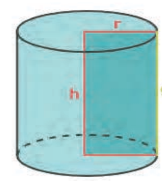
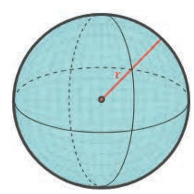
4. Áreas y volúmenes de cuerpos geométricos

Área: Es una superficie limitada y esta expresada en unidades cuadradas:

mm², cm², m², km², etc.

Volumen: Es el espacio que ocupa un cuerpo, esta expresado en unidades cúbicas:

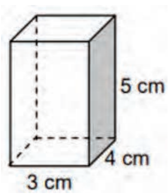
mm³, cm³, m³, km³, etc.

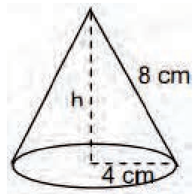
EJEMPLO	ÁREA	VOLUMEN	GRÁFICO
1. ¿Cuál es el área y volumen de un cubo que tiene aristas de 5m de longitud? **Datos:** *a=5m*	***A=6a²*** Reemplazando: *A=6*(5m)²* ***A=150 m²***	***V=a³*** Reemplazando: *V=(5m)³* ***V=125 m³***	
2. ¿Cuál el área y volumen del prisma de base rectangular? **Datos:** *Base,b=5m* *Ancho,l=4m* *Altura,h=4m*	***A=2(bl+lh+hb)*** Reemplazando: *A=2(5*4+4*4+4*5)* *=2(20m² +16m² +20m²)* *A=2(56 m²)* ***A=112m²***	***V= b* l*h*** Reemplazando: *V=5m*4m*4m* ***V=80m***	
3. ¿Cuál es el área y volumen de una pirámide cuadrangular? **Datos:** *Lados del cuadrado, l=4m* *Altura,h=5m*	***A=l²+2lh*** Reemplazando: *A=(4m)²+2(4m)(5m)* *A=16m²+40m²* ***A=56m²***	$\boldsymbol{V = \frac{1}{3} * A_b * h}$ Reemplazando: *V=1/3 (4m²)*(5m)* *V=1/3 (16m²)*(5m)* ***V=26.67m³***	
4. ¿Cuál es el área y volumen de un cilindro? **Datos:** *Radio,r=5m* *Altura,h=10m*	***A=2πr(r+h)*** Reemplazando: *A=2π(5m)(5m+10m)* *A=π(10m)(15m)* ***A=471,24 m²***	***V=π*r²*h*** Reemplazando: *V=π(5m)²*10m* *V=π(25m²)*10m* ***V=785.4m³***	
5. ¿Cuál es el área y volumen de una esfera? **Datos:** *Radio,r=3m*	***A=4πr²*** Reemplazando: *A=4π(3m)²* *A=4π(9m²)* ***A=113,10m²***	$\boldsymbol{V = \frac{4}{3} * \pi * r^3}$ Reemplazando: $V = \frac{4}{3} * \pi * (3m)^3$ $V = \frac{4}{3} * \pi * 27m^3$ V=113.1m³	

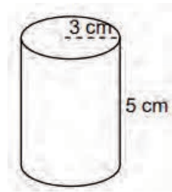
Actividad 49. Realicemos las siguientes actividades:

1. Una piscina tiene 8 m de largo, 5 m de ancho y 2 m de profundidad ¿Cuántos litros de agua serán necesarios para llenarla?
2. Un prisma rectangular tiene una base de 10 m, un ancho de 11 m y una altura de 12 m. ¿Cuál es su área y volumen?
3. Calculamos el área lateral, total y el volumen de una pirámide cuadrangular de 10 cm de arista básica y 12 cm de altura.
4. ¿Cuál es el área total y el volumen de un cilindro si su radio basal mide 8 cm y su altura mide 15 cm?
5. Calculamos el área y volumen de una esfera de 8 cm. de radio.
6. ¿Qué capacidad tiene un depósito cilíndrico si su radio es de 3 m y su altura 5 m?
7. Se desea pintar las paredes y el techo de un salón de planta 12 x 7 m, y altura 3,5 m. Sabiendo que dispone de dos puertas de 1 x 2 m, y tres ventanales de 2 x 2 m, ¿cuánta superficie habrá que pintar? (Hacer un dibujo explicativo) Si disponemos de botes de pintura para 25 m². ¿Cuántos botes necesitaremos?

8. Calculamos el área y volumen de las siguientes figuras geométricas







¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Si observas a tu alrededor encontraras muchos ejemplos de formas tridimensionales.

Todos los balones de fútbol tienen la forma de una esfera.	Algunos envases tienen forma de cilindro.	Edificio la Asamblea Legislativa Plurinacional	Algunos arboles navideños tiene forma de cono
			

Actividad 50. De manera reflexiva respondemos las siguientes preguntas:

¿Para qué nos sirve aprender a calcular áreas y volúmenes de manera geométrica?
¿Cómo ayudaron las formas en el espacio tridimensional al desarrollo tecnológico?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 51. Busca más ejemplos de formas tridimensionales y aplicando las fórmulas usadas anteriormente encuentra el volumen de esas figuras, para construirlos con materiales del contexto.

LABORATORIO MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

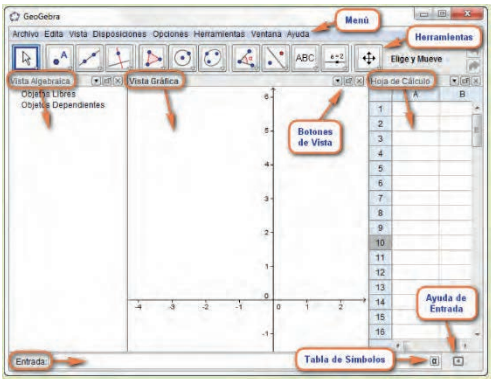
Actividad 52. Respondemos en el cuaderno de ejercicios las siguientes preguntas:
1. ¿Qué te imaginas al escuchar la palabra laboratorio?
2. ¿Estuviste en un laboratorio?
3. ¿Cómo defines laboratorio?

Escribe en tu cuaderno las respuestas y realiza un dibujo de como sería un laboratorio de matemática.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

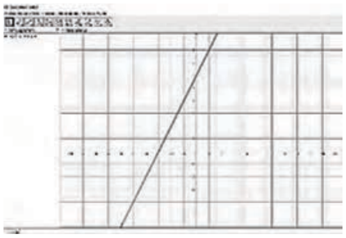
El laboratorio de matemáticas puede ser visto como una estrategia de enseñanza y aprendizaje; porque le permita a los alumnos descubrir, relacionar, aplicar y construir su aprendizaje; porque en definitiva *"Es necesario romper, con todos los medios, la idea preconcebida, y fuertemente arraigada en nuestra sociedad, proveniente con probabilidad de bloqueos iniciales en la niñez de muchos, de que la matemática es necesariamente aburrida, abstrusa, inútil, inhumana y muy difícil"* De Guzmán (2007, p.47).

1. GeoGebra

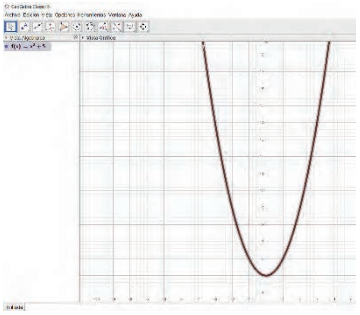


Geogebra es un software matemático creado por Markus Hohenwarter, disponible desde el año 2001, es un software libre y de fácil acceso, GeoGebra es un programa dinámico para la enseñanza y aprendizaje de la matemática. Combina dinámicamente geometría, álgebra, análisis y estadística en un único conjunto a nivel operativo, que prepara vistas gráficas, algebraicas, estadísticas y de organización de tablas y planillas vinculadas.

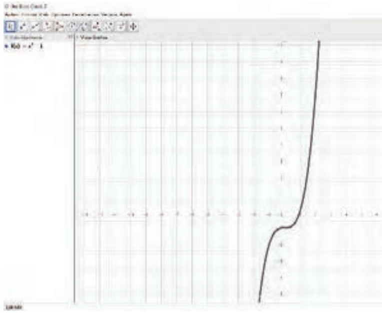
1.1. Gráficas de ecuaciones



Ecuación de una recta
$x+c=0$

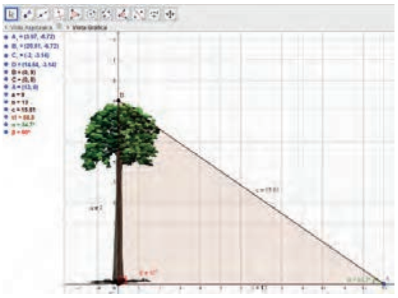


Ecuación cuadrática
$x^2+c=0$

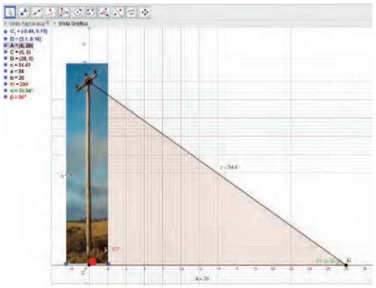


Ecuación cúbica
$x^3+c=0$

1.2. Gráficas de problemas de resolución con triángulos



Teniendo algunos datos podemos encontrar el tamaño de un arbol.



Calcular el tamaño de un poste de luz.

Actividad 53. Gráfiquemos las siguientes ecuaciones en Geogebra.

Ecuación de una recta	Ecuación cuadrática	Ecucación Cúbica
1) y = x+ 1 2) y = 3x - 2 3) y = -x -5	4) y = x² +2 5) y = 2x² -3 6) y = x² -5	7) y = x³ - 1 8) y = 2x³ + 2 9) y = 5x³ -3

2. Taller de pensamiento lógico

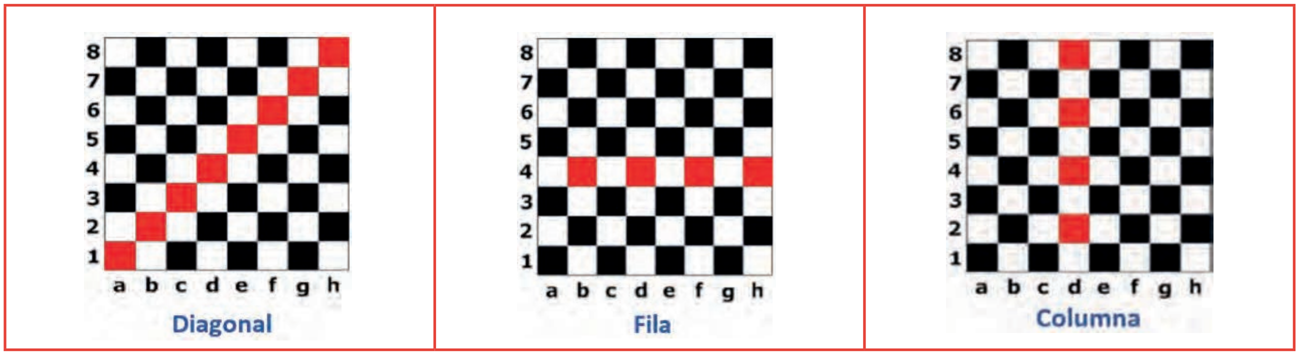
"Concebir el Taller de Pensamiento Lógico-Matemático a la luz del proceso de formación de maestros conlleva, en primera instancia, a plantearse dos aspectos fundamentales: ¿Qué se entiende por taller? y ¿Qué es el pensamiento lógico matemático? Realizando analogías, se entiende al espacio del taller como al estudio de un artesano, se espera un trabajo de producción, de elaboración, de transformación a partir de lo que el alumno sabe. En relación al segundo interrogante, se busca promover la comprensión, el aprendizaje profundo y la transferencia mediante una apuesta a una mayor actividad e involucramiento del alumno y un aumento del grado de conciencia y control sobre su proceso de aprendizaje, dónde se involucra necesariamente a la habilidad de solucionar situaciones nuevas de las que no se conoce de antemano un método mecánico de resolución. La idea central es que los alumnos vivencien la educación matemática como debate, intercambio de ideas, diálogo, respeto, reflexión y crítica. Creando, tanto dentro de los límites aula real como del espacio virtual, una co-construcción del conocimiento". *(Monfort Florencia Soledad)*

3. Ajedrez II

3.1. Nociones básicas de ajedrez

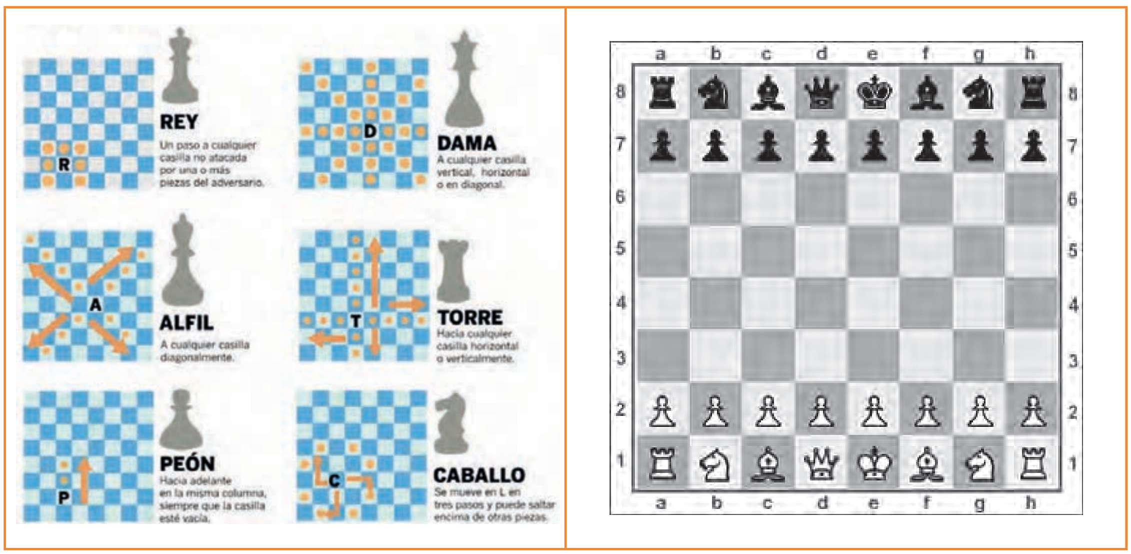
Dos aspectos fundamentales a considerar es el tablero y los movimientos.

El Tablero



Posición de las piezas en el tablero y el movimiento de cada uno de ellos.

Movimientos



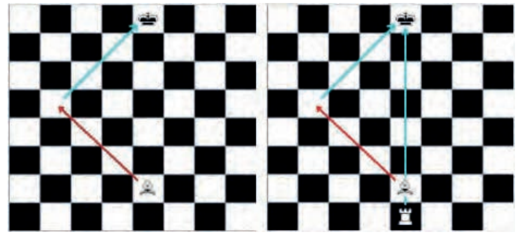
Un movimiento especial

El enroque. Es la única jugada en la que en el mismo turno se mueven dos piezas propias: el Rey y una Torre. Este movimiento sólo puede hacerlo cada jugador 1 vez en toda la partida, siendo opcional, pero cumpliendo una serie de requisitos, uno de ellos que lo imposibilitaría definitivamente y otros sólo temporalmente:

- Debe ser el primer movimiento tanto del Rey como de la Torre a enrocar. Si se mueve el Rey, el enroque queda imposibilitado para el resto de la partida. Si se mueve la Torre, aún es posible usar la otra.
- No debe haber ninguna pieza entre el Rey y la Torre, ni amiga ni contraria.
- El Rey no puede estar en jaque (atacado) en ese momento, ni su casilla destino, ni la intermedia. Otras casillas, como el origen de la Torre, si pueden estarlo.

El movimiento se efectúa en este orden sea cual sea el lado por el que se enroque: primero se desplaza el Rey dos casillas hacia la Torre y después se mueve la Torre a la casilla adyacente al otro lado del Rey.

Jaque. Se dice que un jugador está en jaque cuando su Rey está siendo atacado por una o dos piezas enemigas, y sería posible para el rival el capturarlo al siguiente turno. No es obligatorio anunciar explícitamente el jaque. Siguiendo las normas, el jugador debe actuar en consecuencia de forma que esa situación desaparezca en su turno. Para ello puede:



- Capturar la pieza que ataca, si dispone de alguna pieza que lo haga, y sólo hay una pieza atacando.
- Poner una pieza en el medio a modo de escudo, si la pieza que ataca no es un Caballo y no hay más de una atacando.
- Mover el Rey a una casilla tal que deje de estar en jaque, si hay.

Jaque mate. Se produce jaque mate cuando un jugador no puede ejecutar ningún movimiento que le permita salir del jaque, entonces ha perdido la partida.

Tablas. Existen muchas posibilidades de acabar una partida en tablas:

- Un jugador que no está en jaque no puede mover en su turno (ahogado).
- Ambos jugadores han acordado las tablas.
- Se ha producido la repetición de la misma posición 3 veces (no con los mismos movimientos necesariamente, pero si con las mismas piezas y los mismos posibles movimientos para ambos bandos).
- No existen suficientes piezas por ningún bando para forzar un jaque mate. Si aún queda algún peón, no se aplica. Casos posibles: Rey contra Rey, Rey contra Rey y Caballo o Alfil.
- Se produce una secuencia de 50 jugadas de cada bando seguidas sin captura o movimiento de peón.

Valor de las piezas

Símbolo					
Pieza	**Peón**	**Caballo**	**Alfil**	**Torre**	**Dama**
Valor	**1**	**3**	**3**	**5**	**9**

3.2. Problemas de razonamiento

Los mates más rápidos que existen:
a) Mate del loco. Se produce cuando un jugador abre su rey a un ataque fatal, como se muestra en la siguiente partida:

b) Mate del pastor. Es de los más famosos, sigue la secuencia en las siguientes imágenes:

c) El mate del tonto. Es muy raro de ver, pero en los más novatos puede ocurrir, se trata del siguiente diagrama:

IMPORTANTE: Es necesario que investigues y practiques el juego del ajedrez para ser un campeón.

4. Sudoku

- Solo se pueden usar números del 1 al 9.
- Cada bloque de 3×3 solo puede contener números del 1 al 9.
- Cada columna vertical solo puede contener números del 1 al 9.
- Cada fila horizontal solo puede contener números del 1 al 9.
- Cada número del bloque de 3×3, de la columna vertical o de la fila horizontal solo se puede utilizar una vez.
- El juego finaliza cuando toda la cuadrícula de Sudoku se completa correctamente con los números.

Ejemplo: Se tiene a la izquierda el Sudoku sin resolver y a la derecha el resuelto.

	6		1		4		5	
		8	3		5	6		
2								1
8			4		7			6
		6				3		
7			9		1			4
5								2
		7	2		6	9		
	4		5		8		7	

9	6	3	1	7	4	2	5	8
1	7	8	3	2	5	6	4	9
2	5	4	6	8	9	7	3	1
8	2	1	4	3	7	5	9	6
4	9	6	8	5	2	3	1	7
7	3	5	9	6	1	8	2	4
5	8	9	7	1	3	4	6	2
3	1	7	2	4	6	9	8	5
6	4	2	5	9	8	1	7	3

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para aprender las nociones básicas de ajedrez.

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para resolver problemas de razonamiento, mate en dos y mate en tres movimientos, a través de la plataforma virtual Lichess.

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Todo trabajo de investigación tiene como resultado la adquisición de conocimientos, mejorar las tecnicas en alguna actividad, elaborar correctamente un trabajo. Las personas buscamos más información de algo que nos interesa o necesitamos saber.

Actividad 54. Respondemos en el cuaderno de ejercicios las siguientes preguntas:

- ¿Consideras que es importante el desarrollo del pensamiento lógico matemático?, ¿por qué?
- ¿Qué actividades nos ayudan a desarrollar el pensamiento lógico matemático?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 55. Realicemos las siguientes actividades:

1. Escribe en tu cuaderno la experiencia de haber usado geogebra, haber jugado ajedrez o Sudoku. Cuál de estas actividades te gusto más y si buscaste más información que tus compañeros no conocen.

Actividad	Información	Bibliografía (videos, libros, entrevistas)
Geogebra		
Ajedrez		
Sudoku		

2. Con materiales del contexto construye las piezas y un tablero de ajedrez, para organizar un torneo con la participación de los estudiantes.

3 SECUNDARIA

ÁREA MATEMÁTICA

CIENCIA TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN
Matemática

ECUACIONES APLICADAS AL CONTEXTO Y LA TECNOLOGÍA

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Una familia desea rentar un automóvil, para ello, se dirigen a una empresa que alquila autos y cobra Bs 200 al día y Bs 1,5 por 1 kilómetro recorrido. El padre renta un auto durante dos días y su cuenta llega a Bs 610. ¿Cuántos kilómetros (km) recorrió aproximadamente? Para solucionar este problema, debemos recurrir a la guía para modelar ecuaciones.

Identificamos la variable. Nos piden calcular el número de Km.

$$x = \textit{número de kilómetros}$$

Del lenguaje común al algebraico. Convertimos toda la información al lenguaje algebraico.

Lenguaje común	Algebraico
Número de kilómetros recorridos	x
Costo del recorrido (Bs 1,5 por 1 km)	$1{,}5x$
Costo diario (Bs 200 por día)	$2(200)$

Formulamos el modelo. Proponemos un modelo
Costo del recorrido + costo diario = costo total

$$1{,}5x + 2(200) = 610$$

Solucionamos. Ahora realizamos operaciones algebraicas

$$1{,}5x + 2(200) = 610 \rightarrow x = \frac{210}{1{,}5} = 140$$

Entonces recorrieron 140 kilómetros.
Como podemos observar de esta manera se puede aplicar las ecuaciones en la resolución de problemas en el contexto.

GUÍA PARA MODELAR CON ECUACIONES

Paso 1: identificamos la variable. Identificamos la cantidad que el problema pide calcular. En general, esta cantidad puede ser determinada por una cuidadosa lectura de la pregunta que se plantea en el problema.

Paso 2: del lenguaje común al lenguaje algebraico. Leemos nuevamente el problema y lo expresamos en función a la variable que hemos definido en el paso 1 para organizar esta información, a veces es útil trazar un diagrama o hacer una tabla.

Paso 3: formulamos el modelo. Formulamos una ecuación (o modelo) que resuelva el problema planteado.

Paso 4: solución y prueba del resultado. Resolvemos la ecuación, verificamos el resultado y lo expresamos como una respuesta a la pregunta planteada.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Términos semejantes y su relación con la producción

Son términos semejantes aquellos que difieren en sus coeficientes o parte numérica pero que tienen la misma parte literal. Por ejemplo, $6xy$ y $-3xy$ son términos semejantes; $5x^2z$ y $-\sqrt{8}x^2z$ son términos semejantes; pero, $-4a^3b^2$ y $7a^2b^8$ son términos diferentes a pesar de contener la misma parte literal ya que sus exponentes son diferentes respectivamente.

Una **expresión algebraica** de dos o más términos semejantes puede reducirce a un solo término. Por ejemplo, $5a^2b^3 - 2a^2b^3 + a^2b^3$ puede reducirce a $4a^2b^3$, para ello debemos realizar el siguiente procedimiento de reducción de términos semejantes:

a) Agrupamos los coeficientes de los términos semejantes y copiamos el término literal.

$$5a^2b^3 - 2a^2b^3 + a^2b^3 = (5 - 2 + 1)a^2b^3$$

b) Sumamos los coeficientes agrupados.

$$(5 - 2 + 1)a^2b^3 = 4a^2b^3$$

2. Operaciones con expresiones algebraicas

La **suma** de expresiones algebraicas se realiza reduciendo términos semejantes. Para ello, las expresiones se colocan en filas con los términos semejantes en la misma columna, posteriormente se procede a realizar la suma algebraica.

Ciencia divertida

Ley de signos de sumas y restas:

a. Signos iguales se suman las cantidades y mantienen su signo.

$$(+)+(+)=(+)$$
$$(-)+(-)=(-)$$

b. Signos diferentes se restan las cantidades y domina signo del mayor.

$$(+)+(+)=(+)$$
$$(-)+(-)=(-)$$

Propiedades de la suma:

1. Asociativa
$$(x+y)+z=x+(y+z)$$
2. Conmutativa
$$x+y=y+x$$
3. Elemento neutro
$$x+0=x=0+x$$

Ley de signos de multiplicación

$$(+)\times(+)=(+)$$
$$(-)\times(-)=(+)$$
$$(+)\times(-)=(-)$$
$$(-)\times(+)=(-)$$

Propiedades de la multiplicación

1. Asociativa
$$(x\times y)\times z=x\times(y\times z)$$
2. Conmutativa
$$x\times y=y\times x$$
3. Distributiva respecto a la adición o sustracción.
$$x(y\pm z)=(x\times y)\pm(x+z)$$
4. Elemento neutro
$$x\times 1=x=1\times x$$

Ley de signos de la división

$$(+)\div(+)=(+)$$
$$(-)\div(-)=(+)$$
$$(-)\div(+)=(-)$$
$$(-)\div(+)=(-)$$

Propiedades de potenciación:

a. Producto de bases iguales
$$a^n\times a^m=a^{n+m}$$
b. Cociente de bases iguales
$$\frac{a^n}{a^m}=a^{n-m}$$
c. Potencia inversa
$$a^{-n}=\frac{1}{a^n}$$
d. Exponente cero
$$a^0=1$$

Ejemplo 1. Sumamos: $3x+5y^3+6xy;\ 9x-4y^3-2xy; -4x+7y^3-xy.$

$$\begin{array}{rrr} 3x & +5y^3 & +6xy \\ 9x & -4y^3 & -2xy \\ -4x & +7y^3 & -xy \\ \hline 8x & +8y^3 & +3xy \end{array}$$

Por lo tanto, el resultado es $8x+8y^3+3xy$

Ejemplo 2. Sumamos: $\frac{1}{2}a-5ab-3b^2;\ 4a+5b^2; -2a+3ab+4b^2.$

Por lo tanto, el resultado es $\frac{5}{2}a\ -2ab\ +6b^2$

Ejemplo 3. Sumamos: $3x+5y^3+6xy; 9x-4y^3-2xy; -4x+7y^3-xy.$

Para la **resta** de dos expresiones algebraicas se cambia el signo de los términos del sustraendo, posteriormente se realiza la suma de los términos semejantes.

Ejemplo 4. Restamos: $9x-6y^2+4xy$ de $3x-3y^2-7xy.$

$$-\frac{\begin{array}{r}3x-3y^2-7xy\\ 9x-6y^2+4xy\end{array}}{} = \frac{\begin{array}{r}3x-3y^2-7xy\\ -(9x-6y^2+4xy)\end{array}}{} = \frac{\begin{array}{r}3x-3y^2-7xy\\ -9x+6y^2\ {}_2\cdot 4xy\end{array}}{-6x+3y^2-11xy}$$

Ejemplo 5. Restamos: $-3a^3+12ab-21b^3$ de $14-8ab+6b^3.$

$$-\frac{\begin{array}{r}14a^3-\ 8ab\ +\ 6b^3\\ -3a^3+12ab-21b^3\end{array}}{} = \frac{\begin{array}{r}14a^3-\ 8ab\ +\ 6b^3\\ -(-3a^3+12ab-21b^3)\end{array}}{} = \frac{\begin{array}{r}14a^3-\ 8ab\ +\ 6b^3\\ 3a^3-12ab+21b^3\end{array}}{17a^3-20ab+27b^3}$$

De igual manera se puede escribir la resta de manera horizontal:

$$\left(14a^3-8ab+6b^3\right)-\left(-3a^3+12ab-21b^3\right)$$
$$\rightarrow 14a^3-8ab+6b^3+3a^3-12ab+21b^3=17a^3-20ab+27b^3$$

Para **multiplicar** dos o más expresiones algebraicas, debemos multiplicar los términos contenidos en los factores de dicha multiplicación.

a. Para **multiplicar monomios** utilizamos propiedades de potenciación (producto de bases iguales) y las leyes conmutativa y asociativa.

Ejemplo 1. Multiplicamos: $-2x^3\ ;3xy;-7x^2y^2;2y^3x.$

Aplicamos las leyes asociativa y conmutativa de la multiplicación

Escribimos $\left[(-2)(3)(-7)(2)\right]\left[(x^3)(x)(x^2)(x)\right]\left[(y)(y^2)(y^3)\right]$

Multiplicamos los coeficientes según la ley de signos y aplicamos la propiedad de potencia de bases iguales.

$$(84)\left(x^{3+1+2+1}\right)\left(y^{1+2+3}\right)=84x^7y^6$$

b. Para **multiplicar un monomio por un polinomio**, debemos multiplicar el monomio por cada término del polinomio y sumar los términos semejantes.

Ejemplo 2. Multiplicamos: $-\frac{1}{3}x^3\text{y}$ por $3+x^2y^3-36x.$

$$\left(-\frac{1}{3}x^3y\right)\left(3+x^2y^3-36x\right)=\left(-\frac{1}{3}x^3y\right)(3)+\left(-\frac{1}{3}x^3y\right)\left(x^2y^3\right)-\left(-\frac{1}{3}x^3y\right)(36x)$$

$$=-x^3y-\frac{1}{3}x^{3+2}y^{1+3}+12x^{3+1}y=-x^3y-\frac{1}{3}x^5y^4+12x^4y$$

c. Para **multiplicar dos polinomios**, se debe multiplicar cada término de un polinomio por los términos del otro polinomio y posteriormente reducir términos semejantes.

Ejemplo 3. Multiplicamos: 3a + 2a² -4 por -a -3.

1. Multiplicamos el polinomio por -a.
2. Multiplicamos el polinomio por -3
3. Sumamos términos semejantes

$$\begin{array}{r} 2a^2+3a-4 \\ \underline{-a-3\qquad\quad} \\ -2a^3-3a^2+4a\qquad \\ \underline{-6a^2-9a+12} \\ -2a^3-9a^2-5a+12 \end{array}$$

Ordenamos de manera descendente según las potencias de a

Para **Dividir** expresiones algebraicas, debemos aplicar propiedades de potenciación como la división de bases iguales.

a. La división entre dos monomios consiste en determinar el cociente de los coeficientes numéricos y variables.

Ejemplo 1. Dividimos: $36x^5y^3z^2$ entre $-3x^3y^2z$

$$\text{Solución}: \frac{36x^5y^3z^2}{-3x^3y^2z}=\left(\frac{36}{-3}\right)\left(\frac{x^5}{x^3}\right)\left(\frac{y^3}{y^2}\right)\left(\frac{z^2}{z}\right)=(-12)\left(x^{5-3}\right)\left(y^{3-2}\right)\left(z^{2-1}\right)=-12x^3yz$$

b. Para la división de polinomios realizamos:

1°. Ordenamos los términos de ambos polinomios en orden descendente o ascendente de acuerdo con la potencia de una de las variables comunes a ambos polinomios.

2°. Dividimos el primer término del dividendo entre el primer término del divisor. Obteniendo el primer término del cociente.

3°. Multiplicamos el primer término del cociente por el divisor y restamos del dividendo, obteniendo así un nuevo dividendo. Repetimos este procedimiento hasta que se obtenga un residuo, el cual tendrá un grado menor que el grado del divisor o cero.

4°. Por último, escribimos el resultado de la siguiente forma.

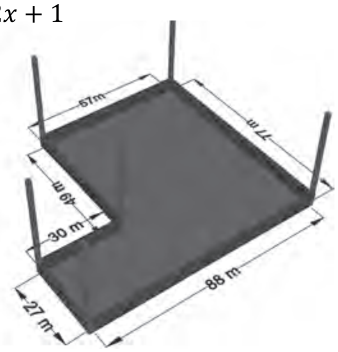
$$\frac{Dividendo}{Divisor}=Cociente+\frac{Residuo}{Divisor}$$

Ejemplo 2. Dividimos: $2x^2+4x^4-3x^3-3+x$ entre x^2+2x+1

$$\begin{array}{rl} 4x^4-3x^3+2x^2+x-3 & \big|\ \underline{x^2+2x+1} \\ \underline{-4x^4-8x^3-4x^2}\qquad\qquad & \ \ 4x^2-11x+20 \\ -11x^3-2x^2+x\qquad & \\ \underline{11x^3+22x^2+11x}\qquad & \\ 20x^2+12x-3 & \\ \underline{-20x^2-40x-20} & \\ -28x-23 & \end{array}$$

Por lo tanto el resultado de $\dfrac{4x^4-3x^3+2x^2+x-3}{x^2+2x+1}$ es $4x^2-11x+20+\dfrac{-28x-23}{x^2+2x+1}$

Problemas de aplicación

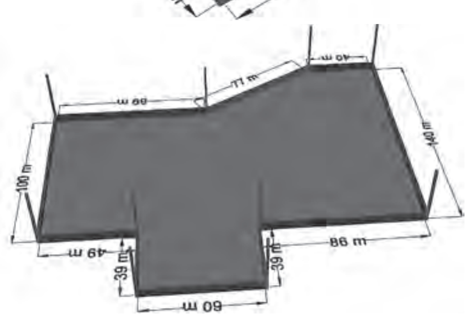


Problema 1. Una empresa construye las bases de dos viviendas, si x representa el número de metros lineales del cimiento y el costo de construcción es: $2x^2+6x-1100$ para la vivienda pequeña y $4x^2+12x+2300$ para la grande, ¿cuál es el costo total de la construcción de ambos cimientos?

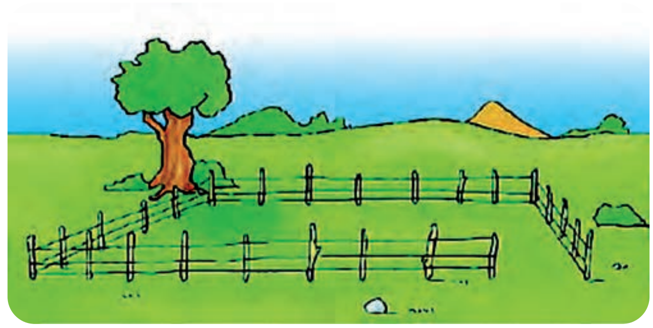
Solución: el costo total se obtiene, de la suma de los costos de ambos cimientos.

$$\begin{array}{l} 2x^2+6x-1100 \\ \underline{4x^2+12x+2300} \\ 6x^2+18x+1200 \end{array}$$

$\therefore$ El costo de producción es de Bs $6x^2+18x+1200$.



Problema 2. Se desea calcular el área de la superficie de un terreno rectangular cuyas dimensiones de largo y ancho están determinadas por las expresiones $3a^2-4a-17; 2a-3$ respectivamente.



Solución: el área se determina multiplicando el largo por el ancho.

$$\begin{array}{r} 3a^2-4a-17 \\ 2a-3 \\ \hline 6a^3-8a^2-34a \\ -9a^2+12a+51 \\ \hline 6a^3-17a^2-22a+51 \end{array}$$

$\therefore$ El área es: $6a^3-17a^2-22a+51$

Problema 4. El ingreso mensual de un comerciante se representa por la expresión $7x^4+5x^2+10$. Sus gastos mensuales son representados por las expresiones: $3x^2+3; 2x^4+x; 3x^4+4x$. Encontremos la ganancia del comerciante, sabiendo que estos se obtienen restando todos los gastos al ingreso total. Además, se sabe que el valor de $x=5$.

Solución: debemos restar los gastos al ingreso mensual:

$$\begin{aligned} &= 7x^4+5x^2+10-(3x^2+3)-(2x^4+x)-(3x^4+4x) \\ &= 7x^4+5x^2+10-3x^2-3-2x^4-x-3x^4-4x \\ &= 7x^4-3x^4-2x^4+5x^2-3x^2-x-4x+10-3 \\ &= 2x^4+2x^2-5x+7 \end{aligned}$$

Reemplazamos $x=5$ que es el valor del producto:

$$2(5)^4+2(5)^2-5(5)+7=2(625)+2(25)-25+7=1250+50-25+7=1307-25=1282$$

$\therefore$ El comerciante tiene una ganancia mensual de Bs 1282.

Actividad 1. En nuestros cuadernos resolvemos los siguientes ejercicios propuestos.

1. Eliminamos los signos de agrupación y simplificamos las expresiones resultantes combinando términos semejantes.

   $a)$ $(x+3y-z)-(2y-x+3z)+(4z-3x+2y)$ $\quad$ $c)$ $3x+4y+3\{x-2(y-x)-y\}$

   $b)$ $3(x^2-2yz+y^2)-4(x^2-y^2-3yz)+x^2+y^2$ $\quad$ $d)$ $3-\{2x-[1-(x+y)]+[x-2y]\}$

2. Sumamos las expresiones algebraicas en cada uno de los grupos siguientes:

   $a)$ $2x^2+y^2-x+y,\ \ 3y^2+x-x^2,\ \ x-2y+x^2-4y^2$

   $b)$ $a^2-ab+2bc+3c^2,\ 2ab+b^2-3bc-4c^2,\ ab-4bc+c^2-a^2,\ \ a^2+2c^2+5bc-2ab$

   $c)$ $2a^2bc-2acb^2+5c^2ab,\ \ 4b^2ac+4bca^2-7ac^2b,\ 4abc^2-3a^2bc-3ab^2c,\ b^2ac-abc^2-3a^2bc$

3. Restamos la segunda expresión de la primera en las expresiones siguientes:

   $a)$ $3xy-2yz+4zx,\ 3zx+yz-2xy$

   $b)$ $ax^2+3y^2-6x+4y-2,\ 2x-y^2+3x^2-4y+3$

   $c)$ $r^3-3r^2t+4rt^2-t^3,\ \ 2t^3+3t^2r-2tr^2-3r^3$

4. Restamos $xy-3yz+4xz$ del doble de la suma de las expresiones siguientes: $3xy-4yz+2xz; 3yz-4zx-2xy$.
5. Obtenemos el producto de las expresiones algebraicas de cada grupo.

   $a)$ $4x^2y^5,\ -3x^3y^2$ $\quad$ $e)$ $x^2-4x+16,\ \ y+4$

   $b)$ $3abc^2,\ -2a^3b^2c^4,\ 6a^2b^2$ $\quad$ $f)$ $y^3+y^2z+yz^2+z^3,\ \ y-z$

   $c)$ $r^2s+3rs^3-4rs+s^3,\ 2r^2s^4$ $\quad$ $g)$ $3x-y-z^2,\ \ 2y+x+3z^2$

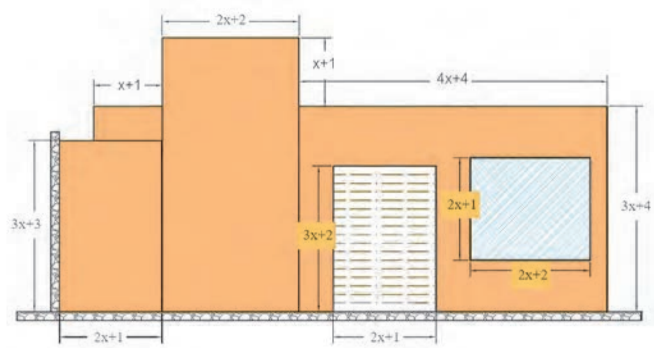
   $d)$ $y-4,\ y+3$ $\quad$ $h)$ $3-x-y,\ 2x+y+1,\ \ x-y$

6. Realizamos las siguientes divisiones:

$a)\ -\dfrac{15x^4yz^3}{3x^2y^4z}$ $\quad b)\ \dfrac{-32r^3s^2t}{-6r^5st^2}$ $\quad c)\ \dfrac{4ab^3-3a^2bc+12a^3b^2c^4}{-2ab^2c^3}$ $\quad d)\ \dfrac{4x^3\quad -5x^2-3x}{x+1}$

$e)\ \dfrac{27a^3-64}{3a-4}$ $\quad f)\ \dfrac{1-x^2+x^4}{1-x}$ $\quad g)\ \dfrac{2a^3+a^5-3a-2}{a^2-3a+1}$ $\quad h)\ \dfrac{4a^3b+5a^2b^2+a^4+2ab^3}{a^2+2b^2+3ab}$

7. Debemos pintar la fachada color naranja claro de una tienda cuyas dimensiones se observa en la figura. ¿Cuál es el área total que se debe pintar? Tomamos en cuenta que no se pintará la ventana y la puerta de persiana metálica. ¿Cuánto suma el área de la puerta y la ventana?
8. Deseamos calcular el volumen de una piscina de base rectangular cuyas dimensiones longitudinales son: $12(x+2y)$ metros de largo, $8(x-y)$ metros de ancho y $-2(x-3y)$ metros de altura. ¿Cuál es el volumen de la piscina?
9. En nuestros cuadernos proponemos cinco problemas que se puedan solucionar con una división de monomios.



3. Resolución de ecuaciones de primer grado

Una **Igualdad** $(=)$, esta dada por dos cantidades iguales o equivalentes siempre y cuando tengan el mismo valor.

Ejemplos: $(3+1)^3=16$ $\qquad (3)^2+(1)^2=16$ $\qquad \sqrt{256}=16$

Entonces $(3+1)^3; (3)^2+(1)^2; \sqrt{256}$ son expresiones equivalentes a 16.

Por lo tanto, ecuación es una igualdad con una o más variables representadas con letras. Sí al remplazar valores definidos a sus variables se verifican para todos los casos se llaman identidad y si solo verifica para ciertos valores de las incognitas se llama ecuación condicional.

Ejemplo 1. $x+6=-1$ es válido solo para $x=-7$; por tanto, es una ecuación condicional.

Ejemplo 2. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ es válido para todos los valores de x e y; por tanto, es una identidad.

Las ecuaciones pueden ser fórmulas que se utilizan para determinar una magnitud especifica, por ejemplo:

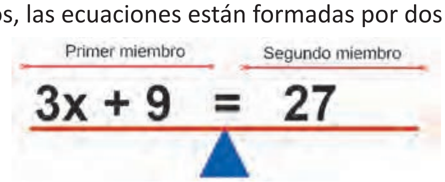
- La fórmula de $P=mg$ se utiliza para determinar peso equivalente al producto de la masa (m) de un cuerpo por la gravedad (g) terrestre que es un aproximado de $9{,}81\dfrac{m}{s^2}$.
- La fórmula geométrica $A=\pi r^2$ se utiliza para encontrar el área de un circulo dada la longitud de su radio.

De igual manera, existen ecuaciones con expresiones algebraicas, en las que determinamos el valor de la variable o simplemente representar algún problema a través de un modelo matemático.

Ejemplos:

$$x+9=29 \qquad x+y=7 \qquad x^2-3=0 \qquad \frac{3}{x+3}-\frac{1}{x^2-4}=\frac{7}{x+2}$$

Al igual que una balanza de platillos, las ecuaciones están formadas por dos miembros:



Solución de una ecuación. Para calcular la solución de una ecuación debemos hallar el valor o los valores de las variables que verifican la igualdad.

Ejemplos:

a. Sí la ecuación $x+3=11$, la solución será $x=8$ ya que, al sustituir la variable, se obtendrá $8+3=11$

b. En la ecuación $x^2-4=21$, las soluciones son $x=5$, $x=-5$

c. En la ecuación $x-y=12$, las soluciones pueden ser $x=13$, $y=-1$

El **Grado de una ecuación** se obtiene del término que contenga la variable con el mayor exponente.

Ejemplos:

a. La ecuación $5x+3=11$, es de primer grado, porque la incógnita tiene un valor de 1

b. La ecuación $x^2-4x+10=0$, es de segundo grado, porque la incógnita tiene exponente 2

c. La ecuación $x-y=12$, es de primer grado, porque ambas variables tienen exponente 1

4. Ecuaciones de primer grado con una incógnita

Son ecuaciones equivalentes cuya resolución requiere operaciones elementales (suma, resta, multiplicación o división) en ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la variable o incógnita.

Investiga

Investigamos más sobre los teoremas de ecuaciones.
TEOREMAS: sea la ecuación lineal $ax=b$

a) Si $a\neq 0$, $x=\frac{b}{a}$ solución única

Demostración: $ax=b$

$$\frac{1}{a}(ax)=\frac{1}{a}(b)\rightarrow\left(\frac{1}{a}*a\right)x=\frac{b}{a}$$

$$1x=\frac{b}{a}\rightarrow x=\frac{b}{a}$$

Supongamos ahora que x_0 es solución, entonces, al sustituir en $ax=b$ obtenemos:

$$ax_0=b\rightarrow\frac{1}{a}(ax_0)=\frac{1}{a}(b)$$

$$\left(\frac{1}{a}*a\right)x_0=\frac{b}{a}\rightarrow x_0=\frac{b}{a}$$

$\therefore$, $x=\frac{b}{a}$ es la solución única.

b) Si $a=0$ pero $a\neq b$, entonces $ax=b$ no tiene solución

Demostración:

Sea $=0$, entonces, para todo $k\in R, ak=0$, entonces, $ax\neq 0$, por tanto, k no es solución de $ax=b$

c) Si $a=0$ y $b=0$, todo $k\in R$, es solución de $ax=b$

Demostración:

Si a $=0$, para todo $k\in R, ak=0$, si b = 0, entonces, cualquier número real k es solución de $ax=b$

Ejemplo 1. Calculemos el valor de x en la ecuación: $3x+2=6$

Solución: Agrupamos a los términos que contengan a la variable en el primer miembro y a los términos independientes en el segundo miembro, para ello, se aplican operaciones fundamentales, según corresponda.

$3x+2=6\rightarrow 3x+2-2=6-2$ se resta 2 en ambos miembros

$3x=4$

$(3x)\frac{1}{3}=(4)\frac{1}{3}$ se multiplica ambos miembros por $\frac{1}{3}$

$x=\frac{4}{3}$

Para verificar la solución, remplazamos el valor hallado en la variable de la ecuación original

$$3\left(\frac{4}{3}\right)+2=6\rightarrow 4+2=6$$

$$6=6$$

Por lo tanto, la solución es $x=4/3$

Ejemplo 2. Calculemos el valor de la variable en la ecuación: $2a-16=5a-1$

Solución: $2a-16=5a-1\rightarrow 2a-16=5a-1$ Se suma 16 y se resta $5a$

$2a-16+16-5a=5a-1+16-5a$

$-3a=15$ Dividimos entre (-3)

$-\frac{3a}{-3}=\frac{15}{-3}$

$a=-5$

Por lo tanto, la solución es $a=-5$

Ejemplo 3. Determine el conjunto solución de: $21m-19-7m=5+8m+2$

Solución: $21m-19-7m=5+8m+2\rightarrow 21m-7m-8m=5+2-19$

$$6m=-12\rightarrow m=\frac{-12}{6}\rightarrow m=-2$$

Por lo tanto, el conjunto solución es $\{-2\}$

Ejemplo 4. Determinar la solución de la ecuación $-x-5-4x=13x-2-18x$

Solución:

$$-x-5-4x=13x-2-18x$$
$$-x-4x-13x+18x=+5-2$$
$$0x=+3$$

El conjunto solución es vacío, ya que todo número multiplicado por cero es cero (ver inciso b del teorema)

Ejemplo 5. Determinar el conjunto solución de la ecuación:

$$4y-9+5y+5=10y-4-y$$

Solución: $4y-9+5y+5=10y-4-y$

$$4y+5y-10y+y=-4+9-5$$
$$0y=0$$

El conjunto solución son todos los números reales, ya que cualquier número multiplicado por cero es cero (ver inciso c del Teorema)

Ejemplo 6. Resolvemos

$$3x-\{2x-(7x+1)-10\}=13x-\{5-[x-(7-2x)-12]+15x\}$$

Solución. Se suprime los signos de agrupación y se resuelve la ecuación:

$$3x-\{2x-7x-1-10\}=13x-\{5-[x-7+2x-12]+15x\}$$

$$3x-2x+7x+1+10=13x-\{5-x+7-2x+12+15x\}$$

$$3x-2x+7x+1+10=13x-5+x-7+2x-12-15x$$

$$3x-2x+7x-13x-x-2x+15x=-5-7-12-1-10$$

$$7x=-35 \rightarrow x=-\frac{35}{7}=-5$$

$Por\ consiguiente, el\ valor\ de\ x\ es: -5$

OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL
PLURINACIONAL BOLIVIANA

Si:

$$P(x)=\frac{x}{1+x}$$

$$F(x)=\frac{1}{1+x}$$

$$G(x)=x$$

Además:

$$P\{F[G(x)]\}=\frac{1}{10}$$

Calcular "x"

5. Resolución de problemas del contexto con ecuaciones de primer grado

1. La edad de Carolina excede en 2 años a la de Marco y el doble de la de Carolina más 12 años equivale al triple de la edad de Marco. Hallar ambas edades.

Solución

Datos:

$Edad\ de\ Carolina: x$

$Edad\ de\ Marco: x-2$

Planteamiento

$$2(edad\ de\ Carolina)+12\ años=3(edad\ de\ Marco)$$

$$2x+12=3(x-2)\rightarrow 2x+12=3x-6$$

$$2x-3x=-6-12$$

$$-x=-18\rightarrow \boldsymbol{x}=18$$

Por lo tanto, Carolina tiene 18 años y Marco 16 años

2. 90 litros de agua tiene un 6% de azúcar, ¿cuánta cantidad de agua deberíamos aumentar para tener agua al 2% de azúcar?

Solución

Datos:

$90\ litros\ de\ agua\ al\ 6\%\ de\ azúcar$

$x\ litros\ a\ agua$

$(90+x)\ litros\ a\ agua\ al\ 2\%\ de\ azúcar$

Planteamiento

$$6\%\ de\ 90\ litros=2\%\ de\ (90+x)\ litros$$

$$\frac{6}{100}(90)=\frac{2}{100}(90+x)\rightarrow 5{,}4=1{,}8+\frac{x}{50}\rightarrow\frac{x}{50}=5{,}4-1{,}8$$

$$x=50*3{,}6=180$$

Debemos aumentar 180 litros para obtener agua al 2% de azúcar

3. Luanna tiene Bs 110 en billetes de Bs 10 y monedas de Bs 5, el número de billetes excede en 2 a las monedas ¿Cuántos billetes de Bs 10 y monedas de Bs 5 tiene Luanna?

Solución

Datos:

$N°\ de\ billetes\ de\ Bs\ 10\ es\ x$

$N°\ de\ monedas\ de\ Bs\ 5\ es\ x-2$

Planteamiento

La suma de los billetes con las monedas da como resultado el total.

$$(\text{denominación})(\text{billetes de Bs10})+(\text{denominación})(\text{monedas Bs 5})=\text{total}$$

$$10x+5(x-2)=110\rightarrow 10x+5x-10=110\rightarrow 15x=120$$

$$x=\frac{120}{15}=8$$

Luanna tiene 8 Billetes de Bs 10 y 6 monedas de Bs 5

4. Ángel pago Bs 66 por un kit de aseo personal, una pasta dental, unos jabones y un Champú. Si el costo del champú excede en Bs 15 al de la pasta dental y en Bs 3 al de los jabones, determinar el costo de cada artículo.

Datos:

Costo de champú: x

Costo de jabones: $x-15$

Costo de pasta dental: $x-3$

Planteamiento

Planteamos la ecuación

$$x+(x-15)+(x-3)=66 \rightarrow 3x-18=66$$

$$3x=66+18 \rightarrow x=\frac{84}{3}=28$$

Por lo tanto, Ángel pago Bs 28 por el champú, Bs 13 por los jabones y Bs 25 por la pasta dental.

Actividad 2. En nuestros cuadernos resolvemos las siguientes ecuaciones y problemas cotidianos.

1) $a-(2a+1)=8-(3a+3)$

2) $(5-3a)-(-4a+6)=(8a+1)-3(2a+3)$

3) $4(x-2)-5(2x-6)=8(x+1-2(2x+3)$

4) $x-2\left[2x-(x+1)+5(1-x)\right]=x+(3x-7)$

5) $(x+1)(x+2)(x-3)=(x-2)(x+1)(x+1)$

6) $3a-\left\{10a-\left[(3-5a)-8\right]+(5a-3)(5a+4)\right\}=3(6x-4)-9$

7) $\frac{5}{2}m-\frac{5}{6}m=\frac{4}{3}$

8) $\frac{1}{4}+\left(2z-\frac{3z-1}{8}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{z+2}{6}\right)-2z$

9) $\frac{3}{a-5}=\frac{7}{x+5}$

10) $\frac{4}{x-1}-\frac{2}{x+1}=\frac{5}{(x-1)(x+1)}$

11) Un número excede en 4 a otro y la tercera parte del mayor equivale a la mitad del menor. Hallamos los números.
12) La suma de las edades de Marcela, Gabriel y Rene es de 95 años. La edad de Marcela excede en 4 años a la edad de Gabriel y en 11 a la de Rene. Determinamos las edades de los tres.
13) María tiene 18 años y Juan 42, ¿En cuantos años la edad de Juan será el doble que la de María?
14) La edad de Luis es 3/5 de la edad de Marcelo y hace 5 años era la mitad, determinamos ambas edades.
15) A 90 litros de agua al 1,5% de Sal, ¿Cuánta agua deberá agregarse para disminuir su concentración al 1%?
16) Se tiene 18 onzas de una mezcla de agua hervida y leche de formula al 20%, si se desea una mezcla al 15 % de leche de formula. ¿Cuántas onzas de agua hervida hay que agregar?
17) Carlos tiene 400 monedas de Bs 0,5 y Bs 1, si en total tiene Bs 350 ¿Cuántas monedas de cada valor tiene?
18) Se desea repartir Bs 210 en monedas de Bs 1, Bs 2, Bs 5 de tal forma que el número de monedas de cada denominación sea el mismo, ¿Cuántas monedas se necesitan de cada denominación?

¡Realizamos la valoración!

Actividad 3.

Familia de ecuaciones: una familia de ecuaciones tiene valores similares que definen los parámetros de su campo de acción, y cada ecuación de la familia sin importar la estructura de su expresión siempre tendrá valores dentro de los parámetros. Nuestras familias se comportan de manera similar, los valores que adquirimos al interior de nuestras familias son los limites o parámetros que moldean nuestro comportamiento ante la sociedad, mientras los valores sean positivos nuestro comportamiento será correcto ya que obraremos con ética y moral, sin embargo, si los valores son negativos actuaremos fuera de los límites, es decir fuera de las leyes y normas. Por esto, todos somos iguales ante la ley, esta igualdad no es otra cosa que una ecuación con variables y constantes que definen a nuestra sociedad.

1. ¿Menciona algunos valores que se practican en tu familia?
2. Indica tres derechos y tres deberes que todo niño posee en nuestra sociedad.
3. Describe la importancia de la aplicación de ecuaciones en la resolución de problemas.

¡Es hora de la producción!

Actividad 4.

Realizamos las siguientes actividades para fortalecer lo aprendido:

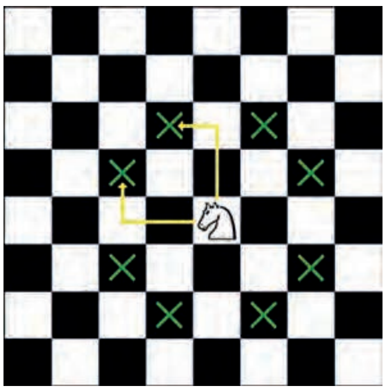
- Investigamos los pasos para modelar ecuaciones: Identificar la variable, usar abstracción matemática, formular el modelo y resolver la ecuación.
- Posteriormente modelamos cinco ecuaciones sobre situaciones que se presentan en nuestro entorno.

PRODUCTOS Y COCIENTES NOTABLES APLICADOS AL DESARROLLO DE LA TECNOLOGÍA

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

El cuadro mágico del salto del caballo: En este cuadrado, todas las líneas verticales y horizontales suman 260. Tenemos que averiguar los valores de las letras que aparecen, x, y, t, etc. para saber los números de cada casilla. Cuando conozcamos todos los números, si partimos del 1, los siguientes naturales, 2, 3, 4,… van apareciendo siguiendo el movimiento del caballo en el juego de ajedrez.

7x+5	2x-2	4x-1	9x-10	8x+1	x-4	10x-1	x
2y	9z	6z+6	16-z	67-z	z-2	7x+1	z-12
y	2t	u-60	24u	u	50+2u	6+u	60-2u
6y-4	t-2	v	9m	n	4p-7	s	2q-3
y+8	2t-10	2v+1	8m	2n-3	3p-4	15s-7	q+3
2y+4	62-t	v+u	3+6m	7n	2p-3	3s+2	70-q
68-3y	t-5	3v+1	6m-2	5n+1	p	8s-1	2q
16+2y	60-3y	3y+1	2y-5	3y-1	5y	4y-2	26-y



Actividad 5.
1. Analiza estos patrones y describe por qué sucede lo descrito anteriormente.
2. ¿Se podrá llegar a los mismos resultados con los movimientos de otras piezas de ajedrez? Fundamenta tu respuesta.
3. ¿Los resultados obtenidos tienen alguna relación con los productos y cocientes? Fundamenta tu respuesta.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Productos notables

1.1. Cuadrado de un binomio

a) Cuadrado de la suma de un binomio: $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

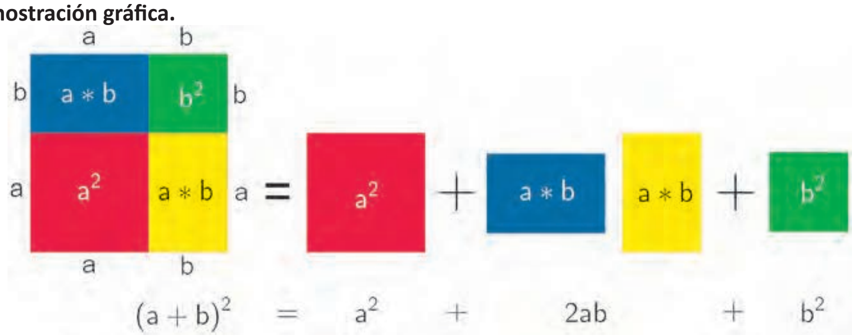
El cuadrado de la suma de un binomio es igual al cuadrado del primer término, más el doble producto de primer término por el segundo y más el cuadrado del segundo término.

Demostración analítica: realizamos la multiplicación algebraica convencional:

$$\begin{array}{r} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+ab \\ \underline{ab+b^2} \\ a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

Por lo tanto, de manera sistemática decimos que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

Demostración gráfica.



Recordemos que:

El área de un cuadrado es

$A = a^2$

El área del rectángulo es igual a

$A = b \cdot h$

Ejemplos:

a. $\left(x+5\right)^2 = x^2 + 2\left(x\right)\left(5\right) + 5^2 = x^2 + 10x + 25$

b. $\left(4a+5b^2\right)^2 = \left(4a\right)^2 + 2\left(4a\right)\left(5b^2\right) + \left(5b^2\right)^2 = 16a^2 + 40ab^2 + 25b^4$

c. $\left(6ax^3+8y^5\right)^2 = \left(6ax^3\right)^2 + 2\left(6ax^3\right)\left(8y^5\right) + \left(8y^5\right)^2 = 36a^2x^6 + 96ax^3y^5 + 64y^{10}$

b) Cuadrado de la diferencia de un binomio: $(a-b)^2 = \left(a-b\right)\left(a-b\right)$

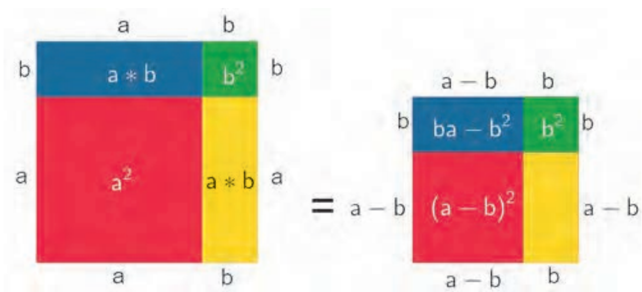
El cuadrado de la diferencia de un binomio es igual al cuadrado del primer término menos el doble producto del primer término por el segundo término, más el cuadrado del segundo término.

Demostración analítica: multiplicamos de forma convencional:

$$\begin{array}{r} a-b \\ \underline{a-b} \\ a^2-ab \qquad \\ \underline{-ab+b^2} \\ a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

por lo tanto de manera sistemática decimos que: $\left(a-b\right)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Demostración gráfica:



$$\left(\mathrm{a}-\mathrm{b}\right)^2 = \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ab} + \mathrm{b}^2$$

Ejemplos:

a. $\left(y-7\right)^2 = y^2 - 2\left(y\right)\left(7\right) + 7^2 = y^2 - 14y + 49$

b. $\left(3a^2-5b^3\right)^2 = \left(3a^2\right)^2 - 2\left(3a^2\right)\left(5b^3\right) + \left(5b^3\right)^2 = 9a^4 - 30a^2b^3 + 25b^6$

Actividad 6. Para fortalecer nuestros conocimientos resolvemos los siguientes ejercicios:

1. $\left(5+x\right)^2$
2. $\left(9m+4n\right)^2$
3. $\left(2a^2x+6by^2\right)^2$
4. $\left(8x^2y+9m^3\right)^2$
5. $\left(x+6\right)^2$
6. $\left(4x+7\right)^2$
7. $\left(4a+6\right)^2$
8. $\left(5m+3\right)^2$
9. $\left(9-a\right)^2$
10. $\left(3a^4-5b^2\right)^2$
11. $\left(10x^3-9xy^5\right)^2$
12. $\left(3x-5\right)^2$
13. $\left(2m^3-6n^2\right)^2$
14. $\left(7-4y^3\right)^2$
15. $\left(am^2-3a^2\right)^2$
16. $\left(x^{m+2}+y^{n-2}\right)^2$
17. $\left(a^{2m}+b^{2n}c^{m+1}\right)^2$
18. $\left(\frac{1}{2}x^m-y^2\right)^2$
19. $\left(\frac{x^{3m}}{2}+y^{2+m}\right)^2$
20. $\left(\frac{1}{a^{2m+3}}-\frac{b^{3m+2}}{2}\right)^2$
21. $\left(\frac{\sqrt{x^{m-2a}}}{2a^2}+\frac{\sqrt{2}}{x^{m-2a}}\right)^2$
22. $\left(\sqrt{\frac{x^{2a-b}y^3}{2}}-\sqrt{\frac{2a}{x^{2a-b}y^3}}\right)^2$

1.2. Binomio conjugado: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

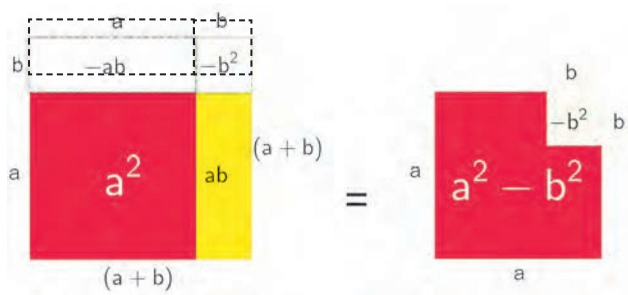
El producto de $(a+b)(a-b)$ es la diferencia de los cuadrados de ambas cantidades.

Demostración analítica. Realizamos el producto y obtenemos:

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a-b} \\ a^2+ab \\ \underline{\quad -ab-b^2} \\ a^2 \qquad\quad -b^2 \end{array}$$

Por lo tanto de manera sistemática decimos que: $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$

Demostración gráfica:



$$(a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

Ejemplos:

a. $(a+x)(a-x)=a^2-x^2$

b. $(3a-2b)(3a+2b)=(3a)^2-(2b)^2=9a^2-4b^2$

c. $(4a^3+5x^2y^4)(4a^3-5x^2y^4)=(4a^3)^2-(5x^2y^4)^2=16a^6-25x^4y^8$

Actividad 7. Desarrollamos los siguientes binomios conjugados.

1.$(m+n)(m-n)$

2.$(y^2-3x)(y^2+3x)$

3.$(6x^2+m^3y)(6x^2-m^3y)$

5.$(3ax+1)(3ax-1)$

5.$(3ax+1)(3ax-1)$

6.$\left(\frac{1}{2}x+y^2\right)\left(\frac{1}{2}x-y^2\right)$

7.$(x^{2m}-2y^{3n})(x^{2m}+2y^{3n})$

8.$\left(\frac{xy^2}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(\frac{xy^2}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$

9.$\left(\frac{a^{m+1}}{b^n}-2a^2\right)\left(\frac{a^{m+1}}{b^n}+2a^2\right)$

10.$\left(\frac{\sqrt{3}}{a^{1-n}}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{a^{1-n}}-\frac{1}{3}\right)$

11.$\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{3}{2}+n}}+\frac{x}{y}\right)\left(\frac{x^{\frac{1}{2}}}{y^{\frac{3}{2}+n}}-\frac{x}{y}\right)$

12.$\left(\frac{2^x}{3^y}-\frac{y^3}{x^2}\right)\left(\frac{2^x}{3^y}+\frac{y^3}{x^2}\right)$

1.3. Cuadrado de un trinomio: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

El cuadrado de un trinomio es igual a la suma de los cuadrados de cada uno de sus términos más los dobles productos de las combinaciones entre ellos.

Demostración:

$$\begin{array}{l} a+b+c \\ \underline{a+b+c} \\ a^2+ab+ac \\ \qquad ab+b^2+bc \\ \underline{\qquad\qquad ac+bc+c^2} \\ a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2 \end{array}$$

por lo tanto ordenando tenemos que: $(a+b+c)^2=a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc$

Ejemplos:

a. $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz$

b. $(2x+3y+4z)^2=(2x)^2+(3y)^2+(4z)^2+2(2x)(3y)+2(2x)(4z)+2(3y)(4z)$

$=4x^2+9y^2+16z^2+12xy+16xz+24yz$

c. $(a^2+2b^3+3c^4)^2=(a^2)^2+(2b^3)^2+(3c^4)^2+2(a^2)(2b^3)+2(a^2)(3c^4)+2(2b^3)(3c^4)$

$=a^4+4b^6+9c^8+4a^2b^3+6a^2c^4+12b^3c^4$

Actividad 8. Aplicamos el cuadrado de un trinomio en los siguientes ejercicios:

1. $(r+s+t)^2$
2. $(a^2-b+2c)^2$
3. $(3a+5b+6c)^2$
4. $(2x^3+5y^4+4z^5)^2$
5. $(m+2n+p-3q)^2$
6. $(2+2n+p-6r)^2$
7. $(m+3+p-2n+5t)^2$
8. $(2x-3y+1)^2$
9. $(3a^2+2b^2-1)^2$
10. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y+c\right)^2$
11. $\left(\frac{1}{6}a-b+\frac{1}{4}\right)^2$
12. $\left(a^{x-1}-2a^x-a^{x+1}\right)^2$
13. $\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{y}+x^2\right)^2$
14. $(-2a^2+b^2-2)^2$
15. $\left(\sqrt{2}x+\sqrt{3}y+\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\right)^2$
16. $(-a-b-c)^2$
17. $\left(a^{x-1}-2a^x-a^{x+1}\right)^2$

1. 4. Productos de la forma (binomio con término común): $(x+a)(x+b)=x^2+(a+b)x+ab$

El producto de dos binomios es igual al cuadrado del primer término más la suma de los segundos términos del binomio por el término común más el producto de los términos del binomio.

Demostración analítica: multiplicamos de forma horizontal:

$$(x+a)(x+b)=x^2+ax+bx+ab=x^2+(a+b)x+ab$$

Ejemplos:

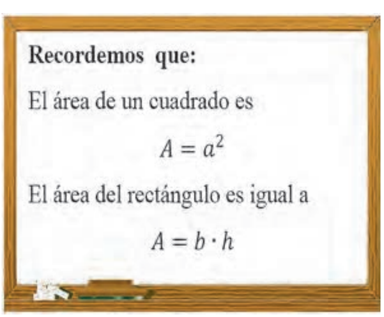
1. $(x+7)(x-2)=x^2+7x-2x-14=x^2+(7-2)x-14=x^2+5x-14$
2. $(x^{2m}-7)(x^{2m}-6)=x^{(2m)2}-(7+6)x^{2m}+42=x^{4m}-13x^{2m}+42$
3. $(2p-9)(2p+6)=(2p)^2-(18-12)p-54=4p^2-6p-54$
4. $(x^3-12)(x^3-3)=(x^3)^2-(12+3)x^3+36=x^6-15x^3+36$

Actividad 9. En nuestros cuadernos escribimos por simple inspección el producto de:

1. $(m-6)(m-5)$
2. $(a^6+7)(a^6-9)$
3. $(n-19)(n+10)$
4. $(x^2+5)(x^2+9)$
5. $(x+3)(x-4)$
6. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)$
7. $(3m+2n-4)(3m-3n+2)$
8. $\left(-xy+\frac{3}{8}\right)\left(\frac{3}{4}-xy\right)$
9. $\left(\frac{1}{3}y-\frac{1}{5}x\right)\left(-\frac{1}{5}x-\frac{3}{2}y\right)$
10. $(a+3b-5)(a-3b+2)$
11. $\left(x^2y+\frac{3}{2}\right)\left(\frac{3}{2}-xy^2\right)$

1.5. Cubo de un binomio: $(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$

a) Cubo de la suma de un binomio: El cubo de la suma de dos términos es igual al cubo del primer término, más el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primer por el cuadrado del segundo, más el cubo del segundo término.



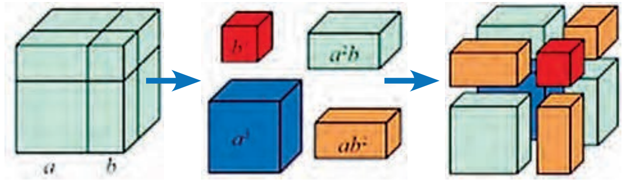
Demostración: descomponemos el cubo perfecto en sus factores múltiplos:

$$(a+b)^3=(a+b)(a+b)(a+b)$$
$$=(a+b)(a+b)^2$$
$$=(a+b)(a^2+2ab+b^2)$$

Efectuando la multiplicación de estos dos últimos productos, tenemos:

$$\begin{array}{r} a^2+2ab+b^2 \\ \underline{a+b \qquad\qquad} \\ a^3+2a^2b+ab^2 \qquad\quad \\ \underline{\qquad\quad a^2b+2ab^2+b^3} \\ a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 \end{array}$$

Representación gráfica.



Ejemplos:

1. $(x+1)^3 = x^3+3x^2(1)+3x(1)^2+(1)^3 = x^3+3x^2+3x+1$
2. $(2x+3)^3=(2x)^3+3(2x)^2(3)+3(2x)(3)^2+(3)^3=8x^3+36x^2+54x+27$
3. $(3a^2+4b^3c^4)^3=(3a^2)^3+3(3a^2)^2(4b^3c^4)+3(3a^2)(4b^3c^4)^2+(4b^3c^4)^3$
$=27a^6+108a^4b^3c^4+144a^2b^6c^8+64b^9c^{12}$
4. $\left(\frac{1}{2}x+y^2\right)^3=\left(\frac{1}{2}x\right)^3+3\left(\frac{1}{2}x\right)^2(y^2)+3\left(\frac{1}{2}x\right)(y^2)^2+(y^2)^3=\frac{1}{8}x^3+\frac{3}{4}x^2y^2+\frac{3}{2}xy^4+y^6$

a. **Cubo de la diferencia de un binomio:** $(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b})^3=\boldsymbol{a}^3-3\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}\boldsymbol{b}^2-\boldsymbol{b}^3$

El cubo de la diferencia de dos términos es igual al cubo del primer término, menos el triple producto del cuadrado del primero por el segundo, más el triple producto del primero por el cuadrado del segundo, menos el cubo del segundo término.

Demostración. del anterior producto se deduce que: $(a-b)^3=(a-b)(a-b)(a-b)$
Efectuando la multiplicación de estos dos últimos productos, tenemos:

$$\begin{array}{r} a^2-2ab+b^2 \\ \underline{a-b \qquad\qquad} \\ a^3-2a^2b+ab^2 \qquad\quad \\ \underline{\qquad\quad -a^2b+2ab^2-b^3} \\ a^3-3a^2b+3ab^2-b^3 \end{array}$$

Por lo tanto ordenando tenemos que: $(a-b)^3=a^3-3a^2b+3ab^2-b^3$

Ejemplos:

1. $(x-2)^3=x^3-3(x)^2(2)+3(x)(2)^2-(2)^3=x^3-6x^2+12x-8$
2. $(a^2-3b)^3=(a^2)^3-3(a^2)^2(3b)+3(a^2)(3b)^2-(3b)^3=a^6-9a^4b+27a^2b^2-27b^3$
3. $(5a-6y^2)^3=(5a)^3-3(5a)^2(6y^2)+3(5a)(6y^2)^2-(6y^2)^3=125a^3-450a^2y^2+540ay^4-216y^6$

Actividad 10. En nuestros cuadernos resolvemos los siguientes ejercicios por simple inspección:

1. $(a+2)^3$
2. $(2x+1)^3$
3. $(2x+3y)^3$
4. $(a^2+2b)^3$
5. $(3x+2y)^3$
6. $(4+3ab^2)^3$
7. $(n-4)^3$
8. $(1-3y)^3$
9. $(2m-3n)^3$
10. $(2a^2-b^3)^3$
11. $(a-3b)^3$
12. $(a^2-b^2)^3$
13. $\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{3}y\right)^3$
14. $\left(x^{2m}+\frac{x^m}{y^n}\right)^3$
15. $\left(\frac{a}{b^2}-\frac{b}{a^2}\right)^3$
16. $(a^{2+m}+b^{n-3})^3$
17. $\left(\frac{1}{a^x}-\frac{x}{2}\right)^3$
18. $\left(2x^{a^2}+\frac{1}{3}x^2\right)^3$
19. $\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}x^2}-\frac{1}{\sqrt[3]{\frac{1}{x^2}}}\right)^3$

2. Cocientes notables

Son cocientes que resultan de divisiones exactas entre polinomios, es decir que el resto es igual a cero y pueden ser escritas por simple inspección.

$$\textbf{Forma típica} \text{ de un cocientes notable}: \frac{x^n \pm y^n}{x \pm y}$$

De este se desprende los siguientes cuatro casos:

Primer caso: cuando n es un número par o impar.

$$\frac{x^n - y^n}{x - y} = x^{n-1} + x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 + \ldots y^{n-1}$$

Segundo caso: cuando "n" es un número par el cociente es notable.

$$\frac{x^n - y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots y^{n-1}$$

Tercer caso: cuando "n" es un número impar el cociente es notable.

$$\frac{x^n + y^n}{x + y} = x^{n-1} - x^{n-2}y + x^{n-3}y^2 - \ldots y^{n-1}$$

Cuarto caso: no cumple como cociente notable.

$$\frac{x^n + y^n}{x - y} = no\ cumple$$

Ejemplos: realizamos los siguientes cocientes aplicando los casos según corresponda.

1) $$\frac{x^5 - 32}{x-2} = \frac{x^5 - 2^5}{x-2} = x^4 + x^3(2) + x^2(2)^2 + x(2)^3 + (2)^4 = x^4 + 2x^3 + 4x^2 + 8x + 16$$

2) $$\frac{x^8 - 1}{x-1} = \frac{x^8 - 1^8}{x-1} = x^7 + x^6(1) + x^5(1)^2 + x^4(1)^3 + x^3(1)^4 + x^2(1)^5 + x(1)^6 + (1)^7$$
$$= x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$$

3) $$\frac{64a^6 - 729b^6}{2a+3b} = \frac{(2a)^6 - (3b)^6}{2a+3b} = (2a)^5 - (2a)^4(3b) + (2a)^3(3b)^2 - (2a)^2(3b)^3 + (2a)(3b)^4 + (3b)^5$$
$$= 32a^5 - (16a^4)(3b) + (8a^3)(9b^2) - (4a^2)(27b^3) + (2a)(81b^4) + 243b^5$$
$$= 32a^5 - 48a^4b + 72a^3b^2 - 108a^2b^3 + 162ab^4 + 243b^5$$

4) $$\frac{x^7 + y^7}{x+y} = x^6 - x^5y + x^4y^2 - x^3y^3 + x^2y^4 - xy^5 + y^6$$

5) $$\frac{27x^6 + 125y^9}{3x^2 + 5y^3} = \frac{(3x^2)^3 + (5y^3)^3}{3x^2 + 5y^3} = (3x^2)^2 - (3x^2)(5y^3) + (5y^3)^2 = 9x^4 - 15x^2y^3 + 25y^6$$

6) $$\frac{32x^5 + 243y^5}{2x+3y} = \frac{(2x)^5 + (3y)^5}{2x+3y} = (2x)^4 - (2x)^3(3y) + (2x)^2(3y)^2 - (2x)(3y)^3 + (3y)^4$$
$$= 16x^4 - (8x^3)(3y) + (4x^2)(9y^2) - (2x)(27y^3) + 81y^4$$
$$= 16x^4 - 24x^3y + 36x^2y^2 - 54xy^3 + 81y^4$$

7) $$\frac{16x^8 - 625y^4}{2x^2 + 5y} = \frac{(2x^2)^4 + (5y)^4}{2x^2 + 5y} = (2x^2)^3 - (2x^2)^2(5y) + (2x^2)(5y)^2 - (5y)^3$$
$$= 8x^6 - (4x^4)(5y) + (2x^2)(25y^2) - 125y^3$$
$$= 8x^6 - 20x^4y + 50x^2y^2 - 125y^3$$

8) $$\frac{128a^7 - b^7}{2a-b} = \frac{(2a)^7 - (b)^7}{2a-b} = (2a)^6 + (2a)^5b + (2a)^4b^2 + (2a)^3b^3 + (2a)^2b^4 + 2ab^5 + b^6$$
$$= 64a^6 + 32a^5b + 16a^4b^2 + 8a^3b^3 + 4a^2b^4 + 2ab^5 + b^6$$

Actividad 11. En nuestros cuadernos efectuamos los siguientes cocientes aplicando los casos según corresponda:

1) $\dfrac{x^6-64}{x-2}$ 3) $\dfrac{1-a^2b^4c^8}{1-ab^2c^4}$ 5) $\dfrac{x^{15}+y^{10}}{x^3+y^2}$ 7) $\dfrac{512a^9+b^9}{2a+b}$ 9) $\dfrac{m^8-256}{m-2}$

2) $\dfrac{x^6-y^6}{x+y}$ 4) $\dfrac{1-a^2b^4c^8}{1-ab^2c^4}$ 6) $\dfrac{x^9+y^9}{x+y}$ 8) $\dfrac{x^{32}-y^{16}}{x^4+y^2}$

Fórmula para determinar el número de términos: para determinar el número de términos "n" de un cociente notable se calcula la división de los exponentes de las mismas variables.

$$\frac{x^p \pm y^q}{x^r \pm y^s} \rightarrow \frac{p}{r} = \frac{q}{s} = número\,de\,términos$$

Ejemplo: sea el cociente notable

$$\frac{x^{32}-y^{16}}{x^4+y^2} \rightarrow \frac{32}{4} = \frac{16}{2} = 8 \quad \rightarrow el\,cociente\,notable\,tiene\,ocho\,términos$$

Fórmula posición de un término determinado: el término general o mejor conocido como el término del lugar "k" en el desarrollo de un cociente notable se representa por T_k y es igual a:

$$\frac{y^n \pm b^n}{y^m \pm b^m},\quad donde\,el\,término\,T_k\,se\,calcula\,según\,el\,caso\,correspondiente\,al\,cociente.$$

Para el **caso 1,** se utiliza la siguiente fórmula.

$$T_k = x^{n-km}y^{km-m}$$

"n" es el exponente común en el numerador
"m" es el exponente común en el denominador

Para **caso 2** y **caso 3,** los términos de la solución se alternan entre $+$, cuando k sea impar, y $-$, cuando k sea par.

$$T_k = (-1)^{k-1}x^{n-km}y^{km-m}$$

"n" es el exponente común en el numerador
"m" es el exponente común en el denominador

Ejemplo: calculamos el término 25 en el desarrollo del siguiente cociente notable: $\dfrac{y^{150}-b^{100}}{y^3+b^2}$

Solución: aplicando la fórmula de número de términos determinamos "n"

$$\frac{y^{150}-b^{100}}{y^3+b^2} = \frac{(y^3)^{50}-(b^2)^{50}}{(y^3)+(b^2)} \rightarrow n = 50 \text{ y } m = 1$$

Luego $k = 25,\ n = 50 \text{ y } m = 1$, remplazamos los datos en la fórmula de términos determinado.

$$T_k = (-1)^{k-1}x^{n-km}y^{km-m} = (-1)^{25-1}x^{50-25*1}y^{25*1-1} = x^{25}y^{24}$$

2.1. Término central de un cociente notable: para hallar el término central en el desarrollo de un cociente notable, determinamos la posición "k" de dicho término. Siendo "n" el número de términos que posee el desarrollo.

Si el número de términos es un número *impar* tendrá un solo término central: $k_c = \dfrac{n+1}{2}$

Si el número de términos es un número *par* tendrá dos términos centrales, por lo que se utilizan las siguientes dos fórmulas: $k_{c_1} = \dfrac{n}{2};\ k_{c_2} = \dfrac{n}{2}+1$

Luego de obtener el o los valores de k, se reemplazan en la fórmula del término general.

$$T_k = \pm x^{n-k}a^{k-1}$$

Ejemplo: calculamos el término central de la siguiente división : $\dfrac{x^{21}-y^{21}}{x-y}$

Solución. Primero calculemos el número de términos del desarrollo de dicho cociente.

$$\frac{x^{21}-y^{21}}{x-y} \rightarrow \frac{21}{1} = \frac{21}{1} = 21, hay\,un\,número\,impar\,de\,términos, por\,lo\,tanto\,solo\,hay\,un\,término\,central.$$

$$K_c = \frac{n+1}{2} = \frac{21+1}{2} = 11, \text{ luego buscamos el termino 11 en la formula correspodiente al } \textbf{caso}\, 1$$

$$T_k = x^{n-km}y^{km-m} \rightarrow T_{11} = x^{21-11*1}y^{11*1-1} = x^{10}y^{10}$$

Actividad 12. En nuestros cuadernos realizamos los siguientes ejercicios para fortalecer lo aprendido.

1. Calculamos el número de términos de:	2. Determinamos el término…	3. Calculamos el término medio de los ejercicios 1) y 2)
a) $\dfrac{x^{15}-32}{x^3-2}$ b) $\dfrac{(x+2)^{16}-(x-2)^{16}}{2(x^2+4)}$ a) $\dfrac{x^{20}-y^{30}}{x^2-y^3}$	a) $septimo\, de \dfrac{x^{11}-y^{22}}{x-y^2}$ b) $quinto\, de \dfrac{x^{p}-y^{p+40}}{x^2+y^3}$ c) $quinto\, de \dfrac{x^{33}-y^{363}}{x^3-y^{33}}$	

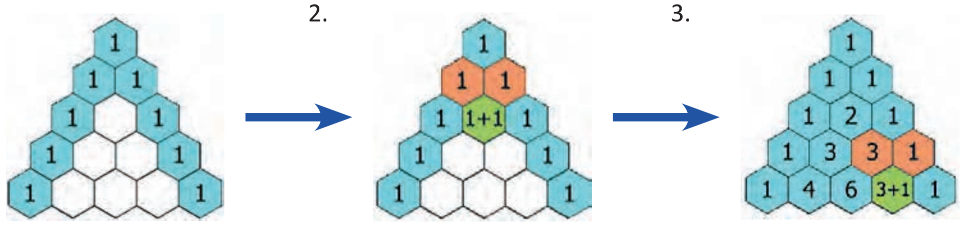
3. Triángulo de Pascal

Se construye mediante el siguiente procedimiento:

Anotamos 1 en los extremos, hasta donde el exponente del binomio lo indique.

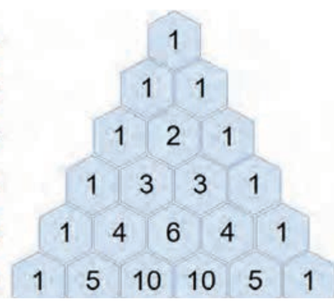
Los números internos se obtienen de la suma de los números superiores:

1. 2. 3.



El triángulo de Pascal nos permite desarrollar un polinomio según el grado del binomio designando los coeficientes como se muestra en la siguiente figura.

$$1 = (x+y)^0$$
$$x+y = (x+y)^1$$
$$x^2+2xy+y^2 = (x+y)^2$$
$$x^3+3x^2y+3xy^2+y^3 = (x+y)^3$$
$$x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4 = (x+y)^4$$
$$x^5+5x^4y+10x^3y^2+10x^2y^3+5xy^4 = (x+y)^5$$



Ejemplo 1. Hallamos el desarrollo del polinomio $(x+3y)^3$

Solución: mediante el triángulo de Pascal tenemos.

$$=(x\pm y)^0$$
$$=(x\pm y)^1$$
$$=(x\pm y)^2$$
$$=(x\pm y)^3$$

Luego los coeficientes serán de la cuarta fila, y al ser suma el polinomio, los términos del desarrollo son positivos.

$$(x+3y)^3 = x^3+3x^2(3y)+3x(3y)^2+(3y)^3$$
$$(x+3y)^3 = x^3+9x^2y+3x(9y^2)+27y^3$$
$$(x+3y)^3 = x^3+9x^2y+27xy^2+27y^3$$

Ejemplo 2. Hallamos el desarrollo del polinomio $(x-y)^7$

Luego los coeficientes serán de la séptima fila.

$$(x-y)^7 = x^7-7x^6y+21x^5y^2-35x^4y^3+35x^3y^4-21x^2y^5+7xy^6-y^7$$

Actividad 13. Aplicando el triángulo de pascal resolvemos en nuestros cuadernos los siguientes ejercicios:

1) $\left(x+4y\right)^4$ 2) $(3x-2y)^6$ 3) $(2a+3b)^5$ 4) $(2x-y)^7$ 5) $(4x-3y)^9$ 6) $(3a+3b)^8$ 7) $\left(2-a^2\right)^{12}$ 8) $\left(\frac{3}{2}a^2-\frac{2}{3}b\right)^5$ 9) $\left(a^2b+\frac{c^2}{b}\right)^4$ 10) $(3x-3y^2)^6$ 11) $\left(\frac{1}{3}x^2+2y\right)^8$ 12) $\left(x^m-5m^x\right)^9$

4. Deducción del binomio de n – ésima potencia (Binomio de Newton)

El desarrollo de los binomios tiene gran importancia por su aplicación en diversas áreas como la ingeniería y otras. Sea el binomio $\left(a+b\right)^n$, de su desarrollo tendremos que:

- El desarrollo de $\left(a+b\right)^n$ tiene $n+1$ términos.
- Las potencias de "a" inician con exponente en "n" el primer término y disminuye en cada término hasta cero en el último.
- Las potencias de "b" empiezan con exponente cero en el primer término y van aumentando en una cantidad hasta "n" en el último término.
- Para cada término la suma de los exponentes de "a" y "b" es igual a "n".
- El coeficiente del primer término es 1 y del segundo es "n".
- El coeficiente de un término cualquiera es igual al producto del coeficiente del término anterior por el exponente de "a"dividido entre el número que indica el orden de ese término (factorial).
- Los términos extremos tienen coeficientes iguales.

Formula general

$$\left(a+b\right)^n=a^n+\frac{n}{1!}a^{n-1}b+\frac{n\left(n-1\right)}{2!}a^{n-2}b^2+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)}{3!}a^{n-3}b^3+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)}{4!}a^{n-4}b^4+\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\left(n-3\right)\left(n-4\right)}{5!}a^{n-5}b^5+\ldots+b^n$$

Ejemplo: desarrollamos el siguiente binomio aplicando la fórmula del binomio de Newton.

$$\begin{aligned}(2-m)^6 &= 2^6-6\cdot 2^5\,m+\frac{6\cdot 5}{2!}\cdot 2^4\,m^2-\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3!}*2^3m^3+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4!}*2^2m^4-\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5!}2m^5+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6!}m^6\\ &= 2^6-6\cdot 2^5\,m+\frac{6\cdot 5}{2\cdot 1}\cdot 2^4\,m^2-\frac{6\cdot 5\cdot 4}{3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^3m^3+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2^2m^4-\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}\cdot 2m^5+\frac{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}m^6\\ &= 64-192m+240m^2-160m^3+60m^4-12m^5+m^6\end{aligned}$$

Deducción de n-ésimo término del binomio

Para determinar un término cualquiera del desarrollo del binomio se aplica la siguiente formula.

$$\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)\ldots\left(n-r+2\right)}{\left(r-1\right)!}a^{n-r+1}b^{r-1}\ \textit{donde}\ \text{"r"}\ \textit{es el término buscado}$$

Ejemplo: hallamos el quinto término del desarrollo de $\left(x+5y\right)^6$

Solución: $a=x, b=5y, n=6, r=5,$ *reemplazamos los valores en la fórmula.*

$$\frac{6\left(6-1\right)\left(6-2\right)\left(6-5+2\right)}{\left(5-1\right)!}x^{6-5+1}\left(5y\right)^{5-1}=\frac{6\left(5\right)\left(4\right)\left(3\right)}{4*3*2*1}x^2\left(5y\right)^4=15x^2\left(625y^4\right)=9375x^2y^4$$

Actividad 14. En nuestros cuadernos desarrollamos los siguientes polinomios mediante el binomio de Newton.

1) $\left(2x+y\right)^4$ 2) $\left(\frac{1}{3}x-2\right)^6$ 3) $(2x^2-y^3)^7$ 4) $\left(\frac{1}{2}x+2y\right)^9$ 5) $\left(\frac{1}{3}+2y\right)^8$ 6) $\left(x^m-5m^x\right)^9$ 7) $\left(2-a^2\right)^{10}$ 8) $\left(\frac{3}{2}+b\right)^5$ 9) $\left(a^2b-\frac{c^2}{b}\right)^4$ 10) $(3x+3y^2)^6$

Determinar el 4°, 6°, 3° y 8° término de $\left(x+3y\right)^5, \left(2m+1\right)^8, \left(m-7n\right)^4, \left(a^2-b^2\right)^9$ respectivamente.

Actividad 15. En nuestros cuadernos calculamos los siguientes valores:

1) *Si:* $\dfrac{a^m-b^{m+6}}{a^4-b^{\frac{m}{2}}}$ *es cociente notable, donde* $m\in Z^+$*, el valor* $a^4-b^{\frac{m}{2}}$

2) *La división:* $\dfrac{(5y-1)^{99}+(5y+1)^{99}}{10y}$ *da un c.n, donde un término tiene la forma:*

Ciencia divertida

Observamos el video "El Descubrimiento que Revolucionó el Cálculo de Pi" del canal Veritasium en español.

Escanea el QR

$a\left(25y^2-1\right)^b. \textit{El valor de } E = a+b$

3) $Si\ x^{a-b}, y^{ab}$ *es el 5to término del desarrollo del Cociente Notable:* $\dfrac{x^{5n+3}-y^{10n+15}}{x^{n-1}-y^{2n-1}}$; *hallar* $a+b$.

4) *Si el tercer término del desarrollo del cociente notable;* $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(x+2)^m-x^m}{x+1}\right)$

tiene como valor numérico 1024, *para* $x=2$. *Calcular el valor de* m.

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 16.

Como pudimos observar, los quehaceres de nuestra vida giran en torno a la interpretación de los datos y a la representación de estos a través del lenguaje, ya sea nuestra lengua materna o bien algún lenguaje especial como el lenguaje matemático.

Comprendemos la importancia de esta área, ya que logramos analizar y construir expresiones algebraicas que nos permiten realizar operaciones fundamentales, como sumar, restar, multiplicar y dividir. O simplemente realizar la descripción de los datos presentes en eventos o elementos de nuestro entorno, como se muestra en las imágenes.

Respondemos las siguientes preguntas en nuestro cuaderno:

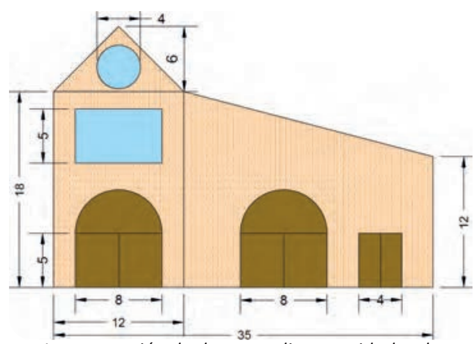
1. ¿Cuál es la finalidad del lenguaje matemático en nuestra vida?
2. ¿Por qué es importante la abstracción matemática en el estudio de los fenómenos o eventos que se presentan en nuestro entorno?
3. ¿Cuál crees que es la diferencia más relevante entre las operaciones fundamentales de la aritmética y las operaciones fundamentales del algebra?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 17.

Realicemos las siguientes actividades para fortalecer lo aprendido.

1. Elaboremos programas cortos utilizando hojas de cálculo Excel para resolver operaciones a través de las reglas de Ruffini y Horner. Posteriormente crea una guía con la que podamos socializar estos conocimientos a terceras personas.
2. Sistematizamos la información a través de medios digitales y analógicos.
3. Investiguemos en internet si existen programas que nos permitan realizar el cálculo de operaciones fundamentales con expresiones algebraicas.



Interpretación de datos mediante unidades de medida.

En un triángulo, a lados iguales se oponen ángulos iguales.

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS EN PROCESOS PRODUCTIVOS

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 18.

Escribimos una lista de 4 virtudes, 4 defectos, 4 hábitos positivos y 4 hábitos negativos, luego de manera aleatoria leemos lo anotado, para socializar con los compañeros y respondemos las siguientes preguntas:

1. ¿Hubo alguna virtud o algún defecto que haya escrito todo el curso? ¿Cuál fue la virtud o defecto identificado?
2. Escribe los nombres de las y los compañeros cuyas respuestas coincidieron.
3. Debatimos sobre la definición de la palabra “común”

4 Virtudes	4 Defectos
1.-	1.-
2.-	2.-
3.-	3.-
4.-	4.-
4 Hábitos positivos	**4 Hábitos negativos**
1.-	1.-
2.-	2.-
3.-	3.-
4.-	4.-

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Casos de factorización

La Factorización de polinomios transforma una suma algebraica en un producto de factores, de modo que factorizar un polinomio es descomponerlo en dos o más polinomios llamados factores, de tal modo que al multiplicarlos se obtenga el polinomio original.

2. Factor común

Este método se aplica cuando todos los términos del polinomio tienen un factor común, que puede ser numérico o literal.

Factor común monomio: Es aquel factor que está presente en cada término del polinomio. Para poder factorizar se extrae el factor común de cada termino.

$$ax + bx = x(a + b)$$

Observemos los siguientes ejemplos:

1. Factorizamos: $2ab^3 + 3b^2$ (solo existe factor común en la parte literal)

$2ab^3 + 3b^2$ *como son de distinta potencia, consideramos el de* ***menor grado***

Entonces : $\quad 2ab^3 + 3b^2 = (2ab + 3)b^2$

2. Factorizamos: $18x - 15y$ (cuando existe factor común en los coeficientes numéricos)

Descomponemos los coeficientes para hallar el factor común $18x - 15y = 2 \cdot 3 \cdot 3x - 3 \cdot 5y = 3(6x - 5y)$

3. Factorizamos: $36x^2y^2 - 27x^3y + 9x^4y$ (cuando existe factor común en letras y números)

Descomponemos coeficientes y terminos literales

$$36x^2y^2 - 27x^3y + 9x^4y = 4 \cdot 9x^2yy - 3 \cdot 9x^2xy + 9x^2x^2y = 9x^2y(4y - 3x + x^2)$$

Factor común Polinomio: se aplica cuando los términos de la expresión algebraica tienen como factor común un polinomio.

Ejemplos: factorizamos las siguientes expresiones.

1. Factorizamos: $(a+b)m^2 + (a+b)n$

   Solución: *Se extrae el factor común polinomio* $(a+b)$

   Entonces: $(a+b)m^2 + (a+b)n = (a+b)(m^2+n)$

Actividad 19. En nuestros cuadernos factorizamos las siguientes expresiones:

$ax+bx+cx$

$8a^3-6a^2$

$24a-12ab$

$14a-21b+35$

$5ax^2-5bx^2+5cx^2$

$20x-12xy+4xz$

$10x^2y-15xy^2+25xy$

$2x^2+6x+8x^3-12x^4$

$12m^2n+24m^3 3n^2-36m^4n^3$

$a(x+1)+b(x+1)$

$x^2(p+q)+y^2(p+q)$

$2(a^2+1)-b(a^2+1)$

$m(x+1)-n(x+1)+p(x+1)$

$a^3(a-b+1)-b^2(a-b+1)$

$1-x+2a(1-x)$

$a(a+1)-b(a+1)-a-1$

$x(2a+b+c)-2a-b-c$

$x(b+2)-b-2+3(b+2)$

$(x+y)(n+1)-3(n+1)$

1. Factorizamos: $3m(5x-2)-n(5x+2)+(5x+2)=(5x-2)(3m-n+1)$
2. Factorizamos: $2y(7m-n+3)-7m+n-3=2y(7m-n+3)-(7m-n+3)$
   $=(7m-n+3)(2y-1)$

3. Factor común por agrupación de términos

Se trata de agrupar términos para obtener un factor común como se muestra en los siguientes ejemplos:

1. Factorizamos: $ax+ay+bx+by$

   Solución: agrupamos convenientemente $(ax+ay)+(bx+by)$

   Extraemos factor común monomio $a(x+y)+b(x+y)=(x+y)(a+b)$

   Factorizarmos: $ax-ay+az+x-y+z$

   Solución: *agrupamos y factorizamos* $(ax-ay+az)+(x-y+z)$

   $=a(x-y+z)+(x-y+z)=(x-y+z)(a+1)$

2. Factorizamos: $12x+24y+mx+2my$

Solución: *agrupamos dos a dos* $(12x+24y)+(mx+2my)$

Factorizamos en cada grupo $12(x+2y)+m(x+2y)=(x+2y)(12+m)$

Actividad 20. Factorizar las siguientes expresiones algebraicas.

1. $am-bm+an-bn$
2. $ax-2bx-2ay+4by$
3. $a^2x^2-3bx^2+a^2y^2-3by^2$
4. $3m-2n-2nx^4+3mx^4$
5. $4a^3-1-a^2+4a$
6. $4a^3-1-a^2+4a$
7. $x+a^2-xy^2-y^2$
8. $3abx^2-2y^2-2x^2+3aby^2$
9. $2am-2an+2a-m+n-1$
10. $3ax-2by-2bx-6a+3ay+4b$

4. Factorización de binomios

4.1. Diferencia de dos cuadrados.

Se factoriza de la siguiente manera:

1° Se extrae la raíz cuadrada en ambos términos.

2° Se multiplica el binomio conjugando como se indica a continuación:

$$a^2-b^2=(a+b)(a-b)$$

Ejemplo: factorizamos $\frac{9}{16}x^2-\frac{1}{36}$

$$\textit{Las raices son}: \sqrt{\frac{9}{16}x^2}=\frac{3}{4}x\,;\sqrt{\frac{1}{36}}=\frac{1}{6};\quad \textit{por lo tanto}\ \frac{9}{16}x^2-\frac{1}{36}=\left(\frac{3}{4}x\right)^2-\left(\frac{1}{6}\right)^2=\left(\frac{3}{4}x+\frac{1}{6}\right)\left(\frac{3}{4}x-\frac{1}{6}\right)$$

Actividad 21. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes ejercicios de diferencia de cuadrados.

1) $4x^2-9y^2$	4) x^2y^6-100	7) x^3y-y^3x	10) $m^{4a+8}-25$
2) $4x^2-b^2$	5) $81x^2-16y^2$	8) $(x+1)^2-36x^2$	11) $-x^{8a+2b}+x^{6a-4b}$
3) $25x^2-y^2$	6) $(x+3)^2-16$	9) $1-m^2n^4$	12) $49y^4-4(y^2-3y)^2$

4.2. Suma y diferencia de cubos perfectos

Cualquier suma o diferencia de cubos perfectos puede factorizarse de la siguiente manera:

1° Se extrae la raíz cúbica del primer y segundo término.

2° Luego se escribe el producto de la suma o diferencia de las raíces de cada término por el trinomio formado por la raíz del primer término al cuadrado $+o-$ el producto de las dos raíces más el cuadrado de la segunda raíz, como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2);\quad a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)}$$

Ejemplo 1. Factorizamos $27a^3+1$:
Calculamos la raíz cúbica de cada uno de los términos, obteniendo:

$$\sqrt[3]{27a^3}=3a \quad y \quad \sqrt[3]{1}=1$$

Luego la factorización será: $27a^3+1=(3a+1)(9a^2-3a+1)$

Ejemplo 2. Factorizamos $64x^3-125y^3$
Calculamos la raíz cúbica de cada uno de los términos, obteniendo:
$\sqrt[3]{64x^3}=4x$ y $\sqrt[3]{125y^3}=5y$

$$\therefore 64x^3-125y^3=(4x)^3-(5y)^3=(4x-5y)\left((4x)^2+(4x)(5y)+(5y)^2\right)=(4x-5y)(16x^2+20xy+25y^2)$$

Actividad 22. Factorizamos los siguientes ejercicios en nuestros cuadernos para fortalecer lo aprendido.

1) $8x^3+z^3$
2) a^3-125b^3
3) $1+y^3$
4) $64x^3+27$
5) $125y^3+64z^3$
6) $a^3b^3-x^3$
7) x^3-27
8) $(x+y)^3-z^3$
9) a^9+b^9
10) $(x-2)^3-8y^3$
11) $x^8y-64x^2y^7$
12) $a^{12}+b^{12}$

¿Cuál es la diferencia entre el mayor y el menor divisor primo de $2^{19}-1$?

5. Factorización de trinomios

5.1. Trinomio cuadrado perfecto

$$\mathbf{a}^2+2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2=(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 \rightarrow \quad \mathbf{a}^2-2\mathbf{ab}+\mathbf{b}^2=(\mathbf{a}-\mathbf{b})^2$$

Si el primero y el tercer término son cuadrados perfectos y si el producto de la raíz cuadrada del primer término por la raíz cuadrada del tercer término por 2, nos da como resultado el valor absoluto del segundo término del polinomio original.

Ejemplo 1. Factorizar $1+2m+m^2$

Sacar la raíz cuadrada del primer y tercer término: $1+2m+m^2$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ 1 & & m \end{array}$$

El segundo término debe ser el doble producto de las raíces, $2(1)(m)=+2m$.

Una vez verificado anotamos el cuadrado de la suma o la diferencia. $1+2m+m^2=(1+\boldsymbol{m})^2$

Ejemplo 2. Factorizar $9x^4-24x^2y+16y^2$

Las raíces son $:\sqrt{9x^4}=3x^2;\sqrt{16y^2}=4y$; *el doble producto es* $:2(3x^2)(4y)=-24x^2y$

Como los signos del trinomio son intercalados, se escribe $9x^4-24x^2y+16y^2=(3x^2-4y)^2$

Actividad 23. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes trinomios cuadrados perfectos.

1) x^2-4x+4
2) $9x^2-30x+25$
3) $16a^2-48a+36$
4) $m^2-14m+49$
5) n^8-22n^4+121
6) $(x+3)^2-8(x+3)+16$
7) $x^2+8x+16$
8) $1+4y+4y^2$
9) $2x^2y^3+16x^2y^4+32xy^5$
10) $(x+2y)^3+10(x+2y)+25$
11) $16m^2-40mn+25n^2$

5.2. Trinomio de la forma: x^2+bx+c

Es el resultado del producto de binomios que tienen en común el primer término, para factorizarlo realizamos lo siguiente:
Factorizar: x^2+5x+6

Extraemos la raíz del primer termino $\sqrt{x^2=x}$ *y lo anotamos en el producto de binomios*

$$x^2+5x+6=(x\quad)(x\quad)$$

Se coloca el signo del segundo término $+5x$ en el primer factor y se multiplica los signos del segundo y tercer término $(+)(+)=+$ para obtener el signo del segundo factor, así.

$$x^2+5x+6=(x+\quad)(x+\quad)$$

Como los factores tienen signos iguales, se busca dos cantidades cuyo producto es igual al tercer término (6) y cuya suma sea igual al coeficiente del término medio (5). En este caso son 2 y 3.

$$x^2+5x+6=(\boldsymbol{x}+2)(\boldsymbol{x}+3)$$

Ejemplo 1. Factorizamos la expresión $a^2-13a+30$.

$$a^2-13a+30=(a-\quad)(a-\quad)$$

$$a^2-13a+30=(a-10)(a-3)$$

Actividad 24. Fortalecemos nuestro aprendizaje mediante la resolución de los trinomios.

1) $x^2+7x+10$
2) $m^2-15m+54$
3) $a^2+2axy-440x^2y^2$
4) $21-4y-y^3$
5) $x^2+xy-20y^2$
6) $5+4m^{3n}-m^{6n}$
7) $m^4n^4+m^2n^2-132$
8) $t^2-99t+2430$
9) $x^2+3x-550$

5.3. Trinomio de la forma: ax² + bx + c donde $a\neq 1$

Factorizamos la expresión: $6a^2-7a-3$

Solución: se multiplica y divide por el coeficiente del término cuadrático, luego multiplicamos el numerador.

$$6a^2-7a-3\rightarrow\frac{6(6a^2-7a-3)}{6}=\frac{36a^2-7(6a)-18}{6}=\frac{(6a)^2-7(6a)-18}{6}=\frac{(6a-9)(6a+2)}{6}$$

Sacamos factor común de los factores del numerador y simplificamos.

$$\frac{(6a-9)(6a+2)}{6}=\frac{3(2a-3)2(3a+1)}{6}=\frac{6(2a-3)(3a+1)}{6}=(2\boldsymbol{a}-3)(3\boldsymbol{a}+1)$$

Actividad 25. Factorizamos las siguientes expresiones en nuestros cuadernos.

1) $6z^2+11z+4$
2) $10p^2+11p+3$
3) $9x^2+30x+25$
4) $21x^2-29xy-72y^2$
5) $24x^2+5xy-14y^2$
6) $6-5m^2-6m^4$
7) $2m^2+9mn-110n^2$
8) $a^2+2axy-440x^2y^2$
9) $30+13x-3x^2$

5.4. Aspa simple

Es un método que trata de encontrar factores múltiplos del primer y tercer término del trinomio, si la suma del producto en aspa de los factores es igual al termino central, se registra los factores múltiplos del trinomio.

Ejemplo. Factorizamos la expresión: $18a^2+17ay-15y^2$

$$18a^2+17ay-15y^2$$

$$\begin{array}{lrl} 9a & -5y = & -10ay \\ 2a & +3y = & +27ay \\ \hline & & +17ay \end{array}$$

$$Luego\ \ 18a^2+17ay-15y^2=(9a-5y)(2a+3y)$$

5.5. Aspa doble

Se emplea para factorizar polinomios de la forma: $P(x,y)=Ax^{2m}+Bx^my^n+Cy^{2n}+Dx^m+Ey^n+F$

$$P(x,y)=Ax^{2m}+Bx^my^n+Cy^{2n}+Dx^m+Ey^n+F$$

$$\begin{array}{ccccccc} A_1x^m & & C_1y^n & & & & F_1 \\ & \boxed{\mathrm{I}} & & \boxed{\mathrm{III}} & & \boxed{\mathrm{II}} & \\ A_2x^m & & C_2y^n & & & & F_2 \end{array}$$

Ejemplo: factorizar el polinomio: $x^2+2xy+y^2-2x-2y-63$

Solución: por método del aspa doble $x^2+2xy+y^2-2x-2y-63$

$$\begin{array}{ccc} x & y & -9 \\ x & y & 7 \end{array}$$

$$La\ factorizacion\ es=(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}-9)(\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}+7)$$

Actividad 26. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes polinomios mediante el método del aspa:

1) $15x^4 + x^2y - 6y^2$
2) $11x^2y + 10x^4 - 6y^2$
3) $21m^8 - 17m^4n + 2n^2$
4) $54a^7b^2 + 7a^{14} - 16b^4$
5) $15x^{2a} + 9x^a - 108$
6) $40x^{2a+2} - x^{a+1} - 15$
7) $14x^2 + 29x - 15$
8) $3a^2 + 5ab - 2b^2$
9) $z^{10} - z^5 - 20$
10) $6x^2 - 7x + 20$
11) $x^2 + 2xy + y^2 + 3x + 3y + 2$
12) $2x^2 + 4xy - 11x - 6y^2 + 7y + 5$
13) $12a^2 - ab + 11a - 6b^2 + 13b - 5$
14) $m^2 - 2n^2 + 6p^2 - mn + 5mp - np$

6. Trinomio por adición y sustracción

Factorizamos $x^4 + 3x^2 + 4$

Solución: obtenemos las raíces cuadradas del primer y último término x^4 es x^2 y de 4 es 2; pero el doble producto de las raíces no es $3x^2$, por lo tanto, no es un trinomio perfecto, entonces.

Sumamos y restamos x^2 al trinomio $\quad x^4 + 3x^2 + 4 + x^2 - x^2$

Asociamos convenientemente $\quad (x^4 + 4x^2 + 4) - x^2$

Factorizamos el trinomio cuadrado perfecto $\quad (x^2 + 2)^2 - x^2$

Factorizamos la diferencia de cuadrados $\quad [(x^2 + 2) + x][(x^2 + 2) - x] \rightarrow (x^2 + 2 + x)(x^2 + 2 - x)$

Ordenamos los términos de cada factor $\quad (x^2 + x + 2)(x^2 - x + 2)$

Actividad 27. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes trinomios por sumas y restas:

1) $z^4 + z^2 + 1$
2) $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$
3) $x^4 + m^2n^2 + n^4$
4) $x^8 + 3x^4 + 4$
5) $x^4 + 2x^2 + 9$
6) $4x^4 - 29x^2 + 25$
7) $16m^4 - 25m^2n^2 + 9n^4$
8) $81m^8 + 2m^4 + 1$
9) $49x^8 + 76x^4y^4 + 100y^8$

¡Realizamos la valoración!

Actividad 28. La factorización implica la revisión de varios temas del conocimiento matemático, siendo en sí una forma de mejorar la agilidad mental y el razonamiento en la aplicación práctica de los mismos. De igual manera, es mucho más que un contenido del álgebra, es una herramienta de trabajo para la vida cotidiana. La factorización llega al campo empresarial en varias formas:

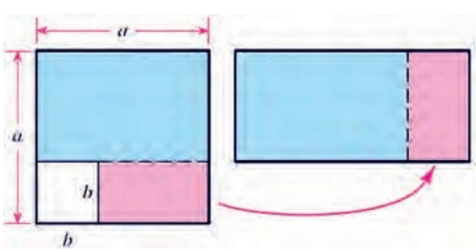
- En el área de ingeniería: contribuyendo en el diseño de edificios a desniveles.
- En la economía podemos conocer el porcentaje de un descuento, el orden, modo de facturar, etc.

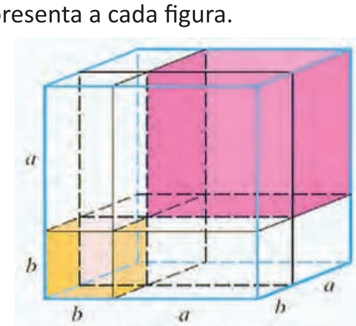
En ese sentido respondemos de manera reflexiva las siguientes preguntas:

- ¿Cómo la factorización contribuyó al desarrollo de la ciencia y tecnología?
- ¿Cómo aplicamos la factorización en la resolución de problemas?

¡Es hora de la producción!

Actividad 29. Utilizando materiales de nuestro entorno creamos las siguientes figuras, posteriormente modelamos una expresión algebraica factorizada y su respectiva producto que representa a cada figura.

1. 

2. 

- Investigamos la utilidad de la factorización en construcciones y actividades económicas.

FACTORIZACIÓN DE EXPRESIONES ALGEBRAICAS
EN PROCESOS PRODUCTIVOS

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Historia de la factorización. La factorización es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para convertir una expresión algebraica de manera conveniente. Esta tiene una importancia considerable a través de la historia.

La factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado. Por otro lado, los babilonios, fueron los primeros que resolvieron, ecuaciones cuadráticas en unas tablillas descifradas por Neugebaveren 1930, cuya antigüedad es de unos 4.000 años, en estas se encontraron soluciones a varias ecuaciones, empleando el método conocido actualmente como "completar el cuadrado".

Por aquellos años existió una proeza al hallar una solución para polinomios con coeficientes racionales ax^3+bx^2+cx+d donde a, b, c y d son números cualesquiera, y "a" es diferente de cero.

Lo que tienen todas estas expresiones en especial, y que las hace ser de tercer grado, es que la incógnita aparece elevada al exponente 3 y ese es el mayor exponente de la incógnita. La gran proeza matemática de descubrir la fórmula, fue realizada por el matemático italiano Scipione del Ferro.

Actividad 30.

- Investiguemos la relación de Scipione del Ferro con Niccolo Fontana y Girolamo Cardano para con los polinomios ya mencionados.
- ¿Crees que en la actualidad es una proeza calcular polinomios de la forma $ax^3 + cx^2 + d$? ¿Por qué?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Factorización por método de Ruffini

El método de Ruffini, es un método muy práctico, eficaz y sencillo, que nos permite encontrar las diferentes raíces de cualquier polinomio. Es ideal para aquellos polinomios que tienen un grado superior a dos (2).

Este método consiste en seleccionar una posible raíz del polinomio dado y formar una tabla; en el momento en que el último resultado de la tabla sea cero (0) habremos culminado; si no ocurre esto, entonces debemos intentarlo con otra posible raíz.

	1	0	-41	0	+184	0	-144
-1		-1	+1	+40	-40	-144	+144
	1	-1	-40	+40	+144	-144	0
1		+1	0	-40	0	+144	
	1	0	-40	0	+144	0	
-2		-2	+4	+72	-144		
	1	-2	-36	+72	0		
2		2	0	-72			
	1	0	-36				
-6		-6	+36				
	1	-6	0				
6		+6					
	1	0					

Factorizamos: $x^6-41x^4+184x^2-144$

Ordenamos el polinomio de forma decreciente respecto al exponente de la variable, debemos completar los vacíos con ceros.

Se determina los posibles divisores del término independiente son:

$$144=+1,-1,+2,-2,+3,-3,+6,-6,+9,-9,\dots$$

Se baja el primer coeficiente, se multiplica por el divisor (-1), de modo que $1*(-1)=-1$, luego sumamos en vertical $0+(-1)=-1$.

Repetimos el proceso hasta simplificar los coeficientes.

Se anota los factores múltiplos $(x\dots)$ con el signo cambiado $(x-1)$

$$R.(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)(x+6)(x-6)$$

Actividad 31. Fortalecemos nuestro aprendizaje factorizando los siguientes polinomios en nuestros cuadernos.

1) y^3+5y^2+8y-4
2) m^4-22m^2-75
3) $b^3-9b^2+26b-24$
4) $a^5-21a^3+16a^2+108a-144$
5) $x^4+x^3-6x^2-4x+8$
6) $x^5+6x^4+5x^3-24x^2-36x$
7) $x^5+2x^4-3x^3-8x^2-4x$
8) x^4-2x^2+1

2. Casos combinados de factorización

Existen polinomios que se deben factorizar dos o más veces con diferentes métodos; como, por ejemplo:

Ejemplo 1. Factorizamos la expresión $2x^3+6x^2-8x$.

Solución: obtenemos el factor común del trinomio $2x^3+6x^2-8x \rightarrow 2x(x^2+3x-4)$

Factorizamos el trinomio de la forma x^2+bx+c

Ejemplo 2. Factorizamos la expresión $3x^4-243$

$$2x\left(x^2+3x-4\right)\rightarrow 2x\left(x+4\right)\left(x-1\right)$$

Solución: factorizamos 3 de la expresión $3x^4-243\rightarrow 3\left(x^4-81\right)$

Factorizamos el binomio con diferencia de cuadrados

$$3\left(x^4-81\right)\rightarrow 3\left(x^2-9\right)\left(x^2+9\right)$$

Factorizamos nuevamente el primer factor aplicando diferencia de cuadrados.

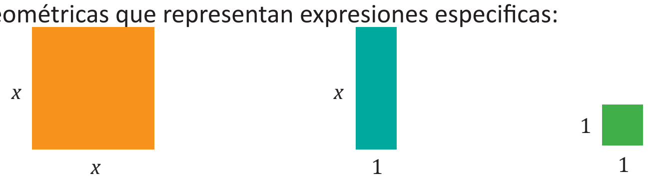
$$3\left(x^2-9\right)\left(x^2+9\right)\rightarrow 3\left(x-3\right)\left(x+3\right)\left(x^2+9\right)$$

Actividad 32. En nuestros cuadernos factorizamos los siguientes polinomios

1) z^2-3z+2
2) a^2-a-20
3) $x^2-7x+10$
4) $x^2-2x-48$
5) $x^2-6a-40$
6) $x^2+3x-54$
7) $3m^2+10m+8$
8) $6m^2+7m+2$
9) $3x^2-x-4$

3. Interpretación geométrica y aplicación de la factorización

Para realizar una interpretación geométrica de la factorización se requiere normar las siguientes herramientas, es decir, figuras geométricas que representan expresiones especificas:

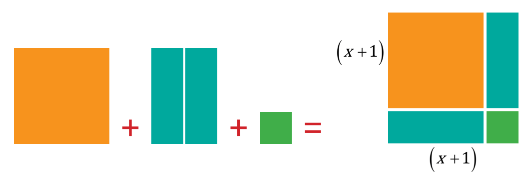


$x^2=x^2$ $\qquad$ $x\cdot 1=x$ $\qquad$ $1^2=1$

Observemos algunos ejemplos de factorización mediante esta interpretación:

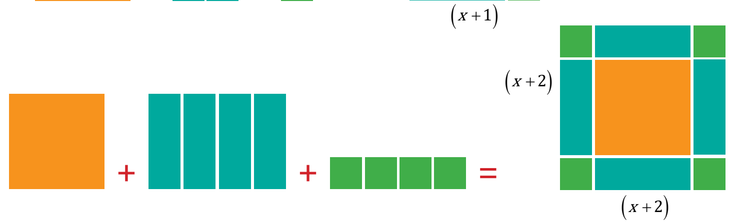
Ejemplo 1. Factorizar x^2+2x+1

$$x^2+2x+1\rightarrow\left(x+1\right)\left(x+1\right)$$



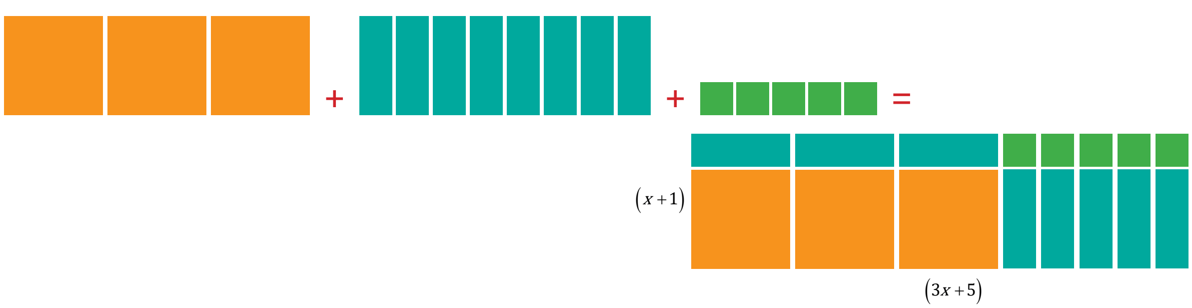
Ejemplo 2. Factorizar x^2+4x+4

$$x^2+4x+4\rightarrow\left(x+2\right)\left(x+2\right)$$



Ejemplo 3. Factorizar $3x^2+8x+5$

$$3x^2+8x+5\rightarrow\left(3x+5\right)\left(x+1\right)$$



Actividad 33. En nuestros cuadernos realicemos las siguientes interpretaciones geométricas de los polinomios:

1) $x^2+10x+24$
2) $x^2+14x+33$
3) $x^2+3x-180$
4) x^2+4x+3
5) x^2+x-2
6) $x^2+22x+30$
7) m^2-m-30
8) $8x^2+2x-1$
9) $6x^2+7x+2$

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 34. Como pudimos observar la factorización ha sido un tema del cual han tratado numerosos matemáticos importantes, haciendo un recorrido por la historia de las matemáticas, específicamente con la solución de ecuaciones polinómicas con coeficientes racionales.

De igual manera, comprendemos que la factorización es una de las herramientas más empleadas en el trabajo matemático para "transformar" una expresión algebraica de manera conveniente, para resolver algún problema.

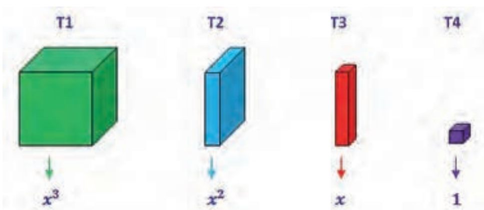
Tiene una importancia apreciable a través de la historia, es la solución de ecuaciones algebraicas; de hecho, en un primer momento, la factorización surge ante la necesidad de solucionar ecuaciones de segundo grado.

En el cuaderno de ejercicios respondemos las siguientes preguntas.

1. ¿El método gráfico te parece más fácil de comprender o más complicado? ¿Por qué?
2. ¿Por qué es importante aprender a factorizar?
3. ¿Cómo podemos aplicar la factorización en la cotidianidad?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 35. Elaboramos figuras geométricas con materiales de nuestro entorno, para realizar la interpretación geométrica en la factorización:

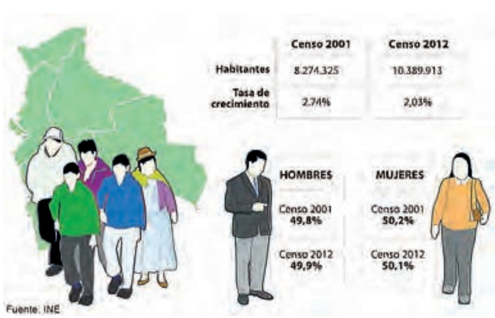


Organicemos un concurso de factorización geométrica con nuestros compañeros, premiando a quienes resuelven ejercicios de factorizacion en el menor tiempo posible.

FRACCIONES ALGEBRAICAS Y SUS OPERACIONES

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 36. Sabias que el objetivo del censo es obtener información estadística sobre la cantidad y las características de la población boliviana, datos que coadyuvarán en la planificación y toma de decisiones para la implementación de políticas públicas. Con estas políticas se podrá mejorar la educación, salud y seguridad ciudadana. Lo interesante de esto es que los datos recolectados se pueden representar en fracciones aritméticas y algebraicas. Con los cuales se dan respuestas a muchas preguntas. Como por ejemplo ¿Qué cantidad de mujeres ejercen la profesión de maestra?, etc.



- Con nuestros compañeros realicemos una investigación sobre los diferentes censos que se realizaron en nuestro País, para dar respuesta a dudas como ¿Qué año se realizó el primer censo en Bolivia?, ¿Qué tipos de censos existen? ¿Cuál es la relación de distribución de recursos con el censo?

Para realizar esta investigación, debemos buscar datos en páginas oficiales como por ejemplo la página del Instituto Nacional de Estadística https://censo.ine.gob.bo/.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Fracción algebraica

Una fracción algebraica es una expresión que se representa como el cociente de dos polinomios P/Q. Donde el polinomio P es el numerador y Q el denominador de la fracción. Por lo tanto:

$$\frac{P}{Q} \rightarrow \frac{2x}{3};\quad \frac{\sqrt{2}}{2+x};\quad \frac{-x}{-y};\quad \frac{2x-5}{x^2+9x-81};\quad \frac{a^3+4b^2}{a^5-5ab+2b^3}$$

Son fracciones algebraicas racionales, donde $a,b,\ldots x,y \in \mathbb{R}$

Existen reglas para realizar cálculos con fracciones algebraicas, estas son las mismas que estudiamos en las fracciones aritméticas. De igual manera se considera fracción algebraica a toda expresión que mínimamente posee una letra o variable en el denominador, por ejemplo:

$$\frac{P}{Q} \to \frac{1}{2x^2}; \quad 2x^{-2}(x-3); \quad \frac{-5x^{3m}y}{-x}; \quad \frac{\sqrt{x-2}+3}{x}$$

2. Equivalencia de fracciones algebraicas

Acorde a una de las propiedades fundamentales de las fracciones, una fracción no se altera si se multiplican o dividen el numerador y el denominador por una misma cantidad, siempre que ésta sea distinta de cero. En estas condiciones las fracciones se llaman equivalentes.

Sean $P, Q, R.$ polinomios cualesquiera, expresados en forma de fracciones equivalentes.

$$\frac{P}{Q} \to \frac{P}{Q} \cdot \frac{R}{R} = \frac{P \cdot R}{Q \cdot R} \qquad \frac{P}{Q} \to \frac{P}{Q} \div \frac{R}{R} = \frac{P \div R}{Q \div R}$$

Ejemplos 1. Calculamos la fracción equivalente de P/Q, si se multiplica el numerador y denominador por R; donde $P=(2+x), Q=(1-x)\ y\ R=(1+x)$

$$\frac{2+x}{1-x} \to \frac{(2+x)}{(1-x)} \cdot \frac{(1+x)}{(1+x)} = \frac{x^2+3x+2}{1-x^2}$$

$$\therefore \frac{2+x}{1-x} = \frac{x^2+3x+2}{1-x^2} \textit{ son fracciones equivalentes}$$

Ejemplo 2. Calculamos el equivalente de $2(x^2-1)/xy^2$, si se multiplica al numerador y denominador la expresión $2(x-2)$.

$$\frac{2(x^2-1)}{xy^2} \to \frac{2(x^2-1)}{xy^2} \cdot \frac{2(x-2)}{2(x-2)} = \frac{2(x^3-2x^2-x+2)}{xy^2(x-2)} = \frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^2y^2-2xy^2}$$

$$\therefore \frac{2(x^2-1)}{xy^2} = \frac{2x^3-4x^2-2x+4}{x^2y^2-2xy^2} \textit{ son fracciones equivalentes}$$

3. Simplificación de fracciones algebraicas

Para simplificar fracciones algebraicas debemos factorizar el numerador y el denominador para eliminar los factores y términos comunes en ambos.

a. Simplificación de monomios: la parte numérica se descompone en sus factores primos y la parte literal en sus factores múltiplos acorde a su exponente. Posteriormente se eliminan los factores semejantes.

Ejemplo 1. Simplificamos $10x^2y/4xz$

$$\frac{10x^2y}{4xz} = \frac{2 \cdot 5 \cdot x \cdot x \cdot y}{2 \cdot 2 \cdot x \cdot z} = \frac{5xy}{2z}$$

Ejemplo 2. Simplificamos los monomios $15a^{12}b^{15}c^{20}/75a^{11}b^{16}c^{22}$.
Descomponemos y aplicamos la propiedad de exponentes.

$$\frac{15a^{12}b^{15}c^{20}}{75a^{11}b^{16}c^{22}} = \frac{5 \cdot 3}{5 \cdot 5 \cdot 3} \cdot a^{12-11}b^{15-16}c^{20-22} = \frac{1}{5}ab^{-1}c^{-2} = \frac{a}{5bc^2}$$

b. Simplificación de polinomios: para simplificar polinomios debemos factorizar el numerador y/o el denominador y posteriormente eliminar los factores y términos semejantes.

Ejemplo 1. simplificamos: $\dfrac{3ab}{2a^2b+2a^3}$

Obtenemos factor común en el denominador $\dfrac{3ab}{2a^2b+2a^3} = \dfrac{3ab}{2a^2(b+a)} = \dfrac{3b}{2a(b+a)}$

Ejemplo 2. simplificamos: $\dfrac{(4n^2+4n-3)(n^2+7n-30)}{(2n^2-7n+3)(4n^2+12n+9)}$

Glosario

Signos de una fracción

Una fracción tiene tres signos:

1. Signo en el numerador
2. Signo en el denominador
3. Signo de la fracción

Cambio de signo en una fracción

1. Cuando una fracción no tiene factores indicados, se puede cambiar dos de sus tres signos sin que la fracción se altere.

$$\frac{P}{Q} = +\frac{+a}{+b} = -\frac{-a}{+b} = -\frac{+a}{-b} = +\frac{-a}{-b}$$

2. Cuando una fracción tiene los factores indicados, el cambio de signo no altera la fracción si el cambio se realiza a un número par de factores, si el cambio es a un número impar si cambia de signo.

$$\frac{(a-b)(a-c)}{(b-a)(c-a)} = \frac{(a-b)(a-c)}{-(b-a)(a-c)}$$

$$\frac{(a-b)(a-c)}{-(b-a)(a-c)} = \frac{-(a-b)(a-c)}{(b-a)(a-c)}$$

$$\therefore \frac{(b-a)(a-c)}{(b-a)(a-c)} = +1$$

Propiedades de potenciación:

a. Producto de bases iguales

$$a^n \times a^m = a^{n+m}$$

b. Cociente de bases iguales

$$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

c. Potencia inversa

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

d. Exponente cero

$$a^0 = 1$$

e. Potencia de otra potencia

$$(a^n)^m = a^{n \cdot m}$$

f. Propiedad distributiva

$$(ab)^m = a^m b^m \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^m = \frac{a^m}{b^m}$$

Factorizamos los numeradores y denominadores.

$$\frac{(4n^2+4n-3)(n^2+7n-30)}{(2n^2-7n+3)(4n^2+12n+9)}=\frac{\cancel{(2n+3)}\cancel{(2n-1)}(n+10)\cancel{(n-3)}}{\cancel{(2n-1)}\cancel{(n-3)}(2n+3)\cancel{(2n+3)}}$$

$$=\frac{n+10}{2n+3}$$

Ejemplo 3. simplificamos: $\dfrac{x^2-y^2}{x^2-4xy+3y^2}$

$$\frac{x^2-y^2}{x^2-4xy+3y^2}=\frac{(x-y)(x+y)}{(x-3y)(x-y)}=\frac{x+y}{x-3y},\ siempre\ y\ cuando\ (x+y)\neq 0$$

Actividad 37. En nuestros cuadernos simplificamos las siguientes expresiones algebraicas.

1) $\dfrac{12x^2y^2}{4x^3y}$

2) $\dfrac{-16a^{20}b^{10}c^{1+m}}{-8a^{19}b^{12}c^2}$

3) $\dfrac{6x^3-18x^2-24x}{15x-9x^2}$

4) $\dfrac{ab^2m^2-2ab^2mn+ab^2n^2}{abm^2-abn^2}$

5) $\dfrac{8-a^2}{a^2+2a-8}$

6) $\dfrac{a^3+b^3}{a^3-b^3}$

7) $\dfrac{2a^3-2ab^2+a^2-b^2}{2ab^2+b^2-2a^3-a^2}$

8) $\dfrac{(x-2)^2(x^2+x-12)}{(2-x)(3-x)^2}$

9) $\dfrac{ab(x^2+y^2)+xy(a^2+b^2)}{ab(x^2-y^2)+xy(a^2-b^2)}$

10) $\dfrac{\left[\left(x+\frac{1}{y}\right)\left(x-\frac{1}{y}\right)\right]^n\left(x-\frac{1}{y}\right)^{-2n}}{\left[\left(y+\frac{1}{x}\right)\left(y-\frac{1}{x}\right)\right]^{-n}\left(y-\frac{1}{x}\right)^{2n}}$

11) $\dfrac{(a-1)(a^2-9)(a-5)+27}{(a+2)(a^2-16)(a-6)+48}$

4. Mínimo común múltiplo (m.c.m.)

El mínimo común múltiplo de dos o más expresiones algebraicas es aquel término que se divide por todos los factores comunes y no comunes resultantes de:

- Obtener el m.c.m. de los coeficientes.
- Tomar los factores que no se repiten y de los que se repiten, tomar el de mayor exponente, para luego multiplicarlo por el m.c.m. de los coeficientes.

Ejemplo 1. Calcular el m.c.m. de la siguiente expresión $24x^2y^2z; 15xy^2z; 36y^4z^2$

Solución: calculemos el m.c.m. de los coeficientes y las variables

24	15	36	2
12	15	18	2
6	15	9	2
3	15	9	3
1	5	3	3
1	5	1	5
1	1	1	

$mcm = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 = 360$

Se toman los factores literales de mayor exponente si son comunes, de igual manera se toma los que no son iguales.

$mcm = x^2y^4z^2$

Por lo tanto, el mcm de $24x^2y^2z; 15xy^2z; 36y^4z^2\ es\ 360x^2y^4z^2$

5. Máximo Común Divisor (M.C.D.)

El máximo común divisor de dos o más expresiones algebraicas es el término o polinomio que divide a todas y cada una de las expresiones dadas. Para obtener el M.C.D., debemos obtener:

- El máximo común divisor de los coeficientes.
- De los factores literales (monomios o polinomios) tomamos el de menor exponente común y se multiplica por el MCD de los coeficientes.

Ejemplo 1.calcular el MCD de $24x^2y^2z; 15xy^2z; 36y^4z^2$.

24	15	36	3
8	5	12	

$MCD = 3$

Tomamos los factores literales comunes de menor exponente.

$MCD = y^2z$

Por lo tanto, el MCD de $24x^2y^2z; 15xy^2z; 36y^4z^2\ es\ 3y^2z$

Actividad 38. En nuestros cuadernos determinamos el m.c.m. y el M.C.D. de las siguientes expresiones algebraicas:

1) $70x^2y^3z^4$; $42x^2y^4z^4$; $77x^3y^5z^3$
2) $96m^2y^2$; $72m^3y^4$; $120m^4y^5$
3) $4a^2b$; $8a^3b^2c$; $10ab^3c^3$
4) $78abc^2$;$39a^2bc$; $52ab^2c$
5) $m^2+mn;mn+n^2;m^3+m^2n$
6) $3a^2-a;27a^3-1;9a^2-6a+1$
7) $m^3-1;m^2-1$
8) $ab+b;a^2+a$
9) $60x^2b^x;75a^4b^{x+2};95ab^{x+1}$
10) $x^2-y^2;x^2-2xy+y^2$
11) $a^3-2a^2;3a^2-3a;4a^3-4a^2$
12) $124a^2b+12b;22a^2+2a$

6.Operaciones básicas con fracciones algebraicas

Suma y resta de fracciones algebraicas: Para sumar y restar fracciones algebraicas, empleamos el siguiente procedimiento:

1. Si es posible se simplifiquen las fracciones.
2. Hallamos el m.c.m. determinando el mínimo común denominador de los denominadores
3. Dividimos el mínimo común denominador entre cada denominador y luego lo multiplicamos por su respectivo numerador.
4. Simplificamos las expresiones restantes si es posible.

Ejemplo 1. Sumamos $\frac{3x}{4x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{4a-3}{y^2}$

Solución: simplificamos las fracciones si es posible y hallamos el m.c.m. descomponiendo en factores cada uno de los denominadores, para hallar el común denominador.

$$\frac{3x}{4x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{4a-3}{y^2}=\frac{3\cancel{x}}{4x\cdot \cancel{x}}+\frac{2}{xy}+\frac{4a-3}{y^2}=\frac{3}{4x}+\frac{2}{xy}+\frac{4a-3}{y^2}$$

De los denominadores $4x;xy;y^2$ *el m.c.m.es* $4xy^2$

Dividimos el m.c.m.entre cada denominador $\frac{4xy^2}{4x}=y^2;\frac{4xy^2}{xy}=4y;\frac{4xy^2}{y^2}=4x$

Multiplicamos los resultados por los numeradores $\frac{y^2(3)+4y(2)+4x(4a-3)}{4xy^2}=\frac{3y^2+8y+16ax-12x}{4xy^2}$

Ejemplo 2. Sumamos $\frac{a+5}{a^2-10a+25}-\frac{5a+3}{a^2-25}+\frac{a-1}{a+5}$

Solución: factorizamos y simplificamos las fracciones:

$$\frac{a+5}{a^2-10a+25}-\frac{5a+3}{a^2-25}+\frac{a-1}{a+5}=\frac{(a+5)}{(a-5)(a-5)}-\frac{(5a+3)}{(a-5)(a+5)}+\frac{(a-1)}{(a+5)}$$

Efectuamos las multiplicaciónes en el numerador

$$=\frac{(a+5)(a+5)-(5a+3)(a-5)+(a-1)(a-5)^2}{(a-5)^2(a+5)}$$

$$=\frac{a^2+10a+25-(5a^2-25a+3a-15)+(a-1)(a^2-10a+25)}{(a-5)^2(a+5)}$$

$$=\frac{a^2+10a+25-5a^2+22a+15+a^3-10a^2+25a-a^2+10a-25}{(a-5)^2(a+5)}$$

Simplificamos $$=\frac{67a-15a^2+15+a^3}{(a-5)^2(a+5)}=\frac{a^3-15a^2+67a+15}{(a+5)(a-5)^2}$$

Actividad 39. En nuestros cuadernos fortalecemos lo aprendido sumando y/o restando las siguientes fracciones.

1) $\frac{1}{a}+\frac{4}{a+b}-\frac{3}{a^2}$

2) $\frac{a}{a^2+6ab}+\frac{a-b}{a^2+5ab-6b^2}-\frac{a+b}{a}$

3) $\frac{a}{a^2b^2}-\frac{1}{(a+b)}+\frac{a+b}{(a-b)}$

4) $\frac{m+n}{2m+3n}-\frac{m}{4m^2+6mn+9n^2}+\frac{1}{2m^2+mn-3n^2}$

5) $\frac{1}{x}+\frac{x+1}{x^2}-\frac{x}{x-1}$

6) $\frac{a+1}{a^2+a-12}-\frac{12}{a^2+5a-24}$

7) $\frac{a-b}{2}+\frac{a^2-b^2}{5a}+10ab$

8) $\frac{a}{a^2+6ab}+\frac{a-b}{a^2+5ab-6b^2}-\frac{a+b}{a}$

9) $\frac{(a-2)^{\frac{2}{3}}}{4(a+1)^{\frac{2}{3}}}-\frac{3(a+1)^{\frac{1}{3}}}{4(a-2)^{\frac{1}{3}}}$

10) $\frac{(8a-3)(4a^2+3a)^{\frac{1}{3}}}{3(4a^2-3a)^{\frac{2}{3}}}-\frac{(8a+3)(4a^2-3a)^{\frac{1}{3}}}{3(4a^2+3a)^{\frac{2}{3}}}$

11) $\frac{a+3b}{b+a}-\frac{3b^2}{b^2-a^2}+\frac{a}{b-a}$

Multiplicación de fracciones algebraicas: para multiplicar fracciones algebraicas descomponemos en factores el numerador y denominador, simplificamos las fracciones, luego multiplicamos numeradores y denominadores entre sí.

Ejemplo 1. Multiplicamos: $\left(\frac{5x}{9y}\right)\left(\frac{3y}{15x^2}\right)$

Multiplicamos y simplificamos los numeradores $\left(\frac{5x}{9y}\right)\left(\frac{3y}{15x^2}\right)=\frac{15\cdot x\cdot y}{15\cdot 9\cdot x\cdot x\cdot y}=\frac{1}{9x}$

Ejemplo 2. Multiplicamos: $\left(\frac{x^2-81}{2x^2+10x}\right)\left(\frac{2x+40}{x^2-36}\right)\left(\frac{2x-12}{2x+18}\right)\left(\frac{x^4+5x^2}{mx+20m}\right)$

Factorizamos los numeradores y denominadores para luego simplificar los términos semejantes.

$$\left[\frac{(x+9)(x-9)}{2(x^2+5)}\right]\left[\frac{2(x+20)}{(x+6)(x-6)}\right]\left[\frac{2(x-6)}{2(x+9)}\right]\left[\frac{x^2(x^2+5)}{m(x+20)}\right]=\left[\frac{x-9}{1}\right]\left[\frac{1}{x+6}\right]\left[\frac{1}{1}\right]\left[\frac{x^2}{m}\right]=\frac{x^2(x-9)}{m(x+6)}=\frac{x^3-9x^2}{mx+6m}$$

Ejemplo 3. Multiplicamos: $\frac{(x^2-5x+6)}{(3x-15)}\cdot\frac{6x}{(x^2-x-30)}\cdot\frac{(x^2-25)}{(2x-4)}$

Factorizamos los numeradores y denominadores para posteriormente simplificar factores.

$$\frac{(x-2)(x-3)}{3(x-5)}\cdot\frac{6x}{(x-6)(x+5)}\cdot\frac{(x-5)(x+5)}{2(x-2)}=\frac{(x-3)}{1}\cdot\frac{x}{(x-6)}=\frac{x(x-3)}{x-6}=\frac{x^2-3x}{x-6}$$

Actividad 40. Fortalecemos nuestro aprendizaje multiplicando las siguientes fracciones algebraicas.

1) $\left(\frac{24m^2n^3}{7a^2b^3}\right)\left(\frac{42a^3}{36mn^2}\right)$

2) $\left(\frac{m^3-n^3}{a^2+2ab+b^2}\right)\left(\frac{a+b}{m-n}\right)$

3) $\left(\frac{3xyz^2}{16a^2b^7}\right)\left(\frac{2a^4b^6}{x^2y^2z}\right)$

4) $\left(\frac{36x^2-1}{16a}\right)\left(\frac{2ax}{6x+1}\right)$

5) $\left(\frac{5m-15}{3m-1}\right)\left(\frac{9m^2-6m+1}{10m-30}\right)$

6) $\left(\frac{12ab}{14m^2n^2}\right)\left(\frac{2m^4n^6}{144a^2b}\right)$

7) $\left(\frac{7a+14b}{20a-48b}\right)\left(\frac{5ab-12b^2}{a^3+a^2b}\right)$

8) $\left(\frac{4xy}{13m^2}\right)\left(\frac{39m}{12x^2y}\right)$

9) $\frac{14x^2-21x}{24x-16}\cdot\frac{12x-8}{42x-63}$

10) $\frac{x^3-27}{a^3-1}\cdot\frac{a^2+a+1}{x^2+3x+9}$

11) $\frac{x^2+5x+6}{4x^2+4x}\cdot\frac{8x+8}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x}{x+2}$

12) $\frac{x^2+5x+6}{4x^2+4x}\cdot\frac{8x+8}{x^2-9}\cdot\frac{x^2-5x}{x+2}$

13) $\frac{5}{x}\cdot\frac{2x}{y^2}\cdot\frac{3y}{10}$

14) $\frac{16ab^2}{5a^2x}\cdot\frac{10x^3}{4b^3}\cdot\frac{2a^2}{3bx}$

División de fracciones algebraicas: para multiplicar fracciones algebraicas, se multiplica el numerador de la primera fracción por el denominador de la segunda fracción, luego el denominador de la primera fracción por el numerador de la segunda fracción. Posteriormente se factorizan o se simplifican los factores semejantes.

$$\frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{ad}{bc} \qquad o \qquad \frac{a}{b}\div\frac{c}{d}=\frac{a}{b}\cdot\frac{d}{c}=\frac{ad}{bc}$$

Ejemplo 1. Realizamos la divisíon de $\dfrac{2mn}{7a} \div \dfrac{m}{35a^2}$

$$\frac{2mn}{7a} \div \frac{m}{35a^2} = \frac{(2mn)(35a^2)}{(7a)(m)} = 10an$$

Ejemplo 2. Dividimos: $\dfrac{2m^2+5mn+3n^2}{m^2-n^2} \div \dfrac{6m^2+mn-5n^2}{m+n}$

$$\textit{Invertimos la segunda fracción}\ \frac{2m^2+5mn+3n^2}{m^2-n^2} \cdot \frac{m+n}{6m^2+mn-5n^2}$$

Factorizamos y posteriormente simplificamos factores semejantes.

$$\frac{(2m+3n)(m+n)}{(m+n)(m-n)} \cdot \frac{(m+n)}{(m+n)(6m-5n)} = \frac{2m+3n}{(m-n)(6m-5n)} = \frac{2m+3n}{6m^2-5mn-6mn+5n^2} = \frac{2m+3n}{6m^2-11mn+5n^2}$$

Actividad 41. Dividimos en nuestros cuadernos las siguientes fracciones algebraicas.

1) $\dfrac{7x^2y^2}{5a^2b^3} \div \dfrac{21xy^3}{25a^3b}$

2) $\dfrac{12mn^2}{17a^2b^3} \div \dfrac{3m^3n^4}{51ab^4}$

3) $\dfrac{24xy}{35m^2n^2} \div \dfrac{12y^4}{7m^3n}$

4) $\dfrac{81a^2-4b^2}{121x^2+22x+1} \div \dfrac{9a+2b}{22x+2}$

5) $\dfrac{36m^2+36mn+9n^2}{12} \div \dfrac{24m+12n}{6n}$

6) $\dfrac{200x+240y}{39x-6y} \div \dfrac{220ax-270ay}{65x^2-10xy}$

7) $\dfrac{x}{3x^2-3y^2} \div \dfrac{x+y}{x^2-2xy+y^2}$

8) $\dfrac{6a^2}{(2a+3)^3} \div \dfrac{2a^4}{(2a+3)}$

9) $\dfrac{12a^5}{(2a^3+1)^{\frac{1}{3}}} \div \dfrac{2a^2}{(2a^3+1)^{\frac{2}{3}}}$

Fracciones complejas: son fracciones que contienen operaciones en el numerador y el denominador, por ejemplo:

Ejemplo 1. Efectuar $\dfrac{a-b}{(b+c-a)(b-c-a)} + \dfrac{b-c}{(c+a-b)(a+b-c)} + \dfrac{c-a}{(a+b-c)(a-b-c)}$

Realizamos un cambio de signo a los dos factores de la primera fracción:

$$= \frac{a-b}{(a-b-c)(a-b+c)} - \frac{b-c}{(a-b+c)(a+b-c)} + \frac{c-a}{(a+b-c)(a-b-c)}$$

$$= \frac{(a-b)(a+b-c)-(b-c)(a-b-c)+(c-a)(a-b+c)}{(a-b-c)(a-b+c)(a+b-c)}$$

$$= \frac{a^2-b^2-ac+bc+b^2-c^2-ab+ac+c^2-a^2-bc+ab}{((a-b)-c)((a-b)+c)(a+b-c)} = \frac{0}{\left((a-b)^2-c\right)(a+b-c)}$$

7. Operaciones combinadas

Para resolver operaciones combinadas con fracciones primero debemos suprimir los paréntesis si existieran, de adentro hacia afuera; potencias y raíces si existieran; multiplicaciones y divisiones de izquierda a derecha, por último las sumas y restas.

Ejemplo 1. Resolvemos el siguiente ejercicio: $\dfrac{2a}{3b} + \left(\dfrac{5}{a}\right)\left(\dfrac{3}{b^2}\right) \div \dfrac{35a}{8b}$

Cambiamos la división por multiplicación y simplificamos los factores

$$\frac{2a}{3b} + \left(\frac{15}{ab^2}\right) \div \left(\frac{35a}{8b}\right) = \frac{2a}{3b} + \left(\frac{15}{ab^2}\right) \cdot \left(\frac{8b}{35a}\right) = \frac{2a}{3b} + \frac{24}{7a^2b} = \frac{(7a^2)(2a)+(3)(24)}{21a^2b} = \frac{14a^3+72}{21a^2b}$$

Ejemplo 2. Resolvemos el siguiente ejercicio:

$$\left(\frac{3a^2+10ab+8b^2}{5a-2b}\right)\left(\frac{6a}{15a^2+17ab-4b^2}\right) \div \frac{a+2b}{10a-4b} - 12b^2$$

Descomponemos en factores el numerador y denominador, luego simplificamos los factores comunes.

$$\left[\frac{(a+2b)(3a+4b)}{(5a-2b)}\right]\left[\frac{6a}{(3a+4b)(5a-b)}\right]\div\left[\frac{a+2b}{2(5a-2b}\right]-12b^2=\left[\frac{6a(a+2b)}{(5a-2b)(5a-b)}\right]\left[\frac{2(5a-2b)}{a+2b}\right]-12b^2$$

$$\textit{Hallamos el m.c.m. y restamos}\ \frac{12a-12b^2(5a-b)}{5a-b}=\frac{12a-60ab^2+12b^3}{5a-b}$$

Actividad 42. En nuestros cuadernos resolvemos los siguientes ejercicios:

1) $\dfrac{9x}{2y}-\left[\left(\dfrac{4x^2}{y^2}\right)\left(\dfrac{y}{2x}\right)\right]$

2) $\dfrac{4a}{7b}+\left(\dfrac{16b^2}{7a}\div\dfrac{24b^3}{14a^2}\right)$

3) $\left(\dfrac{121m^2-16n^2}{4m^2-20n}\right)\left(\dfrac{m^2-5n}{11m-4n}\right)\div\dfrac{22m+8n}{m^2}$

4) $\dfrac{10p^2-3pq-4q^2}{4}\div\dfrac{35p^2-33pq+4q^2}{6}-\dfrac{p-q}{2}$

5) $\dfrac{7}{4}m^3+\dfrac{125m^2}{44n}\div\dfrac{25m}{12n}-\dfrac{1}{m}$

6) $\dfrac{x+4+\dfrac{3}{x}}{x-4-\dfrac{5}{x}}$

7) $\dfrac{\dfrac{(2a+3)^{\frac{1}{2}}}{2(a+1)^{\frac{1}{2}}}-\dfrac{(a+1)^{\frac{1}{2}}}{2(2a+3)^{\frac{1}{2}}}}{2a+3}$

8. Problemas de aplicación con fracciones algebraicas

Problema 1. El área de un rectángulo es $(xy+2x+y+2)m^2$ y uno de sus lados mide $(x+1)m$. ¿Cuál es la medida del otro lado?

Datos:

$\textit{Área}=(xy+2x+y+2)m^2$

$\textit{Lado } a=(x+1)m$

Planteamiento:

$\textit{Área}=\textit{lado } a\cdot\textit{lado } b\rightarrow\textit{lado } b=\dfrac{\textit{Área}}{\textit{lado } a}$

$\textit{lado } b=\dfrac{(xy+2x+y+2)m^2}{(x+1)m}=(y+2)m$

El otro lado mide $(y+2)m$

Problema 2. La velocidad promedio es la razón entre una distancia recorrida, y el tiempo necesario para recorrer dicha distancia. Si un móvil tarda 6 horas en recorrer una distancia de 300 kilómetros, su velocidad promedio es:

Datos:

$\textit{Velocidad}=\dfrac{\textit{distancia}}{\textit{tiempo}}$

$V=\dfrac{300km}{6h}$

Planteamiento:

$v=\dfrac{300km}{6h}$ *simplificamos*

$v=50\dfrac{km}{h}$

Su velocidad es de 50 kilómetros por hora

Actividad 43. En nuestros cuadernos solucionamos los siguientes problemas.

1. El área de un rectángulo es $(2xy+4x+2y+4)m^2$ y uno de sus lados mide $(x+1)m$. ¿Cuál es la medida del otro lado?
2. La velocidad promedio es la razón entre una distancia recorrida, y el tiempo necesario para recorrer dicha distancia. Si un móvil tarda 8 horas en recorrer una distancia de 1600 kilómetros, su velocidad promedio es:

¡Realizamos la valoración!

Actividad 44. Debemos entender que las fracciones son una de las expreciones de la matemática que aparecen con mayor frecuencia en la vida cotidiana. Una cantidad enorme de productos se venden expresados como fracciones, ya sea el kilo, litro, o incluso unidades arbitrarias e históricamente establecidas para ciertos rubros. De igual manera es muy utilizada en la economía, por ejemplo en la distribución de recursos, que se realiza a través de una repartición equitativa acorde a la cantidad y número de personas. Nada de esto tendría sentido sin el aporte de hombres y mujeres que dedicaron su vida a la matemática.

- ¿Conoces alguna mujer u hombre matemático? ¿Conoces sus aportes en el avance tecnologico?
- ¿Cómo aplicamos las fracciones algebraicas en la cotidianidad?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 45. Construimos un juego matematico con materiales de nuestro entorno y jugamos en equipos colaborativos:

- El juego está diseñado para tres jugadores, cada jugador debe tener una ficha para recorrer las casillas del tablero.
- Cada jugador lanza un dado debiendo sacar 6 para iniciar el juego.
- Cuando la ficha de un jugador cae en una casilla el jugador debe resolver el ejercicio, si es resuelto de manera errónea debe retroceder 2 espacios. Los demás jugadores controlan la resolución del ejercicio además del profesor.
- Gana el jugador que llegue primero a la meta.

PARTIDA	$\frac{x}{2}+\frac{2x}{5}$	$\frac{a+b}{5}-\frac{1}{a}$	Vuelve a la partida	$\frac{a+b}{b}\div\frac{a+b}{b^2}$
				$\frac{1}{b}+\frac{a}{b}$
$\frac{5}{a-b}+\frac{3}{a^2-b^2}$	Retrocede tres espacios	$\left(\frac{a^2+2ab+b^2}{a+b}\right)$	$\frac{m+n}{m}-m$	$\frac{m^2-n^2}{m+n}$
$\left(\frac{3x+1}{x}\right)\left(\frac{4x}{3}\right)$				
$\frac{x^2}{m}\div\frac{mn}{2x}$	$\frac{x}{a+b}-\frac{x}{a}$	$\frac{2a+4b}{a+2b}$	$\frac{x+1}{x}\div\frac{1}{x^2}$	**META**

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN ALGEBRAICA EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Analicemos la lectura "**El Origen de las Potencias - Historia del tablero de Ajedrez**"

Cuenta la leyenda que hace mucho tiempo reinaba en cierta parte de la India un rey llamado Sheram. En una de las batallas en las que participó su ejército perdió a su hijo, y eso le dejó profundamente consternado. Nada de lo que le ofrecían sus súbditos lograba alegrarle.

Un buen día un tal Sissa se presentó en su corte y pidió audiencia. El rey la aceptó y Sissa le presentó un juego que, aseguró, conseguiría divertirle y alegrarle de nuevo: el ajedrez.

Después de explicarle las reglas y entregarle un tablero con sus piezas el rey comenzó a jugar y se sintió maravillado: jugó y jugó y su pena desapareció en gran parte. Sissa lo había conseguido. Sheram, agradecido por tan preciado regalo, le dijo a Sissa que como recompensa pidiera lo que deseara.

Sissa solo pidió que le diera un grano de trigo. ¿Un simple grano de trigo? —contestó admirado el rey. – Sí, soberano. Por la segunda casilla, ordena que me den dos granos; por la tercera, 4; por la cuarta, 8; por la quinta, 16; por la sexta, 32... – Basta —le interrumpió irritado el rey—. Recibirás el trigo correspondiente a las 64 casillas del tablero de acuerdo con tu deseo: por cada casilla doble cantidad que por la precedente.

Ciencia divertida

Aprendemos sobre el origen de las potencias
Fuente: https://www.youtube.com/@mechon239

Escanea el QR

Actividad 46. Respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Cómo podemos representar la petición del soberano?
- ¿Cuántas casillas tiene un tablero de ajedrez?
- ¿Cuántos granos de trigo tendrá la décima casilla?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Teoría de exponentes y sus propiedades

La teoría de exponentes, estudia los tipos y propiedades que las rigen. El teorema de exponentes consiste en la operación de tomar una expresión algebraica llamada base y multiplicarla por sí misma cuantas veces nos indique el exponente.

$$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots,\ donde\ "a"\ es\ la\ base\ y\ "n"\ el\ exponente.$$

Propiedades exponenciales:

PROPIEDAD	FORMA GENERAL	EJEMPLO
Producto de bases iguales: si las bases son iguales, se copia la base y se suman los exponentes.	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$(5x)(8x^3) = 40x^{1+3} = 40x^4$
Cociente de bases iguales: si las bases son iguales, se copia la base y se restan los exponentes.	$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$\frac{-27x^7}{-3x^3} = \frac{-27}{-3}x^{7-3} = 9x^4$

PROPIEDAD	FORMA GENERAL	EJEMPLO
Exponente cero: cualquier expresión algebraica distinta de 0 elevada a cero es igual a 1.	$a^0 = 1 \rightarrow a \neq 0$	$\left(-21x^8\right)^0 = 1$
Potencia de otra potencia: si el exponente de una expresión algebraica esta elevada a otra potencia, se copia la base y se multiplican los exponentes:	$\left(a^m\right)^n = a^{m \cdot n}$	$\left(2^m x^2\right)^3 = 2^{m\cdot 3}x^{2\cdot 3} = 2^{3m}x^6$
Exponente negativo: si el exponente de una expresión algebraica es negativo, se invierte la base con su exponente, donde el exponente cambia de signo.	$a^{-m} = \dfrac{1}{a^m} \rightarrow a^m \neq 0$	$\left(-4x\right)^{-2} = \dfrac{1}{\left(-4x\right)^2} = \dfrac{1}{16x^2}$
Potencia de un producto: la potencia de un producto de una expresión algebraica es igual a cada uno de los factores elevados al mismo exponente.	$\left(a \cdot b\right)^n = a^n \cdot b^n$	$\left(x^2 \cdot y^3\right)^2 = x^{2\cdot 2}y^{3\cdot 2} = x^4y^6$
Potencia de un cociente: la potencia de un cociente de una expresión algebraica es igual al cociente de cada uno de los términos elevados al mismo exponente.	$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{x^4 \cdot y^3}{z^2}\right)^3 = \dfrac{x^{4\cdot 3} \cdot y^{3\cdot 3}}{z^{2\cdot 3}} = \dfrac{x^{12} \cdot y^9}{z^6}$
Propiedad de signos en la potenciación. – Si el exponente de la potencia es *par* el resultado tendrá signo positivo. – Si el exponente de la potencia es *impar*, el resultado tendrá signo negativo, si el término es negativo.	$-a^{par} = a$ $-a^{impar} = -a$	$\left(-2x\right)^2 = \left(-2x\right)\left(-2x\right) = 4x^2$ $\left(-2x\right)^3 = \left(-2x\right)\left(-2x\right)\left(-2x\right) = -8x^3$

2. Reducción de expresiones algebraicas aplicando las diferentes propiedades de potenciación

Debemos aplicar las propiedades exponenciales para reducir la expresión mediante operaciones algebraicas.

Ejemplo 1. *Simplificamos la expresión* $\dfrac{\left(a^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}}$

Solución: como las bases son iguales, se simplifica el numerador y después su denominador.

$$\frac{\left(a^2+1\right)^{-\frac{2}{3}}\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{6}}}{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^2+1\right)^{-\frac{2}{3}+\frac{1}{6}}}{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{\left(a^2+1\right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(a^2+1\right)^{\frac{1}{2}}} = \left(a^2+1\right)^{-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}} = \left(a^2+1\right)^{-1} = \frac{1}{a^2+1}$$

Ejemplo 2. *Simplificamos la expresión:* $\dfrac{\left(2x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2x^{-2} \cdot y^6\right)^{-1}\left(2xy\right)^5}$

Solución: resolvemos las potencias para cada uno de los paréntesis.

$$\frac{\left(2x^{\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{5}{6}}\right)^6}{\left(2x^{-2} \cdot y^6\right)^{-1}\left(2xy\right)^5} = \frac{2^6x^{\frac{6}{3}} \cdot y^{\frac{30}{6}}}{\left(2^{-1}x^2y^{-6}\right)\left(2^5x^5y^5\right)} = \frac{2^6x^2y^5}{2^{-1+5}x^{2+5}y^{-6+5}} = \frac{2^6x^2y^5}{2^4x^7y^{-1}} = 2^{6-4}x^{2-7}y^{5-(-1)} = 2^2x^{-5}y^6 = \frac{4y^6}{x^5}$$

Actividad 47. En nuestros cuadernos simplificamos las siguientes expresiones:

1) $\left(x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{3}{2}}z^{\frac{1}{3}}\right)^{12}$

2) $\left(a^{\frac{1}{2}}b^{-\frac{2}{3}}\right)^{-\frac{6}{4}}$

3) $\left(\dfrac{x^{-3}y^{-4}z^{-2}}{2x^{-3}y^{-1}}\right)^2$

4) $\dfrac{4x^5y^{-4}}{\left(2x^{-2}y^3\right)^{-2}}$

5) $\dfrac{\left(a+3b\right)^{\frac{1}{2}}\left(a+3b\right)^{-\frac{2}{3}}}{\left(a+3b\right)^{-\frac{4}{3}}}$

6) $\left[\dfrac{\left(x^3y^{-2}\right)^{-1}}{\left(2x^2y^{-3}\right)^{-2}}\right]^{-3}$

7) $\left[\dfrac{\left(a^2b^{-\frac{3}{4}}c^{\frac{1}{2}}\right)^4}{\left(a^{\frac{1}{3}}b^{\frac{1}{6}}c^{\frac{1}{2}}\right)^{-6}}\right]^{-1}$

8) $\dfrac{1}{\left(3x^2y^3\right)^{-2}} \cdot \left(2xy^{-2}\right)^{-3}$

9) $\dfrac{\left(x^8y^{12}\right)^{\frac{3}{4}}}{\left(x^9y^6\right)^{\frac{1}{3}}}$

10) $\dfrac{\left[\left(a^2+b^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(a^2+b^2\right)^{-\frac{3}{4}}\right]^4}{\left(a^2+b^2\right)^{-2}}$

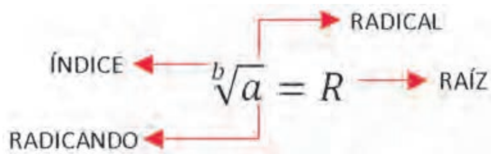
11) $\left[\left(4a^2b^3\right)^{-2}\left(2a^2b^{-2}\right)^2\right]^{-2}$

12) $\dfrac{x^{-1}y^{-1}}{x^{-1}-y^{-1}}$	13) $\left(\dfrac{b^0-b^{-2}}{x^0-b^{-1}}\right)^{-1}$	14) $\dfrac{a^2b^2\left(a^{-2}+b^{-3}\right)}{a-b}$	15) $\dfrac{ab^{-2}+a^{-2}b}{a^{-1}+b^{-1}}$

3. Radicales (raíz de índice natural de una expresión algebraica)

La radicación es la operación inversa a la potenciación, consiste en hallar la raíz del radicando o cantidad subradical, por lo tanto:

$$\sqrt[n]{a}=b \; si \; y \; solo \; si \; b^n=a$$



Propiedades de los radicales

PROPIEDAD	FORMA GENERAL	EJEMPLO
Raíz de un producto. El producto de radicales de igual índice es igual al producto de las raíces de cada uno de los factores.	$\sqrt[n]{a\cdot b}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$	$\sqrt[5]{4xy^3}=\sqrt[5]{4}\cdot\sqrt[5]{x}\cdot\sqrt[5]{y^3}$
Raíz de una raíz. Se multiplican los índices de los radicales y se copia la cantidad subradical.	$\sqrt[p]{\sqrt[q]{\sqrt[r]{a}}}=\sqrt[p\cdot q\cdot r]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{\sqrt{3x}}}=\sqrt[3\cdot 4\cdot 2]{3x}=\sqrt[24]{3x}$
Raíz de un cociente. La raíz de un cociente es igual al cociente de la raíz del numerador entre la raíz del denominador.	$\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\dfrac{3a^6}{8b^3}}=\dfrac{\sqrt[3]{3a^6}}{\sqrt[3]{8b^3}}=\dfrac{a^2\sqrt[3]{3}}{2b}$
Propiedad de signos en la radicación. Para obtener el signo de la raíz utilizamos la siguiente ley de signos.	$\sqrt[Par]{(+)}=(\pm)$ $\sqrt[Impar]{(+)}=(+)$ $\sqrt[Impar]{(-)}=(-)$ $\sqrt[Par]{(-)}=\boldsymbol{i}$ valor imaginario	$\sqrt{16}=\pm4;\ \sqrt[3]{8}=2$ $\sqrt[3]{-8}=-2$ $\sqrt{-4}=\sqrt{4(-1)}=2i$

4. Introducción de factores dentro del radical

Dada un radical, debemos introducir el coeficiente al radical. Para ello, se debe elevar el coeficiente a un exponente igual al índice de la raíz.

Ejemplo 1. Introducimos el coeficiente al radical

$$\frac{5xy^9}{4z^2}\cdot\sqrt{22xy^3}=\sqrt{22xy^3\left(\frac{5xy^9}{4z^2}\right)^2}=\sqrt{22xy^3\left(\frac{25x^2y^{18}}{16z^4}\right)}=\sqrt{11xy^3\left(\frac{25x^2y^{18}}{8z^4}\right)}$$

$$=\sqrt{\frac{275x^3y^{21}}{8z^4}}$$

5. Extracción de factores de un radical y transformación de radicales

Para extraer un factor fuera del radical, se divide el exponente de la cantidad subradical entre el índice del radical, el cociente será el exponente del factor saliente.

Ejemplo 1. Extraemos los factores del radical

$$6\sqrt[3]{\frac{81x^5y^2z^7}{64m^9}}=6\sqrt[3]{\frac{27*3*x^3*x^2*y^2*z^6*z}{64*m^9}}=6\frac{3xz^2\sqrt[3]{3x^2y^2z}}{4m^3}=\frac{9xz^2\sqrt[3]{3x^2y^2z}}{2m^3}$$

6. Operaciones con radicales

Suma y resta de radicales. Para realizar estas operaciones los radicales deben ser semejantes, factorizar estos radicales y simplificar si es necesario.

Ejemplo 1 Sumamos y restamos: $\sqrt{81x^2z}-5\sqrt{147y}+\sqrt{12y}-\sqrt{125z}$

Actividad 48. En los cuadernos realicemos la introducción al radical.

1) $b^3\sqrt{abc}$

2) $x^2y^3\sqrt[3]{6x^2y}$

3) $3xz^2\sqrt[4]{2x^3y^2z}$

4) $\frac{5a}{2}\sqrt[3]{2ab^2}$

5) $\frac{7x^3y^2}{3z^2}\sqrt{x^{-1}yz}$

6) $\frac{2x^2y^2}{z}\sqrt[4]{\frac{z^4}{3xy}}$

7) $(x+1)\sqrt[3]{\frac{5y^2}{x+1}}$

8) $\left(\frac{3x-6}{3y+3}\right)\sqrt{\frac{y+3}{5x}}$

Actividad 49. En nuestros cuadernos extraemos factores del radical

1) $\sqrt[4]{16x^4y}$

2) $5\sqrt{8a^5b^2c}$

3) $3\sqrt[3]{-27x^3y^2z^7}$

4) $9y^2\sqrt[3]{250x^7y^{14}z^0}$

5) $\frac{5a}{7b}\sqrt{\frac{180b^7c^3}{9a^5d^2}}$

6) $\frac{3x^2y^5}{2z^3}\sqrt{\frac{288y^7}{45x^5m^2z^3}}$

7) $6\sqrt[3]{(2x-1)(8x^2-8x+2)}$

8) $\frac{3x}{y}\sqrt{\frac{3x^2+12x+12}{(x-y)(x^2y^2)}}$

Descomponemos los factores: $9x\sqrt{z}-5\sqrt{49\cdot 3\cdot y}+\sqrt{4\cdot 3\cdot y}-\sqrt{25\cdot 5\cdot z}$

Extraemos factores : $9x\sqrt{z}-(5*7)\sqrt{3y}+2\sqrt{3y}-5\sqrt{5z}$

Sumamos y restamos : $9x\sqrt{z}-35\sqrt{3y}+2\sqrt{3y}-5\sqrt{5z}$

$$9x\sqrt{z}-33\sqrt{3y}-5\sqrt{5z}$$

Ejemplo 2 Sumamos y restamos: $x\sqrt{12xy}+\sqrt{98y^3z}-5\sqrt{3x^3y}-y\sqrt{18yz}+x\sqrt{3xy}$

Simplificamos radicales $x\sqrt{2^2\cdot 3xy}+\sqrt{2\cdot 7^2y^2yz}-5\sqrt{3x^2xy}-y\sqrt{2\cdot 3^2yz}+x\sqrt{3xy}$

$$=x\left(2\sqrt{3xy}\right)+7y\sqrt{2yz}-5\left(x\sqrt{3xy}\right)-y\left(3\sqrt{2yz}\right)+x\sqrt{3xy}$$

$$=2x\sqrt{3xy}+7y\sqrt{2yz}-5x\sqrt{3xy}-3y\sqrt{2yz}+x\sqrt{3xy}$$

$$=2x\sqrt{3xy}+7y\sqrt{2yz}-5x\sqrt{3xy}-3y\sqrt{2yz}+x\sqrt{3xy}$$

$$=(2x-5x+x)\sqrt{3xy}+(7y-3y)\sqrt{2yz}=-2x\sqrt{3xy}+4y\sqrt{2yz}$$

Multiplicación de radicales. Se aplican las propiedades de multiplicación de radicales y posteriormente se extrae la cantidad subradical.

Ejemplo 1. Multiplicamos : $3x^2\sqrt{5y}\cdot\frac{1}{9}\sqrt{7xy}$

$$3x^2\sqrt{5y}\cdot\frac{1}{9}\sqrt{7xy}=\left(3x^2\cdot\frac{1}{9}\right)\sqrt{5y\cdot 7xy}=\frac{x^2}{3}\sqrt{35xy^2}=\frac{x^2y\sqrt{35x}}{3}$$

Ejemplo 2. *Multiplicamos:* $\sqrt{3x}\cdot 5\sqrt[3]{x^2y}$

Igualamos los indices $\sqrt{3x}\cdot 5\sqrt[3]{x^2y}=5\sqrt[6]{(3x)^3}\cdot\sqrt[6]{(x^2y)^2}=5\sqrt[6]{(3x)^3(x^2y)^2}$

$$=5\sqrt[6]{27x^3x^4y^2}=5\sqrt[6]{27x^6xy^2}=5x\sqrt[6]{27xy^2}$$

División de radicales. Se aplican propiedades división de radicales y posteriormente se extrae el radical.

Ejemplo 1. Dividimos: $15\sqrt{3x^6y}\div 3\sqrt{27x^4}$

Extraemos del radical $\frac{15}{3}\sqrt{\frac{3x^6y}{27x^4}}=5\sqrt{\frac{x^2y}{9}}=\left(5*\frac{x}{3}\right)\sqrt{y}=\frac{5x\sqrt{y}}{3}$

Ejemplo 2. Dividimos: $\sqrt[4]{4x^3}\div 2\sqrt[3]{3xy}$

Obtenemos el m.c.m. en los indices $\frac{\sqrt[4]{4x^3}}{2\sqrt[3]{3xy}}=\frac{\sqrt[12]{(4x^3)^3}}{2\sqrt[12]{(3xy)^4}}=\frac{\sqrt[12]{64x^9}}{\sqrt[12]{81x^4y^4}}=\frac{1}{2}\sqrt[12]{\frac{64x^5}{81y^4}}$

7. Racionalización

Racionalización de una fracción si el denominador es monomio: Para racionalizar el radical del denominador cuando la fracción es un monomio, multiplicamos el numerador y denominador por un radical igual que el que se encuentra en el denominador.

Ejemplo 1. *Racionalizamos el denominador de:* $\frac{5xy}{3\sqrt{xyz}}$

Racionalizamos el radical del denominador, multiplicamos la fracción por $\sqrt{xyz}$ en el numerador y denominador.

$$\frac{5xy}{3\sqrt{xyz}}=\frac{5xy\cdot\sqrt{xyz}}{3\sqrt{xyz}\cdot\sqrt{xyz}}=\frac{5xy\sqrt{xyz}}{3\sqrt{(xyz)(xyz)}}=\frac{5xy\sqrt{xyz}}{3\sqrt{(xyz)^2}}=\frac{5xy\sqrt{xyz}}{3xyz}=\frac{5\sqrt{xyz}}{3z}$$

Racionalización de una fracción cuando el denominador es un binomio: Para racionalizar el denominador de una fracción algebraica, se debe multiplicar el numerador y el denominador por la conjugada del denominador.

Ejemplo 2. *Racionalizamos el denominador de:* $\frac{\sqrt{x}+3\sqrt{y}}{5\sqrt{7yz}-4\sqrt{2x}}$

Multiplicamos el numerador y denominador por el conjugado: $\left(5\sqrt{7yz}+4\sqrt{2x}\right)$

$$\frac{\left(\sqrt{x}+3\sqrt{y}\right)\left(5\sqrt{7yz}+4\sqrt{2x}\right)}{\left(5\sqrt{7yz}-4\sqrt{2x}\right)\left(5\sqrt{7yz}+4\sqrt{2x}\right)}=\frac{5\sqrt{7xyz}+4x\sqrt{2}+15y\sqrt{7z}+12\sqrt{2xy}}{25(7yz)-16(2x)}$$

$$=\frac{5\sqrt{7xyz}+4x\sqrt{2}+15y\sqrt{7z}+12\sqrt{2xy}}{175yz-32x}$$

8. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Para solucionar problemas, debemos obtener los datos y posteriormente realizar operaciones.

Problema 1. Un comerciante realiza la compra de cierto número de pantalones por Bs 256. Sabiendo que el número de pantalones coincide con el precio de cada pantalón, ¿cuántos pantalones compró?

Datos:

Sea x el número de pantalones que compra y el precio coincide con el número de pantalones comprados:

Planteamiento:

El número de pantalones comprados por el precio de cada pantalón es igual al importe total:

$$x \cdot x = 216 \rightarrow x^2 = 256 \rightarrow \sqrt{x^2}=\sqrt{256} \rightarrow x = 16$$

Compro 16 pantalones en total.

Problema 2. La suma de dos números es 270, y la raíz cuadrada de uno de ellos es igual a la raíz cuadrada del otro, aumentado en 18. ¿Cuáles son los números?

Datos:

Sea x el primero de los números buscados.

El segundo número será $270-x$

Planteamiento:

La raíz cuadrada de uno de ellos es igual a la raíz cuadrada del otro, aumentado en 18:

$$\sqrt{x}=\sqrt{(270-x)+18} \rightarrow \sqrt{x}=\sqrt{288-x} \rightarrow x=288-x$$

$$2x=288 \rightarrow x=\frac{288}{2}=144$$

El primer número es 144, el segundo es 126.

Actividad 53. En nuestros cuadernos solucionamos los siguientes problemas que incluyen radicales.

1. Al extraer la raíz cuadrada de un número dado, se obtiene, por resto, 2; y si a dicho número se suman 27 unidades, la raíz cuadrada de la suma aumenta en una unidad y el resto en 4. ¿Cuál es el número?
2. Un terreno cuadrado tiene una superficie de $324\,m^2$ ¿Cuánto costará cerrarlo si el metro de valla cuesta Bs 380?
3. Un propietario tiene un terreno cuyas dimensiones son 32 m de largo por 8 m de ancho, y quiere permutarlo por un terreno cuadrado de la misma superficie. ¿Cuál debe de ser el lado del terreno cuadrado?
4. Un terreno cuadrado tiene una superficie de $2209\,m^2$ y se quiere rodear con una valla que cuesta Bs 3,50 cada metro. ¿Cuánto costará la obra total?
5. Una caja en forma cúbica tiene un volumen de $125000\,cm^3$. Si se corta la mitad superior, ¿cuáles serán las dimensiones del recipiente resultante?
6. La suma de dos números es 250 y la raíz cuadrada de uno de ellos es igual a la raíz cuadrada del otro, aumentado en 5. ¿Cuáles son los números?

Actividad 50. En nuestros cuadernos multiplicamos los radicales:

1) $\left(4\sqrt{2m}\right)\left(6\sqrt{4m^6}\right)$

2) $\left(5\sqrt{a}\right)\left(3\sqrt[3]{ab}\right)$

3) $\left(\frac{1}{3}\sqrt[3]{a+b}\right)\left(\frac{6}{5}\sqrt[3]{(a+b)^2}\right)$

4) $\left(\sqrt{\frac{3}{a}}\right)\left(\sqrt[3]{a^3}\right)\left(\sqrt[4]{\frac{1}{a}}\right)$

5) $\left(\sqrt{m+n}+4\right)\left(\sqrt{m+n}-2\right)$

6) $\left(\sqrt{m}\right)\left(\sqrt[5]{m+n}\right)$

7) $\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)$

Actividad 51. En nuestros cuadernos dividimos los radicales:

1) $\sqrt{a^2-b^2}\div\sqrt{a-b}$

2) $2\sqrt[3]{x^2}\div\sqrt[3]{8x}$

3) $\sqrt[3]{5a^2}\div\sqrt{3a}$

4) $343\sqrt[3]{n}\div 7\sqrt[3]{n^4}$

5) $\frac{7}{3}\sqrt{x}\div\frac{\sqrt{x}}{3}$

6) $2\sqrt[4]{8mn^2}\div\sqrt[3]{6mn}$

7) $\sqrt{108m^2y^3}\div\sqrt{36m^3y}$

8) $\frac{1}{2}\sqrt[4]{x^2y^3}\div\sqrt{6xy}$

Actividad 52. En nuestros cuadernos racionalizamos los siguientes ejercicios.

1) $\sqrt[4]{x}\,/3x$

2) $\frac{\sqrt[5]{16x^3}}{x^2}$

3) $\frac{5-\sqrt{2}}{23}$

4) $\frac{\sqrt{x}-\sqrt{y}}{\sqrt{x}+2\sqrt{y}}$

5) $\frac{\sqrt{5a}-\sqrt{6b}}{10a-12b}$

6) $\frac{\sqrt[3]{x}-2\sqrt[3]{y}}{x-8y}$

7) $\frac{\sqrt{x+y}-\sqrt{x}}{\sqrt{x+y}+\sqrt{x}}$

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 54. La potencia estadística, es la probabilidad de detectar un efecto cuando ese efecto existe realmente en la población o en el entorno. En igualdad de condiciones, una prueba basada en una muestra grande tiene más potencia estadística que una prueba con una muestra pequeña. Esto sucede en el censo de población y vivienda. También hay formas de aumentar la potencia sin aumentar el tamaño de la muestra.

- ¿Consideras importante el estudio y análisis de la potenciación y radicación algebraica?
- ¿Cuál es la función que cumple la potenciación y radicación algebraica en la matemática?
- ¿La potenciación y radicación algebraica tiene aplicaciones en la vida real? Investiguemos para responder la pregunta.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 55. Con materiales de tu contexto construye un tablero de ajedrez más sus piezas, para fortalecer el desarrollo del pensamiento lógico matemático y realizamos un campeonato interno en la unidad educativa.

ECUACIONES ALGEBRAICAS EN LA COMUNIDAD

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 56. En la Unidad Educativa Agustín Ravelo, de la provincia Chayanta del Departamento de Potosí, los estudiantes de los diferentes años de escolaridad comparten responsabilidades en cuanto a la distribución del desayuno escolar, demostrando respeto entre varones y mujeres, practicando la igualdad de género con identidad cultural que es demostrada en las diferentes actividades deportivas y culturales.

- ¿Por qué es importante practicar la igualdad de género en la vida diaria?
- ¿Qué es identidad? Menciona algunos ejemplos.
- ¿Qué es igualdad? Menciona algunos ejemplos.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Ecuaciones lineales

Como observamos en el primer trimestre las ecuaciones lineales se resuelven mediante la aplicación de operaciones elementales en ambos miembros de la ecuación, hasta obtener el valor de la variable o incógnita.

Ejemplo 1. Resolvemos la siguiente ecuación: $3x+8=12x-10$

Reducimos términos semejantes. $3x-12x=-8-10$

$$-9x=-18$$

Multiplicamos la ecuación por -1 $(-1)(-9x)=(-1)(-18)$

$$9x=18$$

$$x=\frac{18}{9}=2$$

Ejemplo 2. Resolvemos la siguiente ecuación:

$$(2x-3)^2-(x+4)=(2x+1)(2x-5)+\sqrt{x^2+2x+1}$$

Desarrollamos las potencias, productos y radicales:

$$4x^2-12x+9-x-4=4x^2-10x+2x-5+\sqrt{(x+1)^2}$$

Simplificamos el radical: $4x^2-12x+9-x-4=4x^2-10x+2x-5+x+1$

Trasponemos términos: $4x^2-12x-x-4x^2+10x-2x-x=-9+4-5+1$

Reducimos términos semejantes:

$$-12x+10x-2x=-9$$

$$-4x=-9$$

Multiplicamos (-1) a ambos miembros $(-1)(-4x) = (-1)(-9)$

Multiplicamos y despejamos la ecuación.

$$4x = 9$$

$$x = \frac{9}{4}$$

2. Ecuaciones con coeficiente fraccionario

Cuando aparecen fracciones en la ecuación, se elimina los denominadores al multiplicar los dos miembros de la igualdad por su máximo común múltiplo.

Ejemplo 1. Resolvemos la ecuación: $\frac{x}{2} + x = \frac{3}{5}x - \frac{10}{7}$

Hallamos el m.c.m. de las fracciones $\frac{x+2x}{2} = \frac{7(3x)-5(10)}{35} \rightarrow \frac{3x}{2} = \frac{21x-50}{35}$

$35(3x) = 2(21x-50) \rightarrow 105x = 42x - 100$

Transponemos y reducimos términos semejantes. $105x - 42x = 100$

$$63x = 100 \rightarrow x = \frac{100}{63}$$

Ejemplo 2. Resolvemos la ecuación: $\frac{a+6}{12} + \frac{2a-10}{5} = \frac{3a+5}{4} + \frac{a}{6}$

Hallamos el m.c.m. de cada miembro de la ecuación.

$$\frac{5(a+6)+12(2a-10)}{60} = \frac{3(3a+5)+2a}{12} \rightarrow \frac{5a+30+24a-120}{60} = \frac{11a+15}{12}$$

Reducimos términos semejantes $29a - 90 = \frac{60(11a+15)}{12}$

$$29a - 90 = 5(11a+15)$$

$$29a - 90 = 55a + 75 \rightarrow 29a - 55a = 90 + 75 \rightarrow -26a = 165$$

$$(-1)(-26a) = (-1)165 \rightarrow 26a = 165 \rightarrow a = \frac{165}{26}$$

Actividad 57. En nuestros cuadernos Resolver las siguientes ecuaciones.

1) $4x + 24 = 8x$
2) $30x + 55 = 18x - 3x + 10$
3) $14x + 17 = 7 + 14x - 5x$
4) $4 - (3x+2) = 12x + 14 - (4x+1)$
5) $-[-(-6x-12)] = -24$
6) $[-(16+8x)+(46-2x)] = 2 - 3x$
7) $-(3x+2)+(2x-2) = -(3x+2)$
8) $-[-(45-1x)] - [-(15-2x)] = 7x$

Actividad 58. En nuestros cuadernos resolvemos las siguientes ecuaciones con coeficiente fraccionario.

1) $\frac{1}{3}x - \frac{1}{2} + \frac{5}{6}x = 3$
2) $\frac{3}{8}x + 2 - \frac{4}{5}x = 1 + \frac{3}{10}x + \frac{3}{2}$
3) $\frac{x}{2} + 6 - \frac{x}{4} = \frac{2x}{5} + 3$
4) $\frac{3x-5}{2} - 1 - \frac{2x-1}{3} + \frac{x+3}{4} = \frac{5x-1}{8}$
5) $\frac{x+3}{4} - \frac{x-4}{9} = \frac{1}{2} - \frac{x+1}{4} + \frac{2x+1}{9}$
6) $\frac{1}{2}\left(\frac{x+3}{3}\right) - \frac{3}{5}\left(\frac{2x-3}{4}\right) = x - 2$
7) $\frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x = 5$
8) $\frac{3}{4}x + 2 = \frac{5}{6}x + 1$

3. Ecuaciones fraccionarias

Son ecuaciones en las cuales la incógnita se encuentra en el denominador para resolver este tipo de ecuaciones obtenemos el m.c.m. y quitamos los denominadores. Resolvemos las siguientes ecuaciones:

Ejemplo 1. Resolvemos la siguiente ecuación $\frac{4x-11}{x^2+10x+21} = \frac{5}{x+3} - \frac{11}{2x+14}$

Descomponemos los denominadores $\frac{4x-11}{(x+7)(x+3)} = \frac{5}{x+3} - \frac{11}{2(x+7)}$

Hallamos el m.c.m. de cada miembro $\frac{4x-11}{(x+7)(x+3)} = \frac{5(2)(x+7)-11(x+3)}{2(x+3)(x+7)}$

$$\frac{4x-11}{(x+7)(x+3)} = \frac{10x+70-11x-33}{2(x+3)(x+7)} \rightarrow 2(4x-11) = -x-37$$

$$8x - 22 = -x - 37 \rightarrow 8x + x = 22 - 37 \rightarrow 9x = -15$$

$$x = -\frac{15}{9} = -\frac{5}{3}$$

4. Ecuaciones literales

Son aquellas en las que los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes son letras, distintas de la incógnita.

Ejemplo 2. Resolvemos la ecuación: $\frac{x+m}{x-m} - \frac{x-m}{x+m} = m + \frac{mx^2}{x^2-m^2}$

Actividad 59. En nuestros cuadernos solucionamos las ecuaciones fraccionarias.

1) $\frac{1}{(x-2)}+\frac{4}{(x-2)}=1$

2) $\frac{8}{(2x+3)}+\frac{2}{(2x+3)}-2$

$=\frac{1}{(2x+3)}+\frac{6}{(2x+3)}$

3) $\frac{3}{4x}-\frac{5}{14}-\frac{8}{7x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{4}-\frac{11}{14x}$

4) $\frac{2}{x}+\frac{3}{5x}=\frac{9}{5x}-\frac{3}{x^2}$

5) $\frac{4}{x^2+5x+6}=\frac{3}{2x+6}$

6) $\frac{7}{(x+2)^2}-\frac{4}{x+2}=\frac{3}{2x+4}$

7) $\frac{5}{2x}-\frac{10}{x}=\frac{1}{4}+\frac{7}{4x}$

8) $\frac{36x^2+24x+1}{6x^2+12x+3}=6$

Actividad 60. En nuestros cuadernos resolvemos las ecuaciones literales

1) $ax-a^2=bx-b^2$

2) $mx-m^2-2mn=n^2-nx$

3) $\frac{x}{m}+1=\frac{x}{n}-3$

4) $ax^2+12bx+c=3bx+4c+ax^2$

5) $(x+a)^2-6a^2=(x-a)^2+2x$

6) $m^2x+mn=4m^2-m^2n+mn$

7) $\frac{x+m}{n}+\frac{2x-n}{m}=\frac{1}{m}$

Hallamos el m.c.m. en los dos miembros de la ecuación. $\frac{(x+m)(x+m)-(x-m)(x-m)}{(x-m)(x+m)}$

$$\frac{m(x+m)(x-m)+mx^2}{(x+m)(x-m)}=\frac{x^2+xm+xm+m^2-(x^2-xm-xm+m^2)}{(x-m)(x+m)}=\frac{m(x^2-m^2)+mx^2}{(x+m)(x-m)}$$

Luego $x^2+2mx+m^2-x^2+xm+xm-m^2=mx^2-m^3-mx^2\rightarrow 4mx=-m^3\rightarrow x=-\frac{m^3}{4m}=-\frac{m^2}{4}$

5. Ecuaciones de 2do grado con soluciones reales

Se llama ecuación de segundo grado con una incógnita a toda ecuación que puede escribirse de la forma:

$$\boldsymbol{ax^2+bx+c}=0;\quad \text{donde}\, a\neq 0$$

En la ecuación x es la incógnita; a,b son los coeficientes de la ecuación y c es constante,

$\boldsymbol{ax^2}\rightarrow$ *término cuadrático* ; $\boldsymbol{bx}\rightarrow$ *término lineal*; $\boldsymbol{c}\rightarrow$ *término constante o independiente*

Clasificación de las ecuaciones de segundo grado

a. **Ecuaciones completas:** Si los coeficientes a, b y c son distintos de cero la ecuación que se obtiene se llama ecuación completa.

$$ax^2+bx+c=0$$

b. **Ecuaciones incompletas:** Si b o c son igual a cero, las ecuaciones de segundo grado que se obtienen se llaman ecuaciones incompletas**.**

$$ax^2+c=0 \qquad ax^2+bx=0 \qquad ax^2=0$$

Métodos de resolución de ecuaciones de segundo grado

3. **Ecuaciones cuadráticas puras**

Ejemplos: Despejamos x en las ecuaciones de segundo grado.

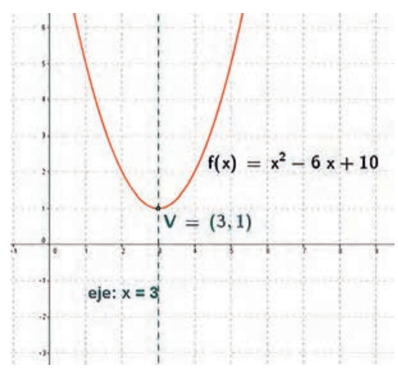
$a)\ x^2-4=0\rightarrow x^2=4\rightarrow x=\pm 2,$ *las raices son* $x_1=+2; x_2=-2$

$b)\ 2x^2-21=0,\rightarrow x^2=\frac{21}{2},$ *las raices son* $x=\pm\sqrt{\frac{21}{2}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{41}$

4. **Mediante descomposición de factores:**

Ejemplos: despejamos x en las ecuaciones de segundo grado.

$a)\ 7x^2-5x=0;$ factorizamos $x(7x-5)=0.$



Igualamos los factores a $0\rightarrow x=0\ o\ 7x-5=0$

luego la racices son $x_1=0\ y\ x_2=\frac{5}{7}$

$b)\ x^2-4x+4=0;$ factorizamos $(x-2)(x-2)=0; x-2=0$ y la raíz es $x=2$

5. **Formando un trinomio cuadrado perfecto**

Ejemplo 1. Hallamos las raíces de $x^2-6x-2=0$

Escribimos en un miembro los términos con la incógnita y se pasa el término independiente al otro miembro.

$$x^2-6x=-2;\ \textit{sumamos 9 a ambos miembros}\ x^2-6x+9=2+9\rightarrow(x-3)^2=11$$

De donde $x-3=\pm\sqrt{11}$, *las raices son* $x=3\pm\sqrt{11}$

6. **Aplicando la formula general (formula cuadrática);** las soluciones de la ecuación de segundo grado $ax^2+bx+c=0$, viene dada por.

$\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ en la que b^2-4ac recibe el nombre de discriminante de la ecuación cuadrática.

Ejemplo 1. Resolvemos $3x^2-5x+1=.$ *Donde* $a=3, b=-5,\ c=1.$ $\quad x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(3)(1)}}{2(3)}=\frac{5\pm\sqrt{13}}{6}$

6. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Problema 1. Halla dos números cuya diferencia sea 5 y la suma de sus cuadrados sea 73.

Datos:

Primer número: x
Segundo número: x-5

Planteamiento:

“la suma de sus cuadrados sea 73”

$$x^2+(x-5)^2=73\rightarrow 2x^2-10x-48=73\rightarrow x^2-5x-24=0$$

$$x=\frac{-(-5)\pm\sqrt{(-5)^2-4(1)(-24)}}{2(1)}=\frac{5\pm 11}{2}\rightarrow x_1=8;\ x_2=-3$$

El primer número es 8 y el segundo es 3.

Problema 2. Calcula el radio de jardín circular sabiendo que, si aumentamos el radio en 6 m, el área se hace nueve veces más grande.

Datos:

“Si aumentamos el radio en 6 cm se hace nueve veces más grande el área”

$$9(\pi R^2)=\pi(R+6)^2$$

Planteamiento:

$$9(\pi R^2)=\pi(R+6)^2$$

$$9R^2-R^2=36+12R\rightarrow 8R^2=36+12R\rightarrow 8R^2-12R-36=0$$

$$x=\frac{-(-12)\pm\sqrt{(-12)^2-4(8)(-36)}}{2(8)}=\frac{12\pm 36}{16}\rightarrow x_1=3;\ x_2=-\frac{3}{2}$$

El radio del círculo es 3 m.

Actividad 62. Resolvemos los siguientes problemas en nuestros cuadernos:

1. Hallamos la altura de un triángulo equilátero de lado 10 dm.
2. Un rectángulo tiene de diagonal 25 cm y de altura 15 cm. Averiguamos la base y el área.
3. Un triángulo isósceles tiene de base 8 cm y de altura 12 cm. Averiguamos el perímetro.
4. Un rombo tiene de diagonal 16 y 12 dm respectivamente. Averiguamos el lado, el perímetro y el área.
5. La suma de los cuadrados de dos números naturales consecutivos es 181. Hallamos dichos números.
6. De un tablero de $1200\,cm^2$ se cortan dos piezas cuadradas, una de ellas con 5 cm más de lado que la otra. Si las tiras de madera que sobran miden $83\,cm^2$, ¿cuánto miden los lados de las piezas cuadradas cortadas?

Actividad 61. En nuestros cuadernos resolvemos las siguientes ecuaciones cuadráticas.

Factorizando

1) $x^2+5x+4=0$
2) $x^2+11x+30=0$
3) $a^2-30=13a$
4) $3a^2=a+2$
5) $10a^2-13a-3=0$
6) $-32ax-15a^2=-7x^2$
7) $4x^2+5ax=-a^2$

Por formula

1) $x^2+2x+5=0$
2) $x^2-4x+5=0$
3) $\frac{1}{3}a^2+\frac{5}{6}a=0$
4) $36a^2-24a=-85$
5) $b^2-\frac{1}{3}ab$ =0
6) $x^2-25=0$
7) $ax^2-bx=0$

Actividad 63. Investigamos sobre la representación gráfica de una ecuación de segundo grado.

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 64. Las ecuaciones nos permiten resolver problemas de la vida real traduciéndolos al lenguaje algebraico. A partir del estudio del contenido analizamos reflexivamente para responder las siguientes preguntas:

- ¿Cómo aplicamos las ecuaciones de primer grado en situaciones de tu cotidianidad?
- ¿Cómo podemos aplicar las ecuaciones en proyectos productivos?
- ¿Consideras importante transformar hechos de la vida real al lenguaje algebraico?¿Por qué?

	1	2	3	4	5	6
A	8		2	7		4
B		9		2	6	3
C		7			1	
D	2		6	1		5
E	7	3			8	9
F		5	4		2	7

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

A 2	$2x+3=15$	C 6	$2(x+4)-5(2x+3)=71$
A 5	$x^2+7x-35=x^2$	D 2	$8x+8=7x+16$
B 1	$\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}x=\frac{1}{6}$	D 5	$a^2x+b^2x=3a^2+3b^2$
B 3	$ax-10bx=5a-50b$	E 3	$3(x+6)-2(x+5)=9$
C 1	$4(x+6)-3(x+2)=22$	E 4	$ax+3b=4a+3b$
C 3	$(x+3)^2+5x=x^2+42$	F 1	$x+9=18$
C 4	$2x+3=x+12$	F 4	$\frac{6}{x}+\frac{6}{x}=2$

Actividad 65. Construimos un juego matemático con materiales del contexto, para llenar el sudoku con los resultados de las ecuaciones planteadas:

- Llenar un sudoku consiste en llenar las casillas con los números del 1 al 9 sin repetir ningún número en las columnas, filas y cuadrados.
- Con ayuda de nuestros maestros diseñamos juegos de mesa como parte de nuestro proceso educativo. Posteriormente podemos realizar una exposición de los mismos.

LABORATORIO MATEMÁTICO

¡INICIAMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Ciencia divertida

Partimos del análisis del siguiente video.

Escanea el QR

Actividad 66. Observamos el siguiente video y realizamos un análisis para dar respuesta a las siguientes preguntas:

- ¿Qué es el GeoGebra?
- ¿Qué acciones podemos realizar con esta herramienta?
- ¿Esta herramienta nos permite comprender de mejor manera los gráficos matemáticos? ¿Por qué?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Escanea el QR

Ingresa al codigo QR, para conocer las nociones básicas de ajedrez.

1. GeoGebra:

Es un programa de software gratuito que permite a los estudiantes crear construcciones matemáticas y modelos donde pueden arrastrar objetos y ajustar parámetros, para explorar álgebra y geometría simultáneamente (junto con otros campos matemáticos). Está basado en un navegador y también tiene subprogramas descargables para computadoras y dispositivos móviles. Podemos descargar esta aplicación de manera gratuita del la pagina https://www.geogebra.org/ o del Play Store de tu celular.

2. Gráficas de ecuaciones

Para graficar ecuaciones en el software GeoGebra, debemos igualar la ecuación a $f(x)$ o y, siendo x la variable en estudio de la ecuación de grado n.

A través del QR podrás descargar el manual de aplicación de esta herramienta. Leemos el capítulo 4 y 5 para graficar y animar respectivamente las siguientes ecuaciones.

$$f(x)=\frac{2}{3}x-\frac{3}{4}; \quad y=-3; \quad x=5; \quad y=x^2-4; \quad g(x)=-x^2+2x-3$$

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades.

3. Taller de pensamiento lógico

Escanea el QR

Ingresa al código QR, para resolver problemas de razonamiento, mate en dos y mate en tres movimientos, a través de la plataforma virtual Lichess.

¡REALIZAMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 67. ¿Cómo aplicamos GeoGebra en la resolución de problemas del contexto? ¿Por qué crees que es importante el desarrollo del pensamiento lógico matemático a través de juegos?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 68. Realizamos videotutoriales del manejo de GeoGebra y construimos piezas de ajedrez con materiales del contexto.

4 SECUNDARIA

ÁREA MATEMÁTICA

CIENCIA, TECNOLOGIA Y PRODUCCIÓN
Matemática

ECUACIONES ALGEBRAICAS APLICADAS A LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y DESARROLLO DE LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 1: Analicemos la pregunta de la siguiente imagen y subrayemos la respuesta correcta en el cuaderno de prácticas:

a) El Algodón
b) El Hierro
c) Ninguno

Justifique su respuesta.

Como podemos observar el concepto de igualdad, se utiliza incluso en asuntos tan simples como el que acabamos de analizar, los cuales aplicamos constantemente en muchas más situaciones de las que creemos.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Ecuaciones lineales

Una ecuación es una igualdad, donde los valores del lado izquierdo (primer miembro), del signo igual, deben ser iguales a los valores del lado derecho (segundo miembro).

Resolver una ecuación es determinar el valor de la incógnita (o incógnitas), que verifique la igualdad de la ecuación. Para realizar dicho cálculo se utilizan las reglas del despeje ya estudiadas, para luego observar y estudiar la aplicación en la resolución de ecuaciones.

Reglas del despeje de variables

Primero se separan variables de cantidades, para eso aplicamos:

- Lo que suma, pasa a restar
- Lo que resta, pasa a sumar

A continuación se separa la variable, para eso aplicamos:

- Lo que multiplica, pasa a dividir
- Lo que divide, pasa a mutiplicar.

Ejemplo 1: Resolvemos la ecuación: $3x + 7 = 22 - 9x$

Separamos expresiones: $3x + 9x = 22 - 7$

Reducimos términos: $12x = 15$

Despejamos la incógnita: $x = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$

Ejemplo 2: Resolvemos la ecuación: $\frac{7}{2x} - \frac{3}{5} = 2 + \frac{1}{3x}$

Multiplicamos $C.D. = 30x$ *:* $105 - 18x = 60x + 10$

Separamos expresiones: $-18x - 60x = 10 - 105$

Reducimos términos: $-78x = -95$

Multiplicamos por (-1): $78x = 95$

Despejamos la incógnita: $x = \frac{95}{78}$

Ejemplo 3: Resolvemos la ecuación:	$\frac{4}{x^2-4}-\frac{3}{3x^2-7x+2}=\frac{7}{3x^2+5x-2}$
Factorizamos los denominadores:	$\frac{4}{(x+2)(x-2)}-\frac{3}{(x-2)(3x-1)}=\frac{7}{(x+2)(3x-1)}$
Multiplicamos $C.D.=(x+2)(x-2)(3x-1)$:	$4(3x-1)-3(x+2)=7(x-2)$
Multiplicamos los productos:	$12x-4-3x-6=7x-14$
Separamos y Reducimos términos semejantes:	$2x=-4$
Despejamos la incógnita:	$x=-\frac{4}{2}=-2$

Actividad 2: En el cuaderno de prácticas, resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5x-17=7$

b) $8x+25-2x=25-9x+45$

c) $7x-(x+2)+(-x+6)=82x+34$

d) $(x+4)(x-4)=(x-1)^2$

e) $(3x)(x-7)=(2x+3)^2-x^2$

f) $\frac{3x-8}{6}-\frac{5x+3}{3}=\frac{10}{4}$

g) $\frac{5x+1}{5x-1}=\frac{6}{4}$

h) $\frac{4x-5}{x^2-4x-12}=\frac{3}{x+2}-\frac{2}{x-6}$

2. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las ecuaciones son una herramienta matemática, que nos permiten dar soluciones a problemas que se puedan presentar en nuestro diario vivir. Veamos algunas situaciones donde pueden aplicarse estos conocimientos.

Ejemplo 4: Don Carlos, que es dueño de una tienda, hace el contrato con la empresa de refrescos “Bolivia Refrescante”, donde establecen que se pagará Bs 0.50 por cada botella vendida durante el mes. La primera semana se vende 5 cajas y 24 botellas, la segunda semana se vende 8 cajas y 12 botellas, la tercera semana se vende 2 cajas y 35 botellas, la cuarta semana se vende 7 cajas y 27 botellas; Don Carlos por motivos familiares viaja a una comunidad lejana, dejando encargo a su hijo el negocio, casualmente en esos días viene la empresa a realizar cuentas, el cual establece que se vendieron 24 cajas de refresco y como cada caja tiene 48 unidades, el monto a cancelar es de Bs 576 (el hijo de don Carlos duda que ese sea el monto ganado) ¿Será justa la duda del hijo de Don Carlos?

Planteamiento	Ecuación y Desarrollo	Respuesta
1°: 5c + 24 2°: 8c + 12 3°: 2c + 35 4°: 7c + 27	5c + 24 + 8c + 12 + 2c + 35 + 7c + 27 = 24c 5c + 8c + 2c + 7c - 24c = - 24 - 12 - 35 - 27- 2c = - 98 c = 49	La caja no contiene 48 botellas, sino 49. Por lo tanto, se debe recibir 0.5*49*24=588 Bs.

Ejemplo 5: La mamá de Carlitos va de compras al mercado y le encarga a su hijo vender una caja de piñas, a Bs 5 la unidad , el niño por flojera decide anotar de forma general las ventas, primero vendió la mitad de la caja, pero encontró 5 malogradas que tuvo que botar, luego vendió 2/3 de lo que quedó. Cuando llega su mamá solo quedaron 7 piñas y su hijo le entrego Bs 50 pero la madre duda que ese sea el monto ganado ¿Será justificada la desconfianza de la mamá?

Planteamiento	Ecuación y Desarrollo	Respuesta
Total: x 1°: $\frac{x}{2}$ 2°: $\left(\frac{x}{2}-5\right)$ 4° : $\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-5\right)$	$x-\frac{x}{2}-\frac{2}{3}\left(\frac{x}{2}-5\right)=7$ $x-\frac{x}{2}-\frac{x}{3}+\frac{10}{3}=7$ $\frac{x}{6}=\frac{11}{3}$ $x=22$	La caja tenía 22 piñas, como se botó 5 y quedaron 7, entonces se vendieron 10, entonces el monto ganado es Bs. 50

Actividad 3: Utilizando el modelo de resolución que estudiamos, resolvamos los siguientes problemas, donde podemos observar la aplicación de ecuaciones.

1. Carolina vende dulces y cada día gana Bs 1 más que el día anterior, si en tres días tiene una ganancia de Bs 219. ¿Cuánto ha ganado cada día?

2. Carmen tiene Bs 16 y sus dos hermanos pequeños tienen Bs 2 y 3., los cuales deciden ahorrar para comprar un regalo a su mamá, si cada día que pasa, a cada uno le regalan Bs 1. ¿Cuántos días han de pasar para que el doble de la suma de los ahorros de los hermanos de Carmen sea la misma que la que tiene ella?

3. Vicente gasta Bs 21 en un cuaderno y una caja de lápices. No sabe el precio de cada objeto, pero sí sabe que la caja de lápices vale dos quintas partes de lo que vale el cuaderno .¿Cuánto vale el cuaderno?

4. Don Cornelio tiene tres corrales y 56 ovejas. Los tamaños de los corrales son pequeño, mediano y grande, siendo el pequeño la mitad del mediano y la grande el doble. Como no tenemos ninguna preferencia en cuanto al reparto de las ovejas, decidimos que en cada uno de los corrales haya una cantidad de ovejas proporcional al tamaño de cada corral. ¿Cuántas ovejas pondremos en cada corral?

5.Queremos repartir 510 caramelos entre 3 niños, de tal forma que dos de ellos tengan la mitad de los caramelos pero, que uno de estos dos tenga la mitad de caramelos que el otro. ¿Cuántos caramelos tendrá cada niño?

6. Una tienda vende en dos días la tercera parte de sus productos. Al día siguiente recibe del almacén la mitad de la cantidad de los productos vendidos, que son 15 unidades. ¿Cuántas unidades vendió en los dos primeros días? ¿Cuántas unidades quedan en la tienda después de abastecerla?

7. Juan tiene Bs 400 y Rosa tiene 350, ambos se compran el mismo libro, después de la compra a Rosa le quedan cinco sextas partes del dinero que le queda a Juan. Calcular el precio del libro.

8. Ester tiene el triple de dinero que Ana y la mitad que Héctor. Héctor le da a Ana y a Ester Bs 25 a cada una. Ahora Ester tiene la misma cantidad que Héctor. ¿Cuánto dinero tenía cada uno al principio?

9. La distancia entre las ciudades de Santa Cruz y Montero es de 50 km. A la misma hora, salen un camión de la ciudad Santa Cruz, a 60 km/h y un ciclista de la ciudad Montero a 25 km/h. Se desea calcular cuánto tardarán en encontrarse si ambos vehículos circulan por la misma carretera, pero en sentido opuesto.

10. En una casa, el depósito de agua se encuentra a 2/7 de su capacidad. Se duchan tres personas: el primero en ducharse consume una quinta parte de la cantidad que hay en el depósito; el segundo, una tercera parte de la cantidad que queda, y el tercero, tres cuartas partes de la cantidad del primero. ¿Cuál es la capacidad del depósito y la cantidad de agua que consumen los dos primeros si sabemos que el tercero consume 10 litros al ducharse?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 4: En grupos de dos o tres estudiantes, expresamos las dudas, curiosidades, inquietudes que hubo en el desarrollo del tema y lo socializamos al curso, fomentando la confianza y el respeto entre todos para fortalecer la autoestima.

1. Expresamos los conocimientos y las estrategias utilizadas en la resolución de los problemas del contexto, observando así el apoyo y comprensión de los contenidos.
2. Escribe 5 ejemplos de la aplicacion de acuaciones .

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

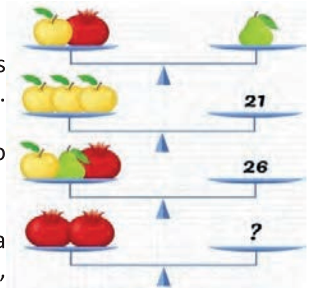
Actividad 5:
1. Contruimos un tablero de ecuaciones como el de la imagen.

2. Planteamos el siguiente problema, el cual daremos solución aplicando nuestros conocimientos y el tablero de ecuaciónes.

"Don Jorge adquiere un paquete de tela y encarga a su hijo que lo venda, quien realiza la actividad de mala gana y solo registra las ventas generales de la siguiente manera: en su primera venta, vendió un tercio del paquete, luego la mitad de lo que quedo, luego la quinta parte de lo que sobro, sobrándole dos metros al final del día. ¿Qué hará el hijo de don Jorge para saber cuántos metros tenía en total el paquete de tela?"

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES EN LA ACTIVIDAD PRODUCTIVA DE LA REGIÓN

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!



Actividad 6: Analicemos y expliquemos cómo determinamos el valor que tienen las dos granadas (frutas)de la imagen, suponiendo que los números estan expresados en bolivianos.

Muy bien, las dos granadas que se muestran en la última balanza valen Bs 12., porque como pudimos determinar, cada granada vale Bs 6, interesante ejercicio verdad!!!

Analicemos la imagen anterior, en la primera balanza observamos que una pera equivale a una granada y una naranja, esto en términos matemáticos, es lo que llamamos una ecuación, pero también te habrás dado cuenta de que cada una de las balanzas está relacionada con la otra, y solo jugando con todas es que podemos darle una solución al ejercicio. Esto es conocido como Sistema de Ecuaciones.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Sistemas de ecuaciones de primer grado con dos incógnitas

Un sistema de ecuaciones, es un conjunto de dos o más ecuaciones con dos o más incógnitas, en los cuales se debe determinar el valor de las incognitas, de tal forma que la igualdad se verifique. Tomando en cuenta la imagen anterior, escribiremos un sistema de ecuaciones, donde lo que haremos es cambiar la imagen por una letra (naranja: n, granada: g, pera: p), los cuales se llamaran incógnitas.

$$\begin{cases} n+g=p \\ 3n=21 \\ n+g+p=26 \\ 2g=?? \end{cases}$$

El ejercicio escrito de esta forma se llama sistema de ecuaciones de 3x3, más una relación. Haciendo algunos juegos matemáticos, logramos determinar que: n=7; p=13;g=6, este procedimiento se conoce como resolución de sistemas de ecuaciones.

Ahora, un sistema de ecuaciones con dos incógnitas puede tener las siguientes formas:

$$2x-3y=15$$

Sistema 1x2

$$\begin{cases} -3x-7y=2 \\ 4x-5y=8 \end{cases}$$

Sistema 2x2

$$\begin{cases} 2x+5y=-3 \\ 2x-3y=-1 \\ x+7y=2 \end{cases}$$

Sistema 3x2

Los sistemas de ecuaciones tienen como solución un par de valores, es decir, una solución debe tener dos valores (de x e y en este caso). Ahora según sus características, la de 1x1 tiene infinitas soluciones, la de 2x2 tiene una solución, la de 3x2 puede tener 1 o 3 soluciones.

2. Métodos de Resolución

Para resolver un sistema de ecuaciones tenemos varias alternativas, que nosotros los llamaremos métodos de resolución, de estos estudiaremos cinco casos que los dividiremos en dos grupos.

1. Métodos analíticos, donde se aplican propiedades algebraicas y sus resultados son exactos
2. Método gráfico, donde se grafican las ecuaciones y sus resultados son aproximados.

El siguiente cuadro nos resume los métodos que se aplicaran para resolver sistemas de ecuaciones.

2.1. Método de Sustitución:

El método consiste en despejar una de las incógnitas o variables de una ecuación y reemplazarlo en la otra ecuación. Se sugiere despejar una incógnita de manera directa

Ejemplo 1: Resolvemos el Sistema de ecuaciones x - 3y = - 1 ; 2x + 3y = 7

$$\begin{cases} x - 3y = -1 \\ 2x + 3y = 7 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Identificamos ecuaciones.

$$\begin{cases} x - 3y = -1 & (\mathbf{A}) \\ 2x + 3y = 7 & (\mathbf{B}) \end{cases}$$

Despejamos "x" de la ecuación $(\mathbf{A})$

$$x - 3y = -1$$

$$x = 3y - 1 \quad (\mathbf{C})$$

Sustituimos el valor de "x" en la ecuación $(\mathbf{B})$

$$2x + 3y = 7$$

$$2(3y - 1) + 3y = 7$$

Resolvemos la ecuación obtenida

$$6y - 2 + 3y = 7$$

$$6y + 3y = 7 + 2$$

$$9y = 9$$

$$y = \frac{9}{9}$$

$$y = 1$$

Sustituyo $y = 1$ en la ecuación (C)

$$x = 3y - 1$$

$$x = 3(1) - 1$$

$$x = 3 - 1$$

$$x = 2$$

Sol. (2;1)

Procedimiento

- Simplificamos el sistema a su más simple expresión y escogemos la incógnita a despejar.
- Despejamos la incógnita escogida (no olvidar la sugerencia), y reemplazamos la equivalencia en la otra ecuación.
- Resolvemos la ecuación obtenida y el resultado lo reemplazamos en una ecuación con dos incógnitas (mejor en la que despejamos anteriormente).
- Determinados los valores, verificamos la equivalencia.

En este caso despejamos "x", pero también podemos despejar "y", realizando el mismo procedimiento.

Actividad 7: En el cuaderno de prácticas resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

1. $-x - 2y = -5$ $-2x + 5y = 8$	2. $-5x + 3y = 20$ $-5x - y = 0$	3. $x - 2y = -1$ $-5x + 4y = 11$	4. $-4x - 3y = -16$ $-x - 2y = -4$	5. $-2x - y = -2$ $-4x + 3y = -14$

2.2. Método de resolución por Igualación

Este método consiste en despejar la misma incógnita de las ecuaciones, para luego igualar sus equivalencias, obteniendo así una nueva ecuación la cual nos permitirá encontrar uno de los valores del sistema.

Se sugiere utilizar este método, cuando el despeje se realize con fracciones o cuando existan cantidades idénticas.

Ejemplo 2: Resolvemos el sistema de ecuaciones 2x - 3y = 5 ; 3x + 4y = - 1

Procedimiento

- Simplificamos el sistema a su más simple expresión y escogemos las incógnitas a despejar.
- Despejamos las incógnitas escogidas e igualamos las equivalencias (no olvidar la sugerencia).
- Resolvemos la ecuación obtenida y el resultado lo reemplazamos en una ecuación con dos incógnitas (mejor en las que despejamos anteriormente).
- Determinados los valores, verificamos la equivalencia.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 \\ 3x + 4y = -1 \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Identificamos ecuaciones.

$$\begin{cases} 2x - 3y = 5 & (\mathbf{A}) \\ 3x + 4y = -1 & (\mathbf{B}) \end{cases}$$

Despejamos "x" de la Ec. $(\mathbf{A})$

$$2x - 3y = 5$$

$$2x = 3y + 5$$

$$x = \frac{3y+5}{2} \quad (\mathbf{C})$$

Despejamos "x" de la Ec. $(\mathbf{B})$

$$3x + 4y = -1$$

$$3x = -4y - 1$$

$$x = \frac{-4y-1}{3} \quad (\mathbf{D})$$

Igualamos X = x de la Ec. $(\mathbf{C})$ y $(\mathbf{D})$

$$\frac{3y+5}{2} = \frac{-4y-1}{3}$$

Resolvemos la ecuación formada

$$3(3y + 5) = 2(-4y - 1)$$

$$9y + 15 = -8y - 2$$

$$9y + 8y = -15 - 2$$

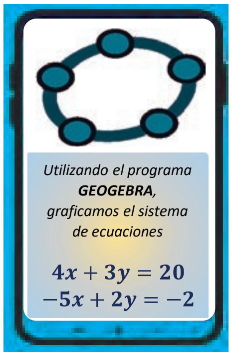
$$17y = -17$$

$$y = -\frac{17}{17} = -1$$

Sustituyo $y = -1$ en la Ec. (C)

$$x = \frac{3(-1)+5}{2}$$

$$x = \frac{-3+5}{2} = \frac{2}{2} = 1$$



Actividad 8: En tu cuaderno de práctica resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

1. $-2x-3y=-7$ $-3x-2y=-8$	*2.* $-4x+3y=8$ $-3x+4y=6$	*3.* $2x+3y=5$ $4x+3y=1$	*4.* $-5x+9y=-7$ $-2x+y=5$	*5.* $-x-2y=-5$ $-2x+5y=8$

2.3. Método de Reducción

Conocido también como el método de sumas y restas, consiste en sumar (o restar) miembro a miembro los términos de las ecuaciones, de tal forma que se pueda eliminar una incógnita, para luego resolver la ecuación resultante para luego reemplazar y determinar la solución.

Ejemplo 3: Resolvemos el sistema de ecuaciones 4x + 3y = 20 ; -5x+2y=-2

$$\begin{cases} \mathbf{4x+3y=20} \\ \mathbf{-5x+2y=-2} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:
Eliminaremos "x" multiplicando para igualas sus coeficientes con signos diferentes.

$$\begin{cases} \mathbf{4x+3y=20} & (5) \\ \mathbf{-5x+2y=-2} & (4) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mathbf{20x+15y=100} \\ \mathbf{-20x+8y=-8} \end{cases}$$

SUMAMOS POR COLUMNAS

$$\begin{cases} \mathbf{\cancel{20x}+15y=100} \\ \mathbf{\cancel{-20x}+8y=-8} \end{cases}$$

$$\mathbf{0\ \ +23y=92}$$

Despejamos y del resultado.

$$\mathbf{23y=92}$$

$$\boldsymbol{y=\frac{92}{23}=4}$$

Sustituimos $\boldsymbol{y=4}$ en la 1ra ecuación

$$\mathbf{4x+3(4)=20}$$

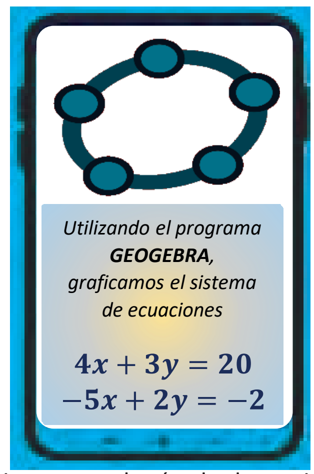
$$\mathbf{4x+12=20}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{20-12}{4}}$$

$$\boldsymbol{x=\frac{8}{4}=2}$$

Sol. (4;2)

Procedimiento
- Simplificamos el sistema a su simple expresión y ordenamos en columnas de "x", "y" y término independiente.
- Multiplicamos por un valor que permita la eliminación de una incógnita y posterior despeje de la otra.
- Sumamos miembro a miembro y despejamos la incógnita.
- Reemplazamos el valor en una ecuación con dos incógnitas y determinamos el segundo valor.



Actividad 9: En tu cuaderno de práctica resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución:

1. $-3x+4y=13$ $5x+4y=-11$	2. $7x-3y=19$ $4x-5y=1$	3. $4x-3y=8$ $-5x-6y=-10$	4. $-7x-4y=8$ $-5x+3y=-6$	5. $-5x-2y=-21$ $-3x-8y=1$

2.4. Método de Determinantes

Conocido también como el método de Krammer, es un método que resuelve sistemas de ecuaciones mediante el cálculo de determinantes de una matriz. Pero antes de ingresar a resolver el método debemos definir lo que es una matriz y un determinante.

Matriz, es un conjunto de números ordenados en filas y columnas.

Determinante, es un número que proviene de la diferencia del producto de las diagonales de la matriz.

Ejemplo 4: calculamos el determinante de las siguientes matrices:

1. $A=\begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$ → $Det(A)=(4)(-3)-(2)(1)=-12-2=-14$

2. $M=\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$ → $Det(M)=(-7)(-1)-(5)(-2)=7+10=17$

3. $W=\begin{bmatrix} -4 & 13 \\ -3 & 11 \end{bmatrix}$ → $Det(W)=(-4)(11)-(-3)(13)=-44+39=-5$

2.5. Método Gráfico

Es un método que nos permite conocer la forma que tendrá el gráfico de la ecuación en un plano coordenado.

Plano Coordenado.- Es el lugar geométrico de dos dimensiones que están divididos en cuatro espacios, por dos líneas rectas perpendiculares (llamados ejes coordenados "x" e "y"), sobre los cuales se van ubicando los valores de los puntos (o soluciones de un sistema) A(3,2); B(-1,0); C(-2,-2); D(0,-3) los cuales se observan en el plano cartesiano.
Propiedad de la Línea Recta: "Dos puntos distintos determinan una línea recta"

Tomando en cuenta la propiedad anterior, para graficar y resolver sistemas de ecuaciones de 2x2, por el método gráfico utilizaremos la intersección con los ejes coordenados.

Procedimiento

- Consideramos valores de: x = 0 y y = 0
- Reemplazamos dichos valores en la ecuación y los despejamos la incognita.
- Los valores obtenidos los representamos en el plano coordenado y los unimos con una línea recta

Sea la ecuación: $\boldsymbol{ax+by=c}$

Con $x=0$ à $a(0)+by=c$ ∴ $y=\frac{c}{b}$

Con $y=0$ à $ax+b(0)=c$ ∴ $x=\frac{c}{a}$

Ahora obtenemos los puntos que graficaremos

$$P_1\left(0;\frac{c}{b}\right) \quad y \quad P_2\left(\frac{c}{a},0\right)$$

Ejemplo 5: Graficamos la recta 3x - 5y = - 15

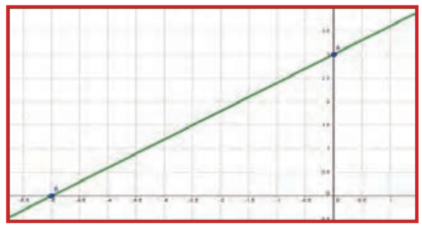
Sea la ecuación: $3x-5y=-15$

Con $x=0$ à $3(0)-5y=-15$ ∴ $y=\frac{15}{5}=3$

Con $y=0$ à $3x-5(0)=-15$ ∴ $x=-\frac{15}{3}=-5$

Ahora obtenemos los puntos que graficaremos

$$P_1(0;3) \quad y \quad P_2(-5,0)$$



Procedimiento.

Actividad 10: En tu cuaderno de práctica graficamos las siguientes ecuaciones:

1. $-x+2y=3$ $-3x-2y=-15$	2. $-x-3y=-5$ $-x-y=-1$	3. $2x-y=2$ $2x+3y=-6$	4. $x+6y=-3$ $x+y=2$	*5.* $-4x+5y=8$ $-2x-y=-10$

Nota.- Para resolver un sistema de ecuaciones, aplicamos el procedimiento de graficación.
Ejemplo 6: Resolvemos el Sistema de ecuaciones 3x + 2y = 6 ; 5x - 3y = 15

Sea la ecuación: $3x+2y=6$

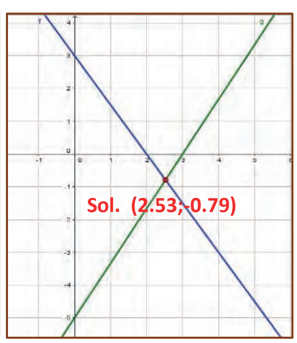
Con $x=0$ à $3(0)+2y=6$ ∴ $y=\frac{6}{2}=3$

Con $y=0$ à $3x+2(0)=6$ ∴ $x=\frac{6}{3}=2$

Sea la ecuación: $5x-3y=15$

Con $x=0$ à $5(0)-3y=15$ ∴ $y=-\frac{15}{3}=-5$

Con $y=0$ à $5x-3(0)=15$ ∴ $x=\frac{15}{5}=3$



Actividad 11: En el cuaderno de práctica resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones:

1. $-x+2y=3$; $-3x-2y=-15$
2. $-x-3y=-5$; $-x-y=-1$
3. $2x-y=2$; $2x+3y=-6$

4. $x+6y=-3$; $x+y=2$
5. $2x-5y=4$; $2x-y=-4$
6. $-4x+5y=8$; $-2x-y=-10$

Para resolver un sistema de ecuaciones es necesario tomar en cuenta la siguiente fórmula, la que depende de la determinación de las matrices del numerador y del denominador para ambas incógnitas, que es la que nos permitirá resolver sistemas de ecuaciones por determinantes.

Sea el sistema: $\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$ la solución del sistema $x = \dfrac{\begin{vmatrix} c & b \\ f & e \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$ $\quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & c \\ d & f \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b \\ d & e \end{vmatrix}}$

Ejemplo 7: Resolvemos el Sistema de ecuaciones 3x + 5y = 1; 4x + 7y = 1

Noticiencia

El método de reducción es la base para la resolución de sistemas por el método de Gauss-Jordan, mismo que es usado en programas de computadora.

ORDENAMOS

3x + 5y = 14x + 7y = 1

RESOLVEMOS:

Determinamos los coeficientes.
a= 3 d= 4
b= 5 e= 7
c= 1 f= 1

Hallamos el valor de "***x***"

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 7 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(1)(7)-(1)(5)}{(3)(7)-(4)(5)} = \frac{7-5}{21-20} = \frac{2}{1} = 2$$

Hallamos el valor de "***y***"

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 7 \end{vmatrix}} = \frac{(3)(1)-(4)(1)}{(3)(7)-(4)(5)} = \frac{3-4}{21-20} = \frac{-1}{1} = -1$$

ACTIVIDAD 12. En tu cuaderno de práctica resolvemos los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de sustitución.

1. $-3x + 4y = 13 \quad ; \quad 5x + 4y = -11$
2. $7x - 3y = 19 \quad ; \quad 4x - 5y = 1$
3. $4x - 3y = 8 \quad ; \quad -5x - 6y = -10$
4. $-7x - 4y = 8 \quad ; \quad -5x + 3y = -6$
5. $-5x - 2y = -21 \quad ; \quad -3x - 8y = 1$
6. $3x + 4y = 10 \quad ; \quad 4x - 3y = -20$

3. Sistemas de ecuaciones de primer grado con tres incógnitas

Un sistema de ecuaciones con tres incógnitas, no es más que un conjunto de ecuaciones con tres incógnitas. De este tipo de sistemas, estudiaremos aquellas que tienen la forma 3x3, aunque también es aplicable para ecuaciones de nxn.

4. Métodos de Resolución

Para resolver sistemas de ecuaciones, podemos utilizar los 5 métodos estudiados en la resolución de sistemas de 2x2, pero por la eficiencia y eficacia solo nos enfocaremos en dos: El Método de Reducción y el Método de Determinantes.

4.1. Método de Reducción

Como sabemos este método nos permite eliminar una incógnita permitiéndonos encontrar una nueva ecuación, por lo tanto, en un sistema de 3 x 3 eliminaremos una incógnita para convertirla en una de 2x2, para luego esta resolverla por el método que dominemos más.

Procedimiento

- Simplificamos el sistema a su más simple expresión y ordenamos en columnas de "x", "y", "z" , término independiente y determinamos la incógnita a eliminar.
- Escogemos dos combinaciones de las tres posibles, para eliminar la incógnita determinada.
- En cada combinación escogida, multiplicamos las ecuaciones, buscando la forma de eliminar la incógnita, convirtiendo así el sistema a uno de 2 x 2.
- Resolvemos el sistema de 2 x 2 por cualquier método (mejor si es el mismo que el anterior).

Ejemplo 8: Resolvemos el sistema 2x + y - z = 7; 3x - 2y + z = 9 ; x - y + 2z = 0

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 & \mathbf{A} \\ 3x - 2y + z = 9 & \mathbf{B} \\ x - y + 2z = 0 & \mathbf{C} \end{cases}$$

SOLUCIÓN:

Eliminaremos "z" de la combinación **A-B**.

$$\begin{cases} 2x + y \ - \cancel{z} = 7 \\ 3x - 2y \cancel{+ z} = 9 \end{cases}$$

$$5x - y \qquad = 16 \qquad \mathbf{D}$$

Eliminaremos "z" de la combinación **A-C**.

$$\begin{cases} 2x + y - z = 7 \quad (2) \\ x - y + 2z = 0 \end{cases}$$

$$\begin{array}{r} 4x + 2y - \cancel{2z} = 14 \\ x - y \cancel{+ 2z} = 0 \\ \hline \end{array}$$

$$5x + y \qquad = 14 \qquad \mathbf{E}$$

Unimos las ecuaciones.

$$5x - y = 16 \qquad \mathbf{D}$$

$$5x + y = 14 \qquad \mathbf{E}$$

Eliminamos "y" de **D-E**.

$$\begin{array}{r} 5x - \cancel{y} = 16 \\ 5x \cancel{+ y} = 14 \\ \hline \end{array}$$

$$10x \qquad = 30\,; \qquad x = \frac{30}{10} = 3$$

Reemplazamos $x = 3$ en **E**

$$5(3) + y = 14\,; \qquad y = 14 - 15 = -1$$

Reemplazamos $x = 3$; $y = -1$ en **B**

$$3(3) - 2(-1) + z = 9\,; z = 9 - 9 - 2 = -2$$

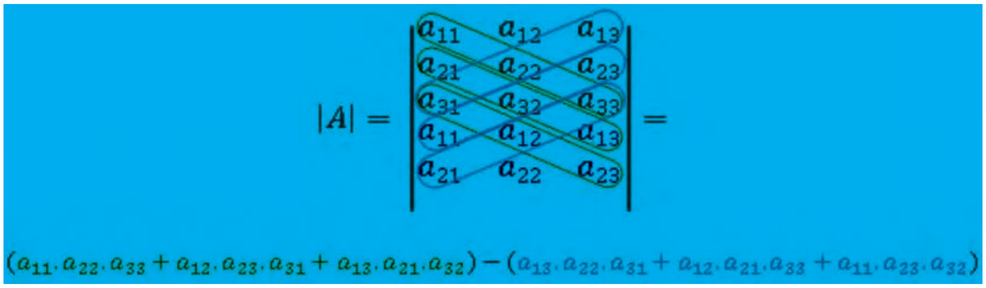
Sol. (3;-1;-2)

Actividad 13: En el cuaderno de práctica resolvemos los siguientes sistemas por el método de reducción:

1. $x + 2y - z = -7$; $3x + y - 5z = -10$; $-2x + 3y - 2z = -11$
2. $2x + 3y - 4z = 23$; $-3x - y + 2z = -18$; $5x + 2y - z = 18$
3. $5x + 2y - 3z = -1$; $3x - 4y - z = -37$; $-2x + 3y + 5z = 27$
4. $3x - y - 2z = -14$; $-5x + 3y + 2z = 22$; $7x - y + 3z = 2$

4.2. Método de Determinantes

Al igual que en los sistemas de 2x2, el método determinantes responde a una fórmula, los cuales dependen de calcular el determinante de una matriz de 3x3. Veamos como calcularlos:



Ejemplo 9: Calculamos la determinante de la matriz C

$$C = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{det(C)} \\ &= (0)(7)(2) + (-3)(-4)(0) + (3)(5)(-1) \\ &- [(3)(7)(0) + (-4)(-1)(0) + (2)(-3)(5)] \\ &= 0 + 0 - 15 - (0 + 0 - 30) = -15 + 30 = 15 \end{aligned}$$

Actividad 14: En el cuaderno de práctica calculamos la determinante de las matrices:

$$A = \begin{vmatrix} 0 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & -4 & 2 \end{vmatrix} \ ; \ B = \begin{vmatrix} 8 & 5 & 0 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \ ; \ C = \begin{vmatrix} 0 & 5 & -8 \\ -3 & 7 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{vmatrix} \ ; \ D = \begin{vmatrix} 6 & 5 & 9 \\ -3 & -1 & -1 \\ 0 & -4 & 0 \end{vmatrix}$$

Para resolver un sistema de ecuaciones de 3x3 aplicaremos la siguiente fórmula:

Sea el sistema: $\begin{cases} ax + by + cz = d \\ ex + fy + gz = h \\ ix + jy + kz = l \end{cases}$ $\xrightarrow{\textit{Solución}}$ $x = \dfrac{\begin{vmatrix} d & b & c \\ h & f & g \\ l & j & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}} \quad y = \dfrac{\begin{vmatrix} a & d & c \\ e & h & g \\ i & l & k \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}} \quad z = \dfrac{\begin{vmatrix} a & b & d \\ e & f & h \\ i & j & l \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a & b & c \\ e & f & g \\ i & j & k \end{vmatrix}}$

Las letras de la a,b,...,l son los coeficientes de las incógnitas.

Ejemplo 10: Resolvemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x + 2y - z = -3 \\ x - y + 3z = 8 \\ x + 2y + 3z = 5 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 8 & -1 & 3 \\ 5 & 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{9-16+30-(5-18+48)}{-3-2+6-(1+6+6)} = \frac{23-(35)}{1-(13)} = \frac{-12}{-12} = 1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & -1 \\ 1 & 8 & 3 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{24-5-9-(-8+15-9)}{-3-2+6-(1+6+6)} = \frac{10-(-2)}{1-(13)} = \frac{12}{-12} = -1$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -1 & 8 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-5-6+16-(3+16+10)}{-3-2+6-(1+6+6)} = \frac{5-(29)}{1-(13)} = \frac{-24}{-12} = 2$$

Actividad 15: En el cuaderno de práctica resolvemos los sistemas de ecuaciones por el método de determinantes:

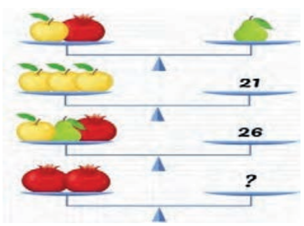
1. $x + 2y - z = -7$; $3x + y - 5z = -10$; $-2x + 3y - 2z = -11$
2. $2x + 3y - 4z = 23$; $-3x - y + 2z = -18$; $5x + 2y - z = 18$
3. $5x + 2y - 3z = -1$; $3x - 4y - z = -37$; $-2x + 3y + 5z = 27$
4. $3x - y - 2z = -14$; $-5x + 3y + 2z = 22$; $7x - y + 3z = 2$

Consideraciones sobre sistemas de ecuaciones superiores a 3x3

Los sistemas de ecuaciones pueden tener más de tres incógnitas, pero la forma de resolverlo es similar al de 3x3, es decir, debemos reducir hasta conseguir una de 2x2, para ello basta con aplicar el método de reducción en las combinaciones que se pueden realizar de las ecuaciones. Además, cuando el sistema de ecuaciones es superior a 3x3, el método de determinantes ya no es aplicable de forma directa.

5. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Los sistemas de ecuaciones son una herramienta muy útil, pues nos simplifican bastante la tarea de dar solución a diferentes problemas, como el ejercicio con las peras, naranjas y granadas que vimos al inicio del tema, el cual se redujo a un sistema de ecuaciones de 3x3. Veamos cómo nos ayuda.



$$\begin{cases} n + g = p \\ 3n = 21 \\ n + g + p = 26 \\ 2g = ??? \end{cases} \qquad \begin{cases} g + n - p = 0 \\ 0g + 3n + 0p = 21 \\ n + g + p = 26 \\ 2g = ??? \end{cases} \qquad \begin{cases} p = 13 \\ n = 7 \\ g = 6 \\ 2g = 12 \end{cases}$$

Diferentes problemas de la cotidianidad se pueden expresar a través de sistema de ecuaciones que podemos resolverlos utilizando el método de reducción, determinantes u otros. En este sentido podemos concluir que los sistemas de ecuaciones se aplican para dar solución a diferentes fenómenos o problemas de diferentes ciencias que se pueden presentar en nuestro cotidiano vivir. Analicemos algunos:

Ejemplo 11: Una empresa de transporte que hace la ruta Tarija-Bermejo, sale todos los días a las 9:00 de la mañana con movilidades que viajan a una velocidad de 1500 m/min. El día lunes llega un cliente a las 9:15 y pide que por favor puedan enviar una encomienda en la movilidad que salió a las 9:00, la secretaria le indica que por realizar dicha petición se le cobrara Bs 5 por cada mil metros que recorrerá el segundo auto si viaja a una velocidad de 2000 m/min, hasta encontrarse con el que salió primero, lo que el cliente acepta. ¿A qué distancia logrará darle alcance el segundo auto? ¿A qué hora se encuentran los autos? ¿Cuánto deberá pagar el cliente? (no se olvide que V*t=d).

Solución: Analizando los datos, vemos que la distancia es la misma para ambas movilidades, el tiempo para el segundo es menos 15 minutos.

1500(t) = d 1er bus
2000(t - 15)= d 2do bus

Utilizando el método de igualación obtenemos:

$t = 60min$; $d = 9000\ metros$; $costo = 5 * 9 = 45$

Respuesta. - Los autos se encontrarán a 9000 metros de la parada, a las 10 de la mañana y el señor debe pagar por este servicio Bs 45.

Ejemplo 12: Doña Carmelita tiene una granja de pollo, así que se dedica a vender carne de pollo en el mercado, un día el técnico encargado del cuidado de pollo le indica que, para cuidar el abastecimiento y las ganancias, la venta de pollo deberá seguir la ecuación - 3Q + 5P = 109, pero el Gobierno Municipal indica que la población solo puede adquirir dicho producto bajo la ecuación 4Q + 3P = 77. ¿Cuál será el nuevo parámetro de la cantidad de carne y precio, para que la vendedora y el comprador estén conformes? (no te olvides que P: precio, Q: cantidad)

Solución: Analizamos los datos, la distancia es la misma, el tiempo para el segundo es menos 15 minutos.

-3Q + 5P = 109	Vendedor
4Q + 3P = 77	Comprador

Utilizando el método de Reducción tenemos:

$$P = 23\ Bs.\quad ;\quad Q = 2\ Kg$$

Respuesta. De tal forma que Doña carmelita cuide sus ganancias y la población quede conforme se establece que 2 kilogramos de carne deben venderse a Bs 23.

Actividad 16: En tu cuaderno de práctica resuelve los sistemas de ecuaciones por el método de determinantes.

1. María cría en el campo patos y conejos, donde contaron 19 cabezas y 52 patas de los dos animales ¿Cuántos conejos y patos cría Maria?.

2. Un equipo de básquet anoto un total de 48 canastas, obteniendo un puntaje de 114 puntos. ¿Cuántos tiros de campo(2 puntos) y triples (3 puntos) realizaron?

3. En un curso de 40 estudiantes, al 20 % de los hombres y 16% de las mujeres les gusta consumir frutas. Si en su total de los estudiantes que les gusta la fruta es 7. ¿Cuántos estudiantes mujeres y varones son en el curso?.

4. Juan pagó Bs 350 por 3 cajas de manzanas y 5 cajas de naranjas. Pedro compró 5 cajas de manzanas y 7 de naranjas y tuvo que pagar Bs 518. ¿Cuál es el precio de cada caja de manzanas y de cada caja de naranjas?

5. Un hombre decide ir de paseo en su bote, es así que remando a favor del rio avanza 10 kilometros en una hora, mientras que si rema en contra del rio, solo avanza 4 kilometros. ¿Qué velocidad estará aplicando el señor al bote y cuál será la velocidad del rio?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 17: En grupos de 3 a 4 estudiantes para realizamos las siguientes actividades:

1. Analicemos y escribimos 5 aspectos negativos y positivos de sistemas de ecuaciones.
2. Analicemos y escribimos las dificultades y fortalezas que se presentaron en el desarrollo del contenido.
3. Escogemos un ejercicio (del internet, de un libro, o inventado) y lo escribimos en una hoja.
4. Describimos 5 ejemplos de la aplicacion del sistema de ecuaciones en el texto.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Utilizando Geogebra, mostramos el comportamiento de las gráficas de las ecuaciones de los ejemplos 10 y ejemplo 11 analizados en texto y explicamos qué hicimos para poder generar dichas gráficas en el programa.
De no contar con geogebra, realizamos las graficas manualmente y describimos el procedimiento realizado.

NÚMEROS IMAGINARIOS Y COMPLEJOS EN LA NATURALEZA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 18: Con la ayuda de una calculadora científica realizamos las siguientes operaciones en el cuaderno de prácticas y escribimos las observaciones:

Sean: el número	5	3	-7	OBSERVACIONES
Elevar al cuadrado el número	25			
Sacar raíz cuadrada de la respuesta anterior	5			
Elevar al cubo el número	125			
Sacar raíz cúbica de la respuesta anterior	5			
Elevar a la cuarta el número	625			
Sacar raíz cuarta de la respuesta anterior	5			
Elevar a la quinta el número	3125			
Sacar raíz quinta de la respuesta anterior	5			

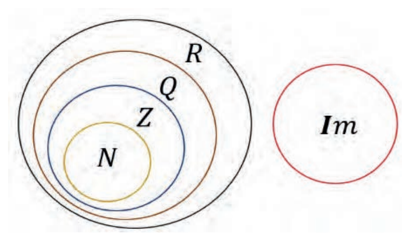
Como habrás podido notar algo interesante sucede cuando trabajamos con las raíces de cantidades negativas, pero no te asustes, tu calculadora no está mal, todo tiene una explicación, la cual estudiaremos a continuación:

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Los conjuntos de números estudiados hasta el momento presentan algunos vacíos, un caso es el que acabamos de observar en el anterior cuadro, con las raíces negativas de indíce par, las cuales muestran un mensaje que dice: MATH ERROR, este mensaje generalmente se presenta debido a que las calculadoras, no están programadas para trabajar o realizar cálculos con **números imaginarios**.

1. El conjunto de los números imaginarios

Los números imaginarios son aquel conjunto de números que nacen de las raíces negativas de indíce par, los cuales están separados del conjunto de los números estudiados hasta este momento y cuyo conjunto podemos denotar como “Im”, el cual vamos a representar en el siguiente gráfico.



2. Unidad imaginaria y sus propiedades

La unidad Imaginaria es el número $\sqrt{-1}$ el cual representaremos por la letra “ i ”, por lo cual podemos decir que: $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$ este es uno de los cinco números de las matemáticas, el cual a partir de este momento aparecerá en muchos de nuestros cálculos, motivo por el que no debemos olvidarlo. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Escribimos las siguientes raíces, como números imaginarios.

1. $\sqrt{-4} = \sqrt{4(-1)} = \sqrt{4}\sqrt{-1} = 2i$
2. $-\sqrt{-49} = -\sqrt{49(-1)} = -\sqrt{49}\sqrt{-1} = -7i$
3. $5\sqrt{-144} = 5\sqrt{144(-1)} = 5\sqrt{144}\sqrt{-1} = 60i$
4. $7\sqrt{-3} = 7\sqrt{3(-1)} = 7\sqrt{3}\sqrt{-1} = 7\sqrt{3}i$
5. $-3\sqrt{-12} = -3\sqrt{12(-1)} = -3\sqrt{12}\sqrt{-1} = -3\sqrt{4}\sqrt{3}i = -12\sqrt{3}i$
6. $11\sqrt{-150} = 11\sqrt{150(-1)} = 11\sqrt{25}\sqrt{6}\sqrt{-1} = 55\sqrt{6}i$
7. $6\sqrt{-\frac{4}{9}} = 6\sqrt{\frac{4}{9}}\sqrt{-1} = 6\left(\frac{2}{3}\right)i = 4i$

Noticiencia

Los números complejos son muy aplicados en el área de electrónica, electricidad y el desarrollo tecnológico

Como podemos notar siempre que exista una cantidad sub radical negativa, es necesario separar el signo el cual se convierte en la unidad imaginaria $\boldsymbol{i} = \sqrt{-1}$.

Actividad 19. Racionalizamos las siguientes raíces e indicamos si son números reales o números imaginarios (recuerde que solo las raíces de índice par de cantidad negativa, son imaginarias)

1. $\sqrt{-81} =$	5. $\sqrt{-45} =$	9. $\sqrt{169} =$	13. $\sqrt{-128} =$	17. $\sqrt{484} =$
2. $\sqrt{36} =$	6. $\sqrt{-144} =$	10. $\sqrt{-36} =$	14. $\sqrt{686} =$	18. $\sqrt{-450} =$
3. $\sqrt{-9} =$	7. $\sqrt{98} =$	11. $\sqrt{-100} =$	15. $\sqrt{784} =$	19. $\sqrt{-3087} =$
4. $\sqrt{125} =$	8. $\sqrt{-147} =$	12. $\sqrt{250} =$	16. $\sqrt{-1225} =$	20. $\sqrt{6125} =$

3. Potencias de la unidad imaginaria

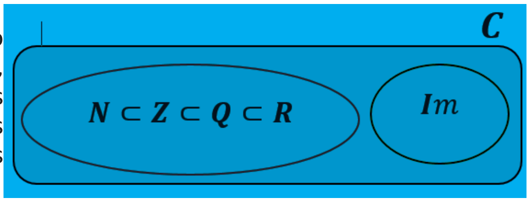
Todos los números permiten realizar operaciones aritméticas, en especial cuando hablamos de potencia, estamos hablando de multiplicación de números imaginarios, para eso estudiaremos el comportamiento de la unidad imaginaria en los diferentes exponentes.

$\boldsymbol{i^0} = \mathbf{1}$	$\boldsymbol{i^6} = i^4 * i^2 = (1)(-1) = \mathbf{-1}$
$\boldsymbol{i^1} = \boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i^7} = i^4 * i^3 = (1)(-i) = \boldsymbol{-i}$
$\boldsymbol{i^2} = \left(\sqrt{-1}\right)^2 = \mathbf{-1}$	$\boldsymbol{i^8} = i^4 * i^4 = (1)(1) = \mathbf{1}$
$\boldsymbol{i^3} = i^2 * i = \left(\sqrt{-1}\right)^2 * i = \boldsymbol{-i}$	$\boldsymbol{i^9} = i^8 * i = (1) * i = \boldsymbol{i}$
$\boldsymbol{i^4} = i^2 * i^2 = \left(\sqrt{-1}\right)^2\left(\sqrt{-1}\right)^2 = (-1)(-1) = \mathbf{1}$	$\boldsymbol{i^{10}} = i^8 * i^2 = (1)(-1) = \mathbf{-1}$
$\boldsymbol{i^5} = i^4 * i = (1) * i = \boldsymbol{i}$	$\boldsymbol{i^{11}} = i^8 * i^3 = (1)(-i) = \boldsymbol{-i}$

Analizamos atentamente el cuadro, observando el comportamiento de la potencia de la unidad imaginaria

Actividad 20: en el cuaderno de práctica, determinamos las potencias de la unidad imaginaria desde $\boldsymbol{i^{12}}$ hasta $\boldsymbol{i^{32}}$ bajo el mismo procedimiento que en el cuadro

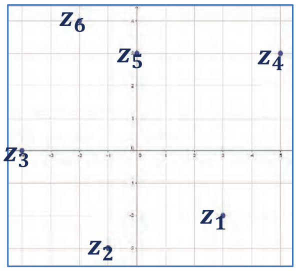
4. Números complejos y su representación gráfica



Los números complejos es el conjunto de números, que une al conjunto de los números reales con el conjunto de los números imaginarios, complementando así al conjunto de números, con los cuales las operaciones con números, ya no tendrían restricciones, siendo estos los que nos permiten gozar de los avances tecnológicos, ya que los números se pueden aplicar en diferentes ambitos de la cotidianidad.
La representación de un número complejo se da bajo la forma binómica:
z=a+bi siendo a un número real y bi el número complejo, este tipo de números se representan bajo un plano coordenado, donde la abscisa corresponde a los valores reales y la ordenada a los valores imaginarios.

Ejemplo 2: graficamos en el sistema de cordenadas los siguientes números complejos.

z_1=3-2i
z_2=-1-3i
z_3=-4
z4=5+3i
z_5=3i
z_6=-2+4i



Noticiencia

Los números imaginarios también se pueden escribir como un par ordenado. a+bi=(a,b)

5. Operaciones con números complejos

Al igual que los diferentes tipos de números, los números complejos también gozan de las propiedades de las operaciones de adición, sustracción, multiplicación y división, los cuales estudiaremos a continuación.

Suma y resta de números complejos

Para sumar y restar números complejos, lo único que hacemos es sumar la parte real con la parte real, y la parte imaginaria con la parte imaginaria, resultado de esta operación, obtenemos un resultado que también será complejo, es decir $\boldsymbol{z_1 \pm z_2 = z_3}$

Ejemplo 3: sea $z_1 = 2 - 3i$, $z_2 = -4 + 5i$, $z_3 = 7 + i$, simplificamos las operaciones:

1. $z_1 + z_2 = (2 - 3i) + (-4 + 5i) = 2 - 3i - 4 + 5i = -2 + 2i$
2. $z_1 - z_3 = (2 - 3i) - (7 + i) = 2 - 3i - 7 - i = -5 - 4i$
3. $2z_2 + 3z_3 = 2(-4 + 5i) + 3(7 + i) = -8 + 10i + 21 + 3i = 13 + 13i$
4. $-4z_2 + 5z_3 - 2z_1 = -4(-4 + 5i) + 5(2 - 3i) - 2(2 - 3i) = 16 - 20i + 10 - 15i - 4 + 6i = 22 - 29i$

Multiplicación de números complejos

En la multiplicación de números complejos, basta con aplicar la multiplicación por propiedad distributiva (o productos notables), tomando siempre en cuenta la potencia del número imaginario.

Ejemplo 4: Multiplicamos y simplificamos las siguientes expresiones:

1. $5i(3 - 2i) = 15i - 10i^2 = 15i - 10(-1) = 10 + 15i$
2. $-7i(-4i + 1) = 28i^2 - 7i = 28(-1) - 7i = -28 - 7i$
3. $(i - 5)(4 + 2i) = 4i + 2i^2 - 20 - 10i = 4i + 2(-1) - 20 - 10i = -22 - 6i$
4. $(3 - 5i)^2 = 9 - 30i + 25i^2 = 9 - 30i + 25(-1) = -16 - 30i$

División de números complejos

La división de los números complejos, no es más que una fracción, pero debido a que las fracciones no permiten tener raíces en el denominador, es que tendremos que racionalizar y simplificar algunas expresiones. Veamos en los siguientes ejemplos este proceso, teniendo en mente que existen tres casos.

Ejemplo 5: dividimos las siguientes expresiones.

caso 1. $\frac{15-20i}{25} = \frac{5(3-4i)}{5*5} = \frac{3-4i}{5}$

caso 2. $\frac{2+3i}{5i} = \frac{2+3i}{5i} * \frac{i}{i} = \frac{2i+3i^2}{5i^2} = \frac{2i+3(-1)}{5(-1)} = \frac{-3+2i}{-5} = \frac{3-2i}{5}$

caso 3. $\frac{7-i}{2-i} = \frac{7-i}{2-i} * \frac{2+i}{2+i} = \frac{14+7i-2i-i^2}{4-i^2} = \frac{14+7i-2i-(-1)}{4-(-1)} = \frac{15+5i}{5} = \frac{5(3+i)}{5} = 3 + i$

Actividad 21: Sea $z_1 = 3 - 2i$; $z_2 = -2 + 5i$; $z_3 = 7 + i$, realizamos las siguientes simplificaciones.

1.	$z_1 + z_2 =$	**5.**	$5z_1 + z_2 =$	**9.**	$z_1 + 3z_3 =$	**13.**	$-z_1 + 5z_2 =$
2.	$2z_3 - z_2 =$	**6.**	$3z_3 - 5z_2 =$	**10.**	$z_3 - z_2 =$	**14.**	$-4z_3 - 5z_2 =$
3.	$z_2 * z_3 =$	**7.**	$z_1 * 4z_3 =$	**11.**	$7z_3 * 2z_1 =$	**15.**	$3z_1 * 2z_2 =$
4.	$z_2/z_1 =$	**8.**	$z_2/5z_3 =$	**12.**	$6z_3/z_1 =$	**16.**	$z_3/10z_2 =$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 22: Respondemos las siguientes preguntas de reflexión en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Cómo se aplica los números complejos en los circuitos eléctricos ?

2. ¿En la vida cotidiana cómo podemos aplicar los números complejos en la resolucion de problemas?

3. ¿Cómo se aplican los números complejos en la geometría fractal?

Analicemos la aplicación de los números complejos en el avance tecnológico y escribimos 5 ejemplos.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 23: Un fractal es un objeto geométrico irregular cuyas autosimilitudes se repiten a grandes escalas. Se define los fractales a través de cálculos con números complejos:

1. Investiga sobre los fractales y elabora un diseño aplicando los números complejos.

2. Una cartulina la dividimos en dos partes iguales, en la primera haremos un cuadro donde podamos observar ejemplos de obtención de números imaginarios, diferentes a los que vimos en el texto. En el segundo cuadro mostraremos las potencias de la unidad imaginaria desde i^0 hasta i^{12}, el cual socializaremos con los compañeros en el curso.

ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO Y FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS DE NUESTRO CONTEXTO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 24: Escribimos lo que conocemos sobre la relación que existe entre, un tiro libre en un partido de futbol, el cable de electricidad en las calles, las antenas satelitales que nos permiten tener señal de televisión en lugares lejanos, y el movimiento de traslación de nuestro planeta.

Las situaciones planteadas se expresan a través de las matemáticas, con lo cual muchas de las ciencias logran desarrollar diferentes usos para el desarrollo de la tecnología y la productividad. Estudiemos un poco más este tipo de figuras.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Función cuadrática y sus características

Muchos de los fenómenos que se presentan en nuestra vida diaria, no son de carácter lineal, sino que están gobernados por relaciones que reciben el nombre de funciones cuadráticas (es decir, curvas). Estas funciones tienen la característica de que su grado absoluto es dos, veamos algunos ejemplos:

$$y = x^2 \qquad y = 5x^2 + 4x - 7 \qquad y^2 + x^2 = 11$$

En vista de la diversidad de ecuaciones, empezaremos el estudio de la resolución de ecuaciones cuadráticas, por aquellas que son de la forma $ax^2 + bx + c = 0$ llamadas ecuaciones de segundo grado con una incógnita.

Las ecuaciones de segundo grado con una incógnita, tienen dos soluciones (x_1, x_2) estas pueden ser de tres tipos, soluciones reales, soluciones imaginarias y soluciones complejas.

2.Métodos de resolución de una ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ de la forma

Como hemos podido conocer, la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, tiene tres tipos de soluciones, por lo cual debemos tener mucho cuidado al efectuar operaciones, de tal forma que obtengamos las respuestas correctas, porque como se dijo en el anterior contenido, muchas veces un signo, puede provocarnos grandes desastres.

Al resolver una ecuación cuadrática se pueden presentar tres casos: A) $ax^2 + c = 0$, B) $ax^2 + bx = 0$, C) $ax^2 + bx + c = 0$

de los cuales iremos estudiando su forma de resolución. Pero nunca olvidemos que para resolver cualquier ecuación, siempre debemos simplificar, a su más simple expresión.

Resolución de ecuación de la forma $\boldsymbol{ax^2+c=0}$

Para resolver este tipo de ecuaciones solo se debe recordar las reglas del despeje y al final sacar la raíz cuadrada. Veamos:
.

Ejemplo 1: Resolvemos las siguientes ecuaciones de segundo grado.

$$1.\ x^2-9=0 \qquad x^2=9 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{9} \qquad x=\pm 3 \qquad x_1=3\,;\,x_2=-3$$

$$2.\ x^2-12=0 \qquad x^2=12 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{12} \qquad x=\pm 2\sqrt{3} \qquad x_1=2\sqrt{3}\,;\,x_2=-2\sqrt{3}$$

$$3.\ 4x^2-25=0 \qquad x^2=\frac{25}{4} \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{25}{4}} \qquad x=\pm\frac{5}{2} \qquad x_1=\frac{5}{2}\,;\ x_2=-\frac{5}{2}$$

$$4.\ 3x^2-11=0 \qquad x^2=\frac{11}{3} \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{\frac{11}{3}}=\pm\sqrt{\frac{11}{3}} \qquad x_1=\sqrt{\frac{11}{3}}\ ;\ x_2=-\sqrt{\frac{11}{3}}$$

Ejemplo 2: Resolvemos las siguientes ecuaciones de segundo grado.

$$1.\ x^2+16=0 \qquad x^2=-16 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{-16}=\sqrt{16}\sqrt{-1} \qquad x=\pm 4i \qquad x_1=4i\ ;\ x_2=-4i$$

$$2.\ x^2+18=0 \qquad x^2=-18 \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{-18}=\sqrt{18}\sqrt{-1} \qquad x=\pm 3\sqrt{2}i \qquad x_1=3\sqrt{2}i\ ;\ x_2=-3\sqrt{2}i$$

$$3.\ 7x^2+19=0 \qquad x^2=-\frac{19}{7} \qquad \sqrt{x^2}=\sqrt{-\frac{19}{7}}=\sqrt{\frac{19}{7}}\sqrt{-1}=\pm\sqrt{\frac{19}{7}}i \qquad x_1=\sqrt{\frac{19}{7}}i\ ;\ x_2=-\sqrt{\frac{19}{7}}i$$

Resolución de ecuación de la forma $ax^2+bx=0$

Para resolver este tipo de ecuaciones solo se deben factorizar e igualar los factores a cero.

Ejemplo 3: Resolvemos las siguientes ecuaciones.

$$1.\ x^2-6x=0 \qquad x(x-6)=0 \qquad x=0\,;\ x-6=0 \qquad x=0\,;\ x=6$$

$$2.\ 3x^2+15x=0 \qquad 3x(x+5)=0 \qquad 3x=0\,;\ x+5=0 \qquad x=0\,;\ x=-5$$

$$3.\ 5x^2-4x=0 \qquad x(5x-4)=0 \qquad x=0\,;\ 5x-4=0 \qquad x=0\,;\ x=\frac{4}{5}$$

$$4.\ 4x^2+6x=0 \qquad 2x(2x+3)=0 \qquad 2x=0;2x+3=0 \qquad x=0\,;\ x=-\frac{3}{2}$$

Resolución de ecuación de la forma . $\boldsymbol{ax^2+bx+c=0}$

Para resolver este tipo de ecuaciones existen diversos métodos, los cuales iremos estudiando por casos.

2.1. Completando cuadrados

En este caso, los primeros términos de la ecuación $\boldsymbol{ax^2}+bx+c=0$ deben parecerse a los primeros términos del producto, $\boldsymbol{(mx+n)^2=m^2x^2+2mnx+n^2}$, de tal forma que podamos obtener el último término mediante una suma, permitiéndonos factorizar y despejar la incógnita.

Ejemplo 4: Resolvemos las siguientes ecuaciones.

$$1.\ x^2+10x-11=0 \qquad x^2+10x+25=11+25 \qquad (x+5)^2=36 \qquad \sqrt{(x+5)^2}=\sqrt{36} \qquad x+5=\pm 6 \qquad x=-5+6\,;\ x=-5-6 \qquad x_1=1\,;\ x_2=-11$$

$$2.\ 4x^2-6x+3=0 \qquad 4x^2-6x+9=-3+9 \qquad (2x-3)^2=6 \qquad \sqrt{(2x-3)^2}=\sqrt{6} \qquad 2x-3=\pm\sqrt{6} \qquad x_1=\frac{3+\sqrt{6}}{2}\,;\ x_2=\frac{3-\sqrt{6}}{2}$$

$$N)\ 9x^2+30x+29=0 \qquad 9x^2+30x+25=-29+25 \qquad (3x+5)^2=-4 \qquad \sqrt{(3x+5)^2}=\sqrt{-4} \qquad 3x+5=\pm 2i \qquad x_1=\frac{-5+2i}{3}\,;\ x_2=\frac{-5-2i}{3}$$

2.2. Factorización

Utilizando los casos de factorización de trinomios (sugerencia el método de aspa simple), e igualando cada factor a cero, como lo hicimos en el caso de la ecuación incompleta con c = 0 podemos resolver la ecuación 2do grado.

Ejemplo 5: resolvemos las siguientes ecuaciones:

1
$$x^2-8x+12=0$$
$$(x-2)(x-6)=0$$
$$x-2=0\,;x-6=0$$
$$x_1=2\,;\ x_2=6$$

2
$$49x^2+28x+4=0$$
$$(7x+2)(7x+2)=0$$
$$7x+2=0\,;7x+2=0$$
$$x_1=-\tfrac{2}{7}\ ;\ x_2=-\tfrac{2}{7}$$

3
$$6x^2+23x-18=0$$
$$(3x-2)(2x+9)=0$$
$$3x-2=0\,;2x+9=0$$
$$x_1=\tfrac{2}{3}\ ;\ x_2=-\tfrac{9}{2}$$

2.3. Fórmula General

Este método nos permite, mediante la fórmula $\boldsymbol{x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$, determinar las soluciones de cualquier ecuación de 2do grado de la forma $\boldsymbol{ax^2}+bx+c=\boldsymbol{0}$ veamos .

Ejemplo 6: resolvemos las siguientes ecuaciones:

1
$$\boldsymbol{x^2+8x+16=0}$$
$$x=\frac{-(8)\pm\sqrt{(8)^2-4(1)(16)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{-8\pm\sqrt{64-64}}{2}=\frac{-8\pm0}{2}$$
$$x_1=\frac{-8+0}{2};\ x_2=\frac{-8+0}{2}$$
$$x_1=-4\,;\ x_2=-4$$

2
$$\boldsymbol{x^2-2x+2=0}$$
$$x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(2)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{4-8}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{-4}}{2}$$
$$x_1=\frac{2+2i}{2};\ x_2=\frac{2-2i}{2}$$
$$x_1=1+i\,;\ x_2=1-i$$

3
$$\boldsymbol{3x^2+5x-7=0}$$
$$x=\frac{-(5)\pm\sqrt{(5)^2-4(3)(-7)}}{2(3)}$$
$$x=\frac{-5\pm\sqrt{25+84}}{6}=\frac{-5\pm\sqrt{109}}{6}$$
$$x_1=\frac{-5+\sqrt{109}}{6};\ x_2=\frac{-5-\sqrt{109}}{6}$$

2.4. Método de PO SHEN-LOH

Este método es nuevo, el procedimiento está dado por fórmulas, siempre y cuando la ecuación este dado por la forma $\boldsymbol{x^2}+bx+c=\boldsymbol{0}$, en la cual se aplicaran las siguientes relaciones $\boldsymbol{t=-\frac{1}{2}*b\,,u=\sqrt{t^2-c}}$ y la solución será: $\boldsymbol{x=t\pm u}$

Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 7: Resolvamos las siguientes ecuaciones.

1
$$\boldsymbol{x^2-5x+6=0}$$
$$t=-\frac{1}{2}*(-5)=\frac{5}{2}$$
$$u=\sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2-(6)}=\sqrt{\frac{25}{4}-6}=\sqrt{\frac{1}{4}}=\frac{1}{2}$$
$$x_1=\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=\frac{6}{2};\ x_2=\frac{5}{2}-\frac{1}{2}=\frac{4}{2}$$
$$x_1=3\quad;\quad x_2=2$$

2
$$\boldsymbol{9x^2-6x+10=0}$$
$$\boldsymbol{x^2-\frac{2}{3}x+\frac{10}{9}=0}$$
$$t=-\frac{1}{2}*\left(-\frac{2}{3}\right)=\frac{1}{3}$$
$$u=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2-\left(\frac{10}{9}\right)}=\sqrt{\frac{1}{9}-\frac{10}{9}}=\sqrt{-\frac{9}{9}}=i$$
$$x_1=\frac{1}{3}+i\quad;\quad x_2=\frac{1}{3}-i$$
$$x_1=\frac{1+3i}{3}\quad;\quad x_2=\frac{1-3i}{3}$$

Actividad 25: resolvemos las ecuaciones aplicando el método que corresponda o el que hayas comprendido mejor:

1. $2\,x^2+2\,x=40$	6. $2\,x^2+6\,x=20$	11. $2\,x^2+12\,x=32$	16. $2\,x^2+16\,x=18$
2. $2\,x^2+16\,x=40$	7. $2\,x^2+14\,x=16$	12. $5\,x^2+30\,x=35$	17. $11\,x^2+11\,x=22$
3. $2\,x^2+14\,x=36$	8. $2\,x^2+14\,x=36$	13. $2\,x^2+4\,x=30$	18. $4\,x^2+32\,x=36$
4. $4\,x^2+12\,x=40$	9. $3\,x^2+3\,x=36$	14. $3\,x^2+9\,x=30$	19. $2\,x^2+2\,x=40$
5. $5\,x^2+10\,x=4$	10. $2\,x^2+2\,x=40$	15. $2\,x^2+14\,x=16$	20. $2\,x^2+2\,x=24$

Ejemplo 8: Resolvemos las ecuaciones de orden superior.

1
$$x^3+8=0$$
$$(x+2)(x^2-2x+4)=0$$
$$x+2=0\quad;\quad x^2-2x+4$$
$$x_1=-2\quad;\quad x=\frac{-(-2)\pm\sqrt{(-2)^2-4(1)(4)}}{2(1)}$$
$$x=\frac{2\pm\sqrt{-12}}{2}=\frac{2\pm2\sqrt{-3}}{2}$$
$$x_2=1+\sqrt{3}i\,;\ x_3=1-\sqrt{3}i$$

2
$$x^4-3x^2-4=0$$
$$(x^2-4)(x^2+1)=0$$
$$x^2-4=0\quad;\quad x^2+1=0$$
$$\sqrt{x^2}=\sqrt{4}\quad;\quad\sqrt{x^2}=\sqrt{-1}$$
$$x=\pm2\quad;\quad x=\pm i$$
$$x_1=2\,;\ x_2=-2\ ;\ x_3=i\,;\ x_4=-i$$

3. Propiedades de las raíces de una ecuación cuadrática

Las raíces de una ecuación, son las soluciones $\boldsymbol{(x_1,x_2,\ldots,x_n)}$ las cuales nos permiten verificar o plantear ecuaciones bajo la condición $\boldsymbol{(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)=0}$ Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 9: Verificamos si las raíces $\boldsymbol{x_1=3}$ y $\boldsymbol{x_2=4,}$ pertenecen a la ecuación $\boldsymbol{x^2-x+12=0}$

Sea: $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$ → $(x-3)(x-4) = 0$ → $x^2 - 7x + 12 = 0$

Por lo tanto, verificamos que $x_1 = 3$ y $x_2 = 4$ no pertenecen a $x^2 - x + 12 = 0$

Así mismo debemos saber que $\boldsymbol{x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}}$ y $\boldsymbol{x_1 * x_2 = \frac{c}{a}}$, lo que nos permite encontrar algunos resultados de forma directa, sin necesidad de resolver la ecuación.

Ejemplo 10: Determinamos la suma y el producto de las raíces de la ecuación $\boldsymbol{2x^2 + 5x - 11 = 0}$:

Suma: $x_1 + x_2 = -\frac{(5)}{(2)} = -\frac{5}{2}$ **Producto:** $x_1 * x_2 = \frac{(-11)}{(2)} = -\frac{11}{2}$

Ejemplo 11: Determinamos las raíces y la ecuación cuya suma y producto de raíces es 2 y -15 respectivamente.

Suma: $x_1 + x_2 = 2 = \frac{2}{1} = -\frac{-2}{1} = -\frac{b}{a}$ **Producto:** $x_1 * x_2 = -15 = \frac{-15}{1} = \frac{c}{a}$

Por lo tanto, la ecuación es : $\boldsymbol{x^2 - 2x - 15 = 0}$ y cuyas raíces son: $\boldsymbol{x_1 = 5}$; $\boldsymbol{x_2 = -3}$

4. Sistemas de ecuaciones de segundo grado

Un sistema de ecuaciones cuadrática, es aquel conjunto de ecuaciones, donde por lo menos una de las ecuaciones debe ser de orden dos, para resolver este tipo de sistemas es necesario dominar todos los métodos de resolución de sistemas de ecuaciones (M. Sustitución, M. Igualación, M. Determinantes, M. Reducción), debido a que dependiendo del sistema, la resolución se simplifica o se hace más fácil, mientras que si se fuerza a un solo método el sistema se complica demasiado. Veamos.

Ejemplo 12: Resolvemos el sistema de ecuaciones xy = - 4 ; x - 2y = 6

Solución: $xy = -4$ $x - 2y = 6$ Despejamos x de la segunda $x = 2y + 6$	Reemplazamos en la 1ra ecuación $(2y + 6)y = -4$ $2y^2 + 6y + 4 = 0$ Resolvemos la ecuación $y_1 = -1$; $y_2 = -2$	Reemplazamos $y_1; y_2$ donde haya "**x**" $x = 2(-1) + 6$; $x = 2(-2) + 6$ $x = 4$; $x = 2$ La solución es el par ordenado $P_1(4; -1)$; $P_2(2; -2)$

Ejemplo 13: Resolvemos el sistema de ecuaciones $x^2 + y^2 = 25$; $x^2 - 4y = -7$

Solución: $x^2 + y^2 = 25$ $x^2 - 4y = -7$ Despejamos x^2 de 1ra y 2da $x^2 = 25 - y^2$ $x^2 = -7 + 4y$	Igualamos $x^2 = x^2$. $25 - y^2 = -7 + 4y$ $-y^2 - 4y + 32 = 0$ Resolvemos la ecuación $y_1 = 4$; $y_2 = -8$	Reemplazamos $y_1; y_2$ donde haya "**x**" $x^2 = 25 - (4)^2$; $x^2 = 25 - (-8)^2$ $x^2 = 9$; $x^2 = -39$ $x = \pm 3$; $x = \pm\sqrt{39}i$ La solución es el par ordenado $P_1(3; 4)$; $P_2(-3; 4)$

Ejemplo 14: Resolvemos el sistema de ecuaciones $x^2 - 3y^2 = -3$; $5x^2 + 2y^2 = 53$

Solución: $x^2 - 3y^2 = -3$ (-5) $5x^2 + 2y^2 = 53$ Despejamos x de la segunda $-5x^2 + 15y^2 = 15$ $5x^2 + 2y^2 = 53$ $17y^2 = 68$	Reemplazamos en la 1ra ec. $y^2 = \frac{68}{17} = 4$ $y = \pm 2$ Resolvemos la ecuación $y_1 = 2$; $y_2 = -2$	Reemplazamos $y_1; y_2$ donde haya "**x**" $x^2 - 3(2)^2 = -3$; $x^2 - 3(-2)^2 = -3$ $x = \pm 3$; $x = \pm 3$ La solución es el par ordenado $P_1(3; 2)$; $P_2(-3; 2)$ $P_3(3; -2)$; $P_4(-3; -2)$

Actividad 26. Resolvemos las ecuaciones en el cuaderno de precticas

I. Resolvemos las ecuaciones de segundo grado.

1) $x^2 - 4 = 0$
2) $x^2 - 25 = 0$
3) $x^2 - 49 = 0$
4) $x^2 - 2 = 0$
5) $4x^2 - 64 = 0$
6) $\frac{x^2}{49} - 1 = 0$
7) $x^2 - 5x = 0$
8) $x^2 + 7x = 0$
9) $x^2 + \frac{4}{3}x = 0$
10) $5x^2 + 15x = 0$
11) $\frac{4x^2 - 9x}{3} = 0$
12) $x^2 = -7x + 170$
13) $x^2 - 221 = -4x$
14) $2x^2 - 5x - 7 = 0$
15) $5x^2 = 12x - 9$
16) $\sqrt{4 - 2x} = 2 - \sqrt{x + 2}$

II Resuelva aplicando la formula general:

1) $18 = 6x + x(x - 13)$
2) $6x^2 + 5x + 1 = 0$
3) $x^2 + (x + 2)^2 = 580$
4) $4x^2 - 6x + 2 = 0$
5) $5x^2 - 12x + 9 = 0$
6) $2k^2 - 3 = 5k$

III. Resolver las ecuaciones de cuarto grado:

1) $x^4 - 625 = 0$ 2) $x^4 - 16 = 0$ 3) $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$

IV. Hallar las ecuaciones si se conocen las raíces:

1) $-13 \wedge$ 2) $\frac{-3}{2} \wedge -1$ 3) $-2 \wedge \frac{3}{4}$

5. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las matemáticas son herramientas muy útiles, que nos permiten dar soluciones a problemas que se pueden presentar en las diferentes ciencias o situaciones de nuestro contexto, un ejemplo podría ser el de calcular el área de terrenos, conocer el equilibrio entre la oferta y la demanda, conocer el comportamiento de los movimientos físicos, establecer parámetros económicos, estudiar el movimiento de los fenómenos astronómicos, el desarrollo de la comunicación, etc.

Todos estos y más, en la mayoría de los casos, se reducen a resolver algunas ecuaciónes o un sistema de ecuaciones. En ese sentido, es importante que recordemos sus propiedades y definiciones.

Ejemplo 15: Don Francisco se compra un terreno rectangular, donde instalará una cañería de 25 metros de diagonal para riego, además de la cañería decide comprar malla olímpica, para evitar que los animales ingresen a la huerta. ¿Cuántos metros de malla deberá comprar, si solo se acuerda que uno de los lados era 5 m más que la otra?

PLANTEAMIENTO	ECUACIÓN Y RESOLUCIÓN	RESPUESTA
$D = 25m$ $l_1 = x$ $l_2 = x + 5$	$25^2 = x^2 + (x + 5)^2$ (T. Pitágoras) $625 = x^2 + x^2 + 10x + 25$ $2x^2 + 10x - 600 = 0$ Resolviendo la ecuación tenemos: $x_1 = 15$; $x_2 = -20$	Don Francisco tiene un terreno rectangular de 15x20 por lo tanto, debe comprar malla en una cantidad de 2x15+2x20=70 metros.

Ejemplo 16: Los estudiantes de primer año de agronomía, tienen como tarea construir y cultivar un huerto rectangular, en un terreno alejado de la universidad, con las siguientes características: Área de 288 m² , cuyo ancho sea el doble del largo. Si ellos deben proteger su producción con puntales y alambre de púas (de 5 filas) ¿Cuántos puntales y qué cantidad de alambre tendrán que comprar?

PLANTEAMIENTO	ECUACIÓN Y RESOLUCIÓN	RESPUESTA
Área: $xy = 288$ **Lados:** $x = 2y$	$xy = 288$ definición de área $x = 2y$ relación de lados Aplicando sustitución y resolviendo $(2y)y = 288 \rightarrow y = 12$ Sustituyendo-: $y = 12$ $x = 2(12) \rightarrow x = 24$	Los estudiantes deben comprar 2x12+2x24=72 puntales y 5x72= 360 metros de alambre de púas.

Actividad 27: Resolvemos los siguientes problemas aplicando ecuaciones de segundo grado.

1.Un triangulo rectangulo, es semejante a otro, cuyos lados son 3,4,5. hallamos los lados del triangulo, si su área debe ser de 24 u^2. Calculamos la longitud de cada lado sabiendo que el área del triángulo es 24 m^2

2. Calculamos las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 75 m, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuyos lados miden 36 m y 48 m respectivamente.

3.Una pieza rectangular es 4 cm más larga que ancha. Con ella se construye una caja de 840 cm^3 cortando un cuadrado de 6cm de lado en cada esquina y doblando los bordes. Hallamos las dimensiones de la caja.

4. Encontramos dos números positivos cuya diferencia sea 7 y la suma de sus cuadrados 3809.

5. Adivinamos el lado de un cuadrado tal que, al aumentarlo en 5 unidades, el área aumente en 395 u^2.

6. En 11 años, la edad de Vicente será la mitad del cuadrado de la edad que tenía hace 13 años. ¿Qué edad tiene Vicente ahora?

7. Uno de los lados de un rectángulo mide 6 cm más que el otro. ¿Cuáles son las dimensiones si su área es 91 cm^2?.

8. Los lados de un triángulo rectángulo tienen por medida tres números enteros consecutivos. Calculamos los lados del triángulo.

9. Existen dos cuadrados, el mayor tiene un area de 44 m^2 mas que el area del cuadrado pequeño y el pequeño tiene 2 metros menos de lado que el mayor. Calculamos los lados de los cuadrados.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 28. Analicemos y reflexionemos para responder las siguientes preguntas

1. ¿Por qué es importante el estudio de las ecuaciones de segundo grado?

2. ¿Qué aplicación tiene las ecuaciones de segundo grado en nuestro contexto?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 29.

1. Construye una maqueta tomando como referencia alguna curva (ecuacion de 2do grado), un ejemplo construir el sistema solar con el movimiento de traslación de la tierra, que se observa al inicio del tema.

2. Escribe un problema que se pueda presentar en tu contexto y que podamos resolver utilizando ecuaciones de segundo grado.

DESIGUALDADES E INECUACIONES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 30: Escribimos una posible repuesta a la siguiente situación

En segundo de secundaria existen 5 amigos que juegan muy bien a la pelota, los cuales para no olvidarse sus cumpleaños deciden anotar la fecha de sus nacimientos en sus agendas, de la siguiente forma: Carlos (15-09-2008), Juan (05-01-2008), Federico (29-11-2008), Ernesto (02-07-2008) y Marco (08-05-2008). Cierto día, a la escuela llega una convocatoria para participar en el campeonato sub 14, al escuchar esa noticia los amigos estaban felices, pues eran los mejores del colegio, pero cuando dijeron que los participantes debían ser menores de 14 años cumplidos el 31 de junio, dos de ellos quedaron tristes ¿Por qué será que dos de estos amigos se pusieron tristes? ¿Cuáles son sus nombres?

Como bien pudiste analizar, aunque todos tienen o cumplirán 14 algunos lo harán después de la fecha establecida, lo que nos indica que, algunos son mayores de 14 años, por lo tanto, se les debe excluir.

En nuestra vida, existen varias situaciones donde se analizan las desigualdades, incluido en los fenómenos sociales, siendo este el motivo por el cual los gobiernos como el nuestro tienen que implementar leyes que de una u otra forma deben reducir esa desigualdad.

¡Continuemos con la Teoría!

1. Desigualdad e inecuación

Desigualdad.- Es la diferencia de valor que existe entre dos cantidades, para determinar las desigualdades vamos a observar los símbolos que se utilizaran y su significado:

Símbolo (nombre)	Significado	Ejemplo
> (mayor que)	Se entiende que la cantidad de la izquierda debe ser más grande que la de la derecha	4>1<
< (menor que)	Se entiende que la cantidad de la izquierda debe ser más pequeña que la de la derecha	5<10
≥ (mayor o igual que)	Se entiende que la cantidad de la izquierda debe ser mayor o igual que la cantidad de la derecha.	-2≥-7 3≥3
≤ (menor o igual que)	Se entiende que la cantidad de la izquierda debe ser menor o igual que la cantidad de la derecha	-4≤1 -1≤-1

Inecuación. Es una desigualdad que se verifica para agunos valores de las incognitas.

Ejemplo 1: interpretamos las siguientes inecuaciones.

$x > 1$: En la inecuación estamos indicando que los valores de x tienen que ser mayores a 1 sino sería falso.

$x \leq 7$: En la inecuación estamos indicando que los valores de x máximo deben llegar a 7, sino seria falso.

$x + 2 \geq -3$: En la inecuación se indica que $x + 2$ nunca debe bajar de -3, sino sería falso.

Solución de una Inecuación. La solución de una inecuación es un conjunto de puntos, los cuales deben cumplir la condición de la desigualdad planteada, es decir, su conclusión siempre debe ser verdadera, si fuera falsa entonces no es la solución de una inecuación.

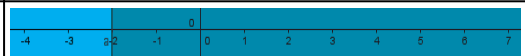
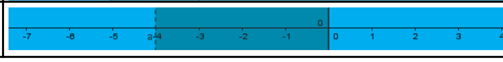
El conjunto de puntos de una inecuación, será conocida como **intérvalo.** Este intérvalo, puede ser abierto o cerrado, dependiendo de los limites o extremos del intervalo, lo cual generalmente se reduce a conocer o interpretar las desigualdades.

Intérvalo Abierto. - Es aquel intérvalo donde el limite no es parte de la solución, este intérvalo está relacionado con las desigualdades (< ó >) y las que generalmente se escriben con el símbolo ((;)).

Intérvalo Cerrado. - Es aquel intérvalo donde el límite es parte de la solución, este intérvalo está relacionado con las desigualdades (≤ ó ≥) y las que generalmente se escriben con el símbolo ([;]).

2. Intérvalo real y representación gráfica de los intérvalos

Un intérvalo es un conjunto de números, que depende del tipo de conjunto de números que estemos asumiendo como respuesta, en el caso general, se toma en cuenta los números Reales Veamos cómo se representaran las respuestas de las inecuaciones, o lo que llamaremos, conjunto solución, tanto de forma algebraica, como su representación gráfica.

INECUACIÓN	REPRESENTACIÓN GRÁFICA	CONJUNTO SOLUCIÓN
$x < 5$		$CS: (-\infty; 5)$
$x \geq -2$		$CS: [-2; \infty)$
$-4 < x \leq -0$		$CS: (-4; 0]$

Como podemos notar, el conjunto solución de estas inecuaciones está representado en el conjunto de los números reales, además como se indicó, los intervalos abiertos (además del infinito) se representan por "()", mientras que los cerrados se representan por "[]"

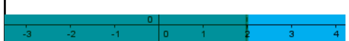
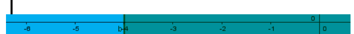
3. Inecuaciones lineales de una variable

Las inecuaciones de una variable de primer grado, son aquellas que tienen una sola variable y cuyo mayor exponente es uno. Para resolver estas inecuaciones, basta con respetar las propiedades de las inecuaciones que se observan en el cuadro mostrado, con el objetivo de despejar la variable, como se lo realizaba en una ecuación, sin olvidar la propiedad de la multiplicación por menos uno, porque cambia la desigualdad.

PROPIEDADES DE INECUACIONES

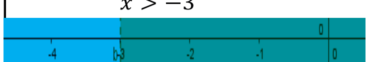
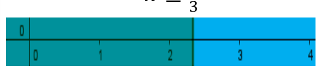
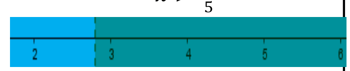
Sea: $a < b \rightarrow a + c < b + c$
Sea: $a < b \rightarrow a - c < b - c$
Sea: $a < b \rightarrow a * c < b * c \leftrightarrow c > 0$
Sea: $a < b \rightarrow a * c > b * c \leftrightarrow c < 0$
Sea: $a < b \rightarrow a/c < b/c \leftrightarrow c > 0$
Sea: $a < b \rightarrow a/c > b/c \leftrightarrow c < 0$

Ejemplo 2: Resolvemos las siguientes inecuaciones.

1). $2x + 1 < 5$ $2x < 5 - 1$ $2x < 4$ $x < \frac{4}{2}$ $x < 2$  CS: $(-\infty; 2)$	2) $4x + 9 \geq -7$ $4x \geq -7 - 9$ $4x \geq -16$ $x \geq -\frac{16}{4}$ $x \geq -4$  CS: $[-4; \infty)$	3) $9x - 11 \leq 6x - 11$ $9x - 6x \leq -11 + 11$ $3x \leq 0$ $x \leq \frac{0}{3}$ $x \leq 0$  CS: $(-\infty; 0]$

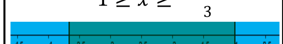
Como habrás podido notar resolver una inecuación es casi lo mismo que una ecuación, solo que ahora ya no es un solo valor, sino varios los que encontramos.

Ejemplo 3: Resolvemos las siguientes inecuaciones.

1) $-7 - 4x < 5$ $-4x < 5 + 7$ $-4x < 12 \quad (-1)$ $4x > -12$ $x > -\frac{12}{4}$ $x > -3$  CS: $(-3; \infty)$	2) $-12x + 21 \geq -7$ $-12x \geq -7 - 21$ $-12x \geq -28 \; (-1)$ $12x \leq 28$ $x \leq \frac{28}{12}$ $x \leq \frac{7}{3}$  CS: $(-\infty; \frac{7}{3}]$	3) $6x + 7 < 11x - 7$ $6x - 11x < -7 - 7$ $-5x < -14 \; (-1)$ $5x > 14$ $x > \frac{14}{5}$  CS: $(-\frac{14}{5}; \infty)$

En estos ejemplos te habrás dado cuenta de que cuando se multiplica por (-1) el sentido de la desigualdad cambia.

Ejemplo 4: Resolvemos las siguientes inecuaciones.

1) $-9 < 5x + 1 < 16$ $-9 - 1 < 5x < 16 - 1$ $-10 < 5x < 15$ $-\frac{10}{5} < x > \frac{15}{5}$ $-2 < x < 3$  CS: $(-2; 3)$	2) $8 \leq 5 - 3x \leq 16$ $8 - 5 \leq -3x \leq 16 - 5$ $3 \leq -3x \leq 1 \; (-1)$ $-3 \geq 3x \geq -11$ $-\frac{3}{3} \geq x \geq -\frac{11}{3}$ $-1 \geq x \geq -\frac{11}{3}$  CS: $(-\frac{11}{3}; -1]$	3) $-9 \leq -8x + 7 < 27$ $-9 - 7 \leq -8x < 27 - 7$ $-16 \leq -8x < 20 \quad (-1)$ $16 \geq 8x > -20$ $\frac{16}{8} \geq x > \frac{-20}{8}$ $2 \geq x > -\frac{5}{2}$  CS: $(-\frac{14}{5}; \infty)$

Aunque existen dos límites, el procedimiento es el mismo, solo hay que tener cuidado con el (-1)

4. Inecuaciones con valor absoluto

Valor absoluto, es una función matemática que indica que cualquier valor que ingrese dentro de ella, su resultado siempre será positivo. El símbolo de valor absoluto es "|x|", por ejemplo, |7|=7 pero si fuera |-7|=7

Una inecuación con valor absoluto nos indica que debemos encontrar los valores de la variable de tal forma que se satisfaga la desigualdad, para este efecto la cantidad del valor absoluto se dividirá en dos desigualdades (una con signo positivo y la otra con signo negativo) y se analizará sus soluciones, de tal forma que determinemos el intervalo donde se cumpla la desigualdad.

Ejemplo 5: Resolvemos la inecuación |3x - 6| ≥ 3

$+(3x-6) \geq 3$	$-(3x-6) \geq 3$
$3x-6 \geq 3$	$-3x+6 \geq 3$
$3x \geq 3+6$	$-3x \geq 3-6$
$x \geq \frac{9}{3}$; $x \geq 3$	$-3x \geq -3$ (-1) ; $3x \leq 3$; $x \leq \frac{3}{3}$; $x \leq 1$

Como podemos observar existen dos puntos x=1 y x=3 donde cambian resultados, así que analizaremos puntos intermedios para determinar valores de verdad de la inecuación, en x=0, x=2 y x=5

Con x=0 → $|\mathbf{3(0)-6}| \geq \mathbf{3}$ → $|\mathbf{-6}| \geq \mathbf{3}$ → $\mathbf{6 \geq 3}$ → Verdadero

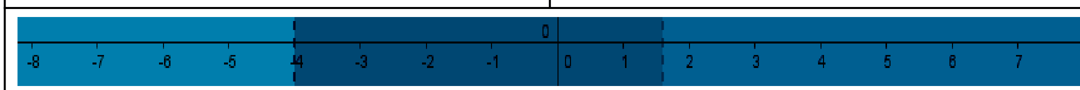
Con x=2 → $|\mathbf{3(2)-6}| \geq \mathbf{3}$ → $|\mathbf{6-6}| \geq \mathbf{3}$ → $\mathbf{0 \geq 3}$ → Falso

Con x=0 → $|\mathbf{3(5)-6}| \geq \mathbf{3}$ → $|\mathbf{15-6}| \geq \mathbf{3}$ → $\mathbf{9 \geq 3}$ → Verdadero

CS: $(-\infty; \mathbf{1}] \cup [\mathbf{3}; \infty)$

Ejemplo 6: Resolvemos la inecuación | 5 x + 6| < 14

$+(5x+6) < 14$	$-(5x+6) < 14$
$5x+6 < 14$	$-5x-6 < 14$
$5x < 14-6$	$-5x < 14+6$
$5x < 8$; $x < \frac{8}{5}$	$-5x < 20$ (-1) ; $5x > -20$; $x > -\frac{20}{5}$; $x > -4$



Como podemos observar existen dos puntos x=8/5 y x=-4 donde cambian resultados, así que analizaremos puntos intermedios para determinar valores de verdad de la inecuación, en x=-7, x=0 y x=4

Con x=-7 → $|\mathbf{5(-7)+6}| < \mathbf{14}$→ $|\mathbf{-35+6}| < \mathbf{14}$ → $\mathbf{29 < 14}$ → Falso

Con x=0 → $|\mathbf{5(0)+6}| < \mathbf{14}$→ $|\mathbf{0+6}| < \mathbf{14}$ → $\mathbf{6 < 14}$ → Verdadero

Con x=4 → $|\mathbf{5(4)+6}| < \mathbf{14}$→ $|\mathbf{20+6}| < \mathbf{14}$ → $\mathbf{26 < 14}$ → Falso

CS: $(-\infty; \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}}) \cap (\mathbf{-4}; \infty)$ ó CS: $(\mathbf{-4}; \frac{\mathbf{8}}{\mathbf{5}})$

En este tipo de ejercicios el valor de verdad solo se cumple dentro de un rango, por lo cual su resultado puede darse como la intersección de dos intervalos.

5. Inecuaciones cuadráticas y de grado superior

Este tipo de inecuaciones tienen la forma $ax^2+bx+c<0$ o $ax^2+bx+c>0$, donde la solución parte de la determinación de las raíces, para luego analizar los puntos medios y a partir de ahí conocer sus valores de verdad, que nos permitirán conocer los intervalos de solución.

Ejemplo 7: Resolver la inecuación de segundo grado

Resolver estas inecuaciones significa calcular las raíces por algún método de resolución de ecuaciones de 2do grado, los cuales hemos estudiado anteriormente.

a) $\boldsymbol{x^2+3x-4<0}$ $\boldsymbol{(x-1)(x+4)<0}$ $\boldsymbol{x=1\ ;\ \ x=-4}$	a) $\boldsymbol{2x^2-9x-5\geq 0}$ $\boldsymbol{(2x+1)(x-5)\geq 0}$ $\boldsymbol{x=-\frac{1}{2}\ ;\ \ x=5}$	a) $\boldsymbol{x^2-4x+4\leq 0}$ $\boldsymbol{(x-2)(x-2)\leq 0}$ $\boldsymbol{x=2\ ;\ \ x=2}$
Con x=-5 →$(-5)^2+3(-5)-4<0$ $25-15-4<0$ $6<0$ FALSO Con x=0 →$(0)^2+3(0)-4<0$ $0+0-4<0$ $-4<0$ VERDADERO Con x=3 →$(3)^2+3(3)-4<0$ $9+9-4<0$ $14<0$ FALSO CS: $(-4;1)$	Con x=-1 →$2(-1)^2-9(-1)-5\geq 0$ $2+9-5\geq 0$ $6\geq 0$ VERDADERO Con x=0 →$2(0)^2-9(-0)-5\geq 0$ $0-0-5\geq 0$ $-5\geq 0$ FALSO Con x=6 →$2(6)^2-9(6)-5\geq 0$ $72-54-5\geq 0$ $13\geq 0$ VERDADERO CS: $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right] \cup [5;\infty)$	Con x=0 →$(0)^2-4(0)+4\leq 0$ $0-0+4\leq 0$ $4\leq 0$ FALSO Con x=2 →$(2)^2-4(2)+4\leq 0$ $4-8+4\leq 0$ $0\leq 0$ VERDADERO Con x=5 →$(5)^2-4(5)+4\leq 0$ $25-20+4\leq 0$ $9\leq 0$ FALSO CS: $\{2\}$

Ejemplo 8: Resolvemos la siguientes inecuaciónes de segundo grado.

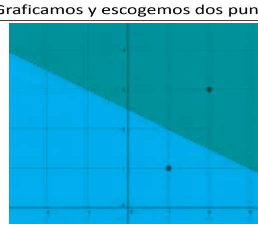
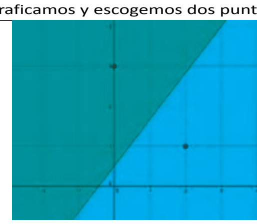
a) $\boldsymbol{x^4-10x^2+9>0}$ $\boldsymbol{(x^2-1)(x^2-9)>0}$ $\boldsymbol{(x-1)(x+1)(x-3)(x+3)>0}$ $\boldsymbol{x=1\ ;\ \ x=-1\ ; x=3\ ;\ \ x=-3}$	a) $\boldsymbol{6x^3+x^2-35x\leq 0}$ $\boldsymbol{x(3x-7)(2x+5)\geq 0}$ $\boldsymbol{x=0\ ;\ \ x=\frac{7}{3}; x=-\frac{5}{2}}$
Con x=-4 →$(-4)^4-10(-4)^2+9>0$ $256-160+9>0$ $105>0$ VERDADERO Con x=-2 →$(-2)^4-10(-2)^2+9>0$ $16-40+9>0$ $-15>0$ FALSO Con x=0 →$(0)^4-10(0)^2+9>0$ $0-0+9>0$ $9>0$ VERDADERO Con x=2 →$(2)^4-10(2)^2+9>0$ $16-40+9>0$ $-15>0$ FALSO Con x=4 →$(4)^4-10(4)^2+9>0$ $256-160+9>0$ $91>0$ VERDADERO CS: $(-\infty;-3)\cup(-1;1)\cup(3;\infty)$	Con x=-3 →$6(-3)^3+(-3)^2-35(-3)\leq 0$ $-162+9+105\leq 0$ $-48\leq 0$ VERDADERO Con x=-1 →$6(-1)^3+(-1)^2-35(-1)\leq 0$ $-6+1+35\leq 0$ $30\leq 0$ FALSO Con x=2 →$6(2)^3+(2)^2-35(2)\leq 0$ $24+4-70\leq 0$ $-42\leq 0$ VERDADERO Con x=3 →$6(3)^3+(3)^2-35(3)\leq 0$ $162+9-105\leq 0$ $66\leq 0$ FALSO CS: $\left(-\infty;-\frac{5}{2}\right]\cup\left[0;\frac{7}{3}\right]$

Existen varios métodos de poder determinar las raíces de un polinomio, como pudimos observar es solo analizar valores intermedios. En los ejemplos solo trabajamos con valores intermedios enteros, pero puede ser cualquier número que esté en el intervalo.

6. Inecuaciones lineales de dos variables

Una inecuación de dos variables es aquella desigualdad que tiene la forma $\boldsymbol{ax+by>c}$, los cuales tienen una representación en el plano coordenado de donde escogeremos dos puntos a diferentes lados de la recta, en ese sentido tendremos que determinar a qué lado de la recta se verifican los valores de verdad.

Ejemplo 9: Graficamos y determinamos la solución de las siguientes inecuaciones.

$\boldsymbol{f)}$ $\boldsymbol{x+2y>5}$ Graficamos y escogemos dos puntos	**g)** $\boldsymbol{7x-6y\leq -3}$ Graficamos y escogemos dos puntos
	

Analizamos los valores de verdad	Analizamos los valores de verdad
Con x=2 ^ y=3 → $(2)+2(3)>5$	Con x=0 ^ y=3 → $7(0)-6(3)\leq -3$
$2+6>5$ → $8>5$	$0-6\leq 5$ → $-6\leq 5$
VERDADERO	VERDADERO
Con x=1 ^ y=1 → $(1)+2(1)>5$	Con x=2 ^ y=1 → $7(2)-6(1)\leq -3$
$1+2>5$ → $3>5$ FALSO	$14-6\leq -3$ → $8\leq -3$ FALSO
CS: $\{x,y\in R/x+2y>5\}$	CS: $\{x,y\in R/7x-6y>-3\}$
Lo que nos indica que la solución es, todos los pares ordenados (x,y) que estén sobre la línea	Lo que nos indica que la solución es, todos los pares ordenados (x,y) que estén sobre la línea

Debemos recordar la graficación de ecuaciones de primer grado con dos variables.

7. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Las inecuaciones estudiadas en este capítulo, tienen bastante utilidad para realizar análisis de situaciones donde se necesita conocer qué valores pueden cumplir con una condición dada, recordamos por ejemplo la situación de los 5 amigos de 2do de secundaria que tenían que participar en un campeonato, de los cuales 2 no pudieron asistir porque habían pasado su edad de participación. Así como esta, existen muchas situaciones donde se aplican las inecuaciones, veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 10: Don Alfonso desea transportar duraznos de Camargo a La Paz, así que contrata una movilidad que máximo puede soportar 3000 kg, si todas las cajas en las que se trasportará el durazno pesan 344 kg y cada caja puede soportar 32 kg, ¿cuántas cajas como máximo podrán llevar en el camión?, ¿si cada caja la vende en Bs 97 al por mayor, cuánto obtendrá de la venta?

Planteamiento y resolución	Respuesta.
$32*x+350\leq 3000$ $32x\leq 3000-344$ $x\leq \frac{2656}{32}$ $x\leq 83$	Don Alfonso podrá transportar como máximo 83 cajas de durazno a La Paz. Si logra llevar las 83 cajas de durazno, entonces puede obtener 83*97=8051 bolivianos.

Ejemplo 11: Doña Prima desea comprar para su tienda dos tipos de soda (gaseosa) y cuenta con Bs 1566, si una de ellas costará Bs 11 y la otra Bs 8, además por el precio desea siempre tener el doble de cantidad de la más barata que la más cara ¿Cuál es la cantidad máxima de sodas de cada tipo que podrá comprar para su tienda?

Planteamiento y Resolución	Respuesta.
$11*x+8*2x\leq 1566$ $27x\leq 1566$ $x\leq \frac{1566}{27}$ $x\leq 58$	Doña Prima, para cumplir con su objetivo de venta, debe tener como máximo 58 unidades de la soda más cara y 116 unidades de la soda más económica.

Ejemplo 12: A la escuela llega una comisión de salud, la cual tiene como objetivo analizar la salud física de los estudiantes, tomando en cuenta su talla y masa muscular P=(2M+3T)/4, bajo los siguientes parámetros:

$P<80$: desnutrición	$80\leq P<100$: normal	$100\leq P$: sobrepeso

Si Alex pesa 35 kg y mide 80 cm, Romina pesa 45 kg y mide 90 cm, junto a Miguel que pesa 47 y mide 110 cm se someten a esa prueba, cuáles serán sus resultados.

Planteamiento y resolución	Respuesta.
Alex: $P=\frac{2(35)+3(80)}{4}=77.5$ Romina $P=\frac{2(45)+3(90)}{4}=90$ Miguel $P=\frac{2(47)+3(110)}{4}=106$	Alex tiene un cuadro de desnutrición. Romina tiene un cuadro normal de alimentación Miguel presenta un cuadro de sobrepeso

¡Realicemos la valoración!

Actividad 31:

1. La siguiente señal de tránsito nos indican la velocidad máxima que tiene que ir una movilidad. ¿Como podemos expresarlo a través de una inecuación? ¿crees que es importante aprender a resolver inecuaciones?

2. En dos grupos de debate, analizamos las leyes sobre la igualdad

3. Menciona 5 ejemplos de la aplicación de Inecuaciones y desigualdades en la cotidianidad, reflexionando sobre la importancia de su aplicación.

¡Es hora de la producción!

Acividad 32:

1. Elaboramos diferentes carteles de información, de transito u otros, donde se aplique inecuaciones
2. Elaboramos un cuadro de desigualdades para el curso, donde se muestren diferentes ejemplos.
3. Investigamos alguna situación dentro de nuestra comunidad, donde se presente alguna desigualdad y con la ayuda del profesor lo matematizamos, para luego exponerlo en el curso.

FUNCIÓN EXPONENCIAL Y LOGARÍTMICA

¡Iniciemos desde la práctica!

Actividad 33:

Analicemos la siguiente situación problematica:

Don Fernando posee un terreno de 512m^2, el cual quiere convertirlo en un huerto, pero como no tiene mucho dinero, promete tener 1m^2 cultivado el primer mes, 2m^2 cultivados el segundo mes, 4m^2 cultivados el tercer mes, 8m^2 el cuarto mes, así sucesivamente hasta completar su huerto.

¿Cuántos meses tendrá que trabajar don Fernando para realizar esta actividad?

Como notarás, calcular la situación anterior no fue complicada, pero que pasaría, si ahora te pongo el reto de calcular el tiempo, pero con las siguientes condiciones:

Si una persona que tiene un terreno de 7503m^2 no quiere doblar su producción con respecto al primer mes, sino producir el 1,5 más de su producción que el anterior mes ¿cómo podemos realizar el cálculo de producción?

¡Continuemos con la teoría!

Concebir el desarrollo y avance tecnológico sin el aporte de los conocimientos de logaritmos y los exponentes sería una tarea casi imposible, debido a que casi todos los software, programas o aplicaciones, que hay en los celulares y las computadoras, basan su funcionamiento en estos dos conceptos.

En sus inicios los logaritmos fueron trabajados con la intención de poder simplificar, cálculos astronómicos de una forma más sencilla, situación que hoy aprovecharon los desarrolladores de tecnología para mejorar sus procesadores y por ende aumentar la tecnología en las diferentes actividades de la evolución humana, ayudando a mejorar, los sistemas de salud, economía, población, educación, etc.

1. Sistemas de logaritmos

Los sistemas de logaritmos dependen de la base (positiva y diferente de 1), abriendo la posibilidad de tener un sin fin de sistemas, pero existen dos sistemas de logaritmos que son los más utilizados.

- **Sistemas de logaritmos decimales o de Briggs**

Es el sistema donde el logaritmo adopta la base 10 (la cual se sobreentiende), $\log_{10} M = \log M$

- **Sistemas de logaritmos naturales o Neperianos**

Es el sistema donde el logaritmo adopta la base es “e” (2.718281828...), $\log_e M = \ln M$

Es importante destacar que: $\log M = n \rightarrow M = 10^n$ y que: $\ln M = n \rightarrow M = e^n$

2. Propiedades de los logaritmos

P-1: En todo sistema de logaritmos, la base solo puede ser positiva y diferente de 1.

$$\log_A M = n \ ; \ con \ \ A \in \boldsymbol{R}[+] - \{0;1\}$$

P-2: En todo sistema de logaritmos, solo existen logaritmos de números positivos.

$$\log_A M = n \ \ ; \ \ con \ \ M \in \boldsymbol{R}[+] - \{0\}$$

P-3: En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de la base es 1.

$$\log_M M = 1 \ \rightarrow \ M = M^1$$

P-4: En todo sistema de logaritmos, el logaritmo de 1 en cualquier base es 0.

$$\log_n 1 = 0 \ \rightarrow \ 1 = n^0$$

P-5: El logaritmo de un producto, es igual a la suma de los logaritmos de sus factores.

$$\log_n (A * B) = \log_n A + \log_n B$$

P-6: El logaritmo de un cociente, es igual al logaritmo del numerador, menos el logaritmo del denominador

$$\log_n \left(\frac{A}{B}\right) = \log_n A - \log_n B$$

P-7: El logaritmo de una potencia, es igual a la potencia multiplicada por el logaritmo de su base.

$$\log_c A^n = n * \log_c A$$

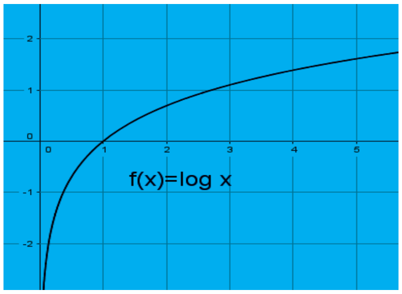
P-8: El logaritmo de una raíz de índice "n", es igual al logaritmo de la cantidad subradical, sobre el índice de la raíz.

$$\log_c \sqrt[n]{A} = \frac{\log_c A}{n}$$

Cambio de base (C. B.): El logaritmo en base "c", puede cambiar a otra base "n", haciendo una división entre el logaritmo en la nueva base, sobre el logaritmo de la base anterior.

$$\log_c A = \frac{\log_n A}{\log_n c}$$

3. Función Logaritmo



Partiendo de la concepción matemática, podemos decir que una función es la relación que existe entre dos conjuntos, donde para cada elemento del conjunto inicial, se le asigna un único elemento del conjunto final. Por lo tanto, la función logarítmica seria $f(x) = \log(x)$, donde para cada elemento del conjunto "x", existe otro elemento en el conjunto "y" afectado por el logaritmo, donde "x" e "y" son la abscisa y ordenada del plano cartesiano. Es importante señalar que la función logaritmo, es inversa la función exponencial.

4. Ecuaciones Logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella ecuación que tiene expresiones logarítmicas, las cuales resolveremos aplicando la definición de logaritmo (D. Log.), sus diferentes propiedades (P-1 hasta C. B.), además de apoyarnos en la teoría de exponentes y su propiedad de ecuaciones exponenciales. Veamos:

Ejemplo 1: Resolvemos las siguientes ecuaciones logarítmicas aplicando la definición de logaritmos.

1. $\log_{(x+1)} 121 = 2$

Solución

$$121 = (x+1)^2$$
$$11^2 = (x+1)^2$$
$$11 = x+1$$
$$10 = x$$

2. $\log_2 8 = x$

Solución

$$8 = 2^x$$
$$2^3 = 2^x$$
$$3 = x$$

3. $\log_{(\sqrt[3]{2})} x = 6$

Solución

$$x = (\sqrt[3]{2})^6$$
$$x = 2^2$$
$$x = 4$$

4. $\log_{\sqrt{3}} \left[4 + \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x\right] = 2$

Solución

$$4 + \log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x = (\sqrt{3})^2$$
$$\log_{\left(\frac{1}{3}\right)} x = 3 - 4$$
$$x = \left(\frac{1}{3}\right)^{-1} \ ; \quad x = 3$$

Ejemplo 2: Resolvemos las siguientes ecuaciones logarítmicas aplicando las propiedades de logaritmos.

1. $\frac{1}{2} + \log_{(0.25)}[1 + \log_{3x}(x^2 - 10)] = 0$

Solución

$$\log_{(0.25)}[1 + \log_{3x}(x^2 - 10)] = -\frac{1}{2}$$

$$1 + \log_{3x}(x^2 - 10) = (0.25)^{-\frac{1}{2}}$$

$$\log_{3x}(x^2 - 10) = 2 - 1$$

$$x^2 - 10 = (3x)^1$$

$$x^2 - 3x - 10 = 0$$

$$x = 5\ ;\quad x = -2\ (no\ usamos)$$

2. $\log_{\sqrt{7}}(x-1) + \log_{\sqrt{7}}(x+3) = \log_{\sqrt{7}} x(x-4)$

Solución

$$\log_{\sqrt{7}}(x-1)(x+3) = \log_{\sqrt{7}} x(x-4)$$

$$(x-1)(x+3) = x(x-4)$$

$$x^2 + 2x - 3 = x^2 - 4x$$

3. $\log_3 x + \log_3(x+8) = 2$

Solución

$$\log_3 x(x+8) = 2$$

$$x(x+8) = 3^2$$

$$x^2 + 8x - 9 = 0$$

$$x = 1\ ;\quad x = -9\ (no\ usamos)$$

4. $\log_{0.3}(2x-3) - \log_{0.3}(5x+1) = \log_{0.3}\frac{2}{7}$

Solución

$$\log_{0.3}\left(\frac{2x-3}{5x+1}\right) = \log_{0.3}\frac{2}{7}$$

$$\frac{2x-3}{5x+1} = \frac{2}{7}$$

$$14x - 21 = 10x + 2$$

$$4x = 23 \quad ; \quad x = \frac{23}{4}$$

Ejemplo 3:

1. $\log_{\sqrt[3]{2}}(x^2-2) - \log_{\sqrt[3]{2}}(x+3) = 3$

Solución

$$\log_{\sqrt[3]{2}}\left(\frac{x^2-2}{x+3}\right) = 3$$

$$\frac{x^2-2}{x+3} = \left(\sqrt[3]{2}\right)^3$$

$$\frac{x^2-2}{x+3} = 2$$

$$x^2 - 2 = 2x + 6\ ;\quad x^2 - 2x - 8 = 0$$

$$x = 4\ ;\quad x = -2$$

2. $5 * \log_{\sqrt{243}}(2x-1) = 2$

Solución

$$\log_{\sqrt{243}}(2x-1)^5 = 2$$

$$(2x-1)^5 = \left(\sqrt{243}\right)^2$$

$$(2x-1)^5 = 243$$

$$(2x-1)^5 = 3^5$$

$$2x - 1 = 3$$

$$x = 2$$

3. $\frac{\log_{2x}(25x^2-60x+36)}{2} = 1$

Solución

$$\log_{2x}\sqrt{25x^2 - 60x + 36} = 1$$

$$\sqrt{(5x-6)^2} = (2x)^1$$

$$5x - 6 =$$

$$3x = 6$$

$$x = 2$$

Ejemplo 4: Resolvemos las siguientes ecuaciones logarítmicas (tener en cuenta el cambio de base).

1. $2 * \ln(x+2) - \ln(x^2-4) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) + \frac{\ln(x^2-10x+25)}{2}$

SOLUCIÓN

$$\ln(x+2)^2 - \ln(x^2-4) = \ln\left(\frac{1}{x-1}\right) + \ln\sqrt{x^2-10x+25}$$

$$\ln\left[\frac{(x+2)^2}{x^2-4}\right] = \ln\left(\frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-1}\right)$$

$$\frac{(x+2)^2}{x^2-4} = \frac{\sqrt{x^2-10x+25}}{x-1}$$

$$\frac{(x+2)^2}{(x+2)(x-2)} = \frac{\sqrt{(x-5)^2}}{x-1}$$

$$\frac{(x+2)}{(x-2)} = \frac{(x-5)}{x-1}$$

$$(x+2)(x-1) = (x-5)(x-2)$$

$$x^2 + x - 2 = x^2 - 7x + 10$$

$$8x = 12 \quad ; \quad x = \frac{3}{2}$$

1. $\log_5 x + 2 * \log_x 5 = 3$

SOLUCIÓN

$$\log_5 x + 2 * \frac{\log_5 5}{\log_5 x} = 3$$

$$(\log_5 x)^2 + 2 * \log_5 5 = 3 * \log_5 x$$

$$(\log_5 x)^2 - 3 * \log_5 x + 2 * 1 = 0$$

$$(\log_5 x - 2)(\log_5 x - 1) = 0$$

$$\log_5 x - 2 = 0\ ;\ \log_5 x - 1 = 0$$

$$\log_5 x = 2\ ;\ \log_5 x = 1$$

$$x = 5^2\ ;\ x = 5^1$$

$$x = 25\ ;\ x = 5$$

1. $5 * \log_x 8 - 4 * \log_4 x = 1$

Solución

$$5 * \frac{\log_2 8}{\log_2 x} - 4 * \frac{\log_2 x}{\log_2 4} = 1$$

$$5 * \frac{\log_2 2^3}{\log_2 x} - 4 * \frac{\log_2 x}{\log_2 2^2} = 1$$

$$5 * \frac{3 * \log_2 2}{\log_2 x} - 4 * \frac{\log_2 x}{2 * \log_2 2} = 1$$

$$5 * \frac{3}{\log_2 x} - 4 * \frac{\log_2 x}{2} = 1$$

$$30 - 4 * (\log_2 x)^2 = 2 * \log_2 x$$

$$-4 * (\log_2 x)^2 - 2\log_2 x + 30 = 0$$

$$2 * (\log_2 x)^2 + \log_2 x - 15 = 0$$

$$(2 * \log_2 x - 5)(\log_2 x + 3) = 0$$

$$2 * \log_2 x - 5 = 0\ ;\ \log_2 x + 3 = 0$$

$$\log_2 x = \frac{5}{2}\ ;\ \log_5 x = -3$$

$$x = (2)^{\frac{5}{2}}\ ;\ x = (2)^{-3}$$

$$x = \sqrt{32}\ ;\ x = \frac{1}{8}$$

Actividad 34: Resolvemos todas las ecuaciones logarítmicas mostradas, utilizando los ejemplos estudiados.

$$\log_5 x = 2$$

$\log_x 343 = 3$

$\log_3 243 = x - 1$

$\log_{\sqrt{5}}[\log_3(x+1)] = 0$

$\log_7\left[8 + \log_{\left(\frac{1}{5}\right)}(2x-1)\right] = 1$

$\log_{\sqrt{60}} 3x + \log_{\sqrt{60}} 5x = 2$

$$\log_{0.41}(x-3) + \log_{0{,}41} 7 = \log_{0{,}41}(2x-1)$$

$$\log_{\left(\frac{2}{5}\right)}(x+3) - \log_{\left(\frac{2}{5}\right)}(3x-2) = -1$$

Tratamiento de la relación exponencial

La función exponencial tiene una relación directa con la función logarítmica, ya que una es la inversa de la otra, por lo tanto, al resolver ecuaciones o simplificaciones, recurriremos directa o indirectamente a ambas.

$$b^n = \underbrace{b * b * b * b * \cdots \ldots \ldots * b}_{n\ veces}$$

5. Propiedades de los exponentes

Antes de proceder a conocer las propiedades que rigen a los exponentes, tenemos que definir el significado de un exponente o potencia. Una potencia es el producto de multiplicar un número llamado base "b", la cantidad de veces que indique otro número llamado exponente "n".

Exponente cero.- Toda cantidad diferente de cero, elevado al exponente cero, es uno.

$$a^0 = 1 \quad ; \quad con\ a \neq 0$$

Ejemplo 7: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios

$$3m^0 + 2(\sqrt{3})^0 = 3 + 2 = 5 \quad ; \quad \frac{3-(x-7)^0}{2(x-y)^0} = \frac{3-1}{2*1} = \frac{2}{2} = 1 \quad ; \quad \left(\frac{1+\sqrt{x}}{3-a}\right)^0 - 1 = 1 - 1 = 0$$

Exponente negativo.- Toda cantidad diferente de cero, elevado al exponente negativo, invierte su posición, cambiando el signo del exponente.

$$a^{-m} = \frac{1}{a^m} \quad ; \quad \frac{1}{a^{-m}} = a^m \quad ; \quad \left(\frac{a}{b}\right)^{-m} = \left(\frac{b}{a}\right)^m$$

Ejemplo 8: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

$$20 * 5^{-2} = \frac{20}{5^2} = \frac{4}{5} \quad ; \quad \frac{3}{7^{-2}} = 3 * 7^2 = 147 \quad ; \quad \frac{4}{9} * \left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \frac{4}{9} * \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{4}{9} * \frac{27}{8} = \frac{3}{2}$$

Exponente fraccionario, - Toda cantidad, elevada al exponente fraccionario, se convierte en raíz de la base, siendo el numerador el exponente, y el denominador el índice de la raíz.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[m]{a^n}$$

Ejemplo 9: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

$$5^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{5^2} = \sqrt[3]{25} \quad ; \quad 7x^{\frac{2}{u}} = 7\sqrt[u]{x^2} \quad ; \quad \left(\frac{5+x}{4}\right)^{\frac{a+2}{b-3}} = \sqrt[b-3]{\left(\frac{5+x}{4}\right)^{a+2}}$$

Producto de potencias de bases iguales. - Para multiplicar potencias con la misma base, se mantiene la base y se suman los exponentes.

$$a^m * a^n = a^{m+n}$$

Ejemplo 10: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

$$2^3 * 2^5 = 2^{3+5} = 2^8; \quad x^{2+m} * x^{2m-5} = x^{2+m+2m-5} = x^{3m-3}; \quad m^4 * y^2 * m * y^{-7} = m^5 * y^{-5}$$

Cociente de potencias de bases iguales. - Si dos potencias de bases iguales se dividen, se mantiene la base y se resta el exponente del numerador menos el exponente del denominador.

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

Ejemplo 11: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

$$\frac{2^8}{2^5} = 2^{8-5} = 2^3 \quad ; \quad \frac{m^{2u+3}}{m^{3u+3}} = m^{2u+3-3u-3} = m^{-u} \quad ; \quad \frac{2^4x^{-m}}{2^{-1}x^2} = 2^5x^{-m-2}$$

Potencia de otra potencia. - Si una potencia está elevada a otra potencia, la base se mantiene y se multiplican los exponentes.

$$(a^m)^n = a^{m*n}$$

Ejemplo 12: Aplicando la propiedades de exponentes, simplificamos los siguientes ejercicios.

$$(7^{-3})^{-2} = 7^{-3(-2)} = 7^6 \quad ; \quad (x^{m-5})^{-3} = x^{(m-5)(-3)} = x^{-3m+15} \quad ; \quad \left(2^{-\frac{5}{4}}\right)^8 = 2^{-10}$$

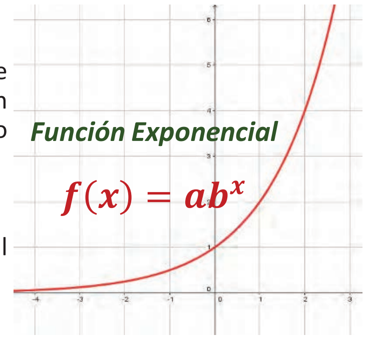
Ecuaciones exponenciales. - A bases iguales, exponentes iguales y a exponentes iguales, bases iguales:

$$a^x = a^m \quad \therefore \quad x = m$$
$$x^n = a^n \quad \therefore \quad x = a$$

Ejemplo 13: Aplicando la propiedad de exponentes resolvemos las ecuaciones.

$$5^x = 125 \quad ; \quad 5^x = 5^3 \quad ; \quad x = 3$$
$$81^x = 27 \quad ; \quad 3^{4x} = 3^3 \quad ; \quad 4x = 3 \quad ; \; x = \frac{3}{4}$$
$$\sqrt{9^x} = \sqrt[3]{3} \quad ; \quad 3^{\frac{2x}{2}} = 3^{\frac{1}{3}} \quad ; \quad \frac{2x}{2} = \frac{1}{3} \quad ; \; x = \frac{1}{3}$$
$$16^x * 4 = \frac{1}{8} \quad ; \quad 2^{4x} * 2^2 = 2^{-3} \quad ; \quad 2^{4x+2} = 2^{-3} \quad ; \quad 4x + 2 = -3 \quad ; \; x = -\frac{5}{4}$$
$$a^{2x}a^3a^{7-3x} = 1 \quad ; \quad a^{2x+3+7-3x} = a^0 \quad ; \quad -x + 10 = 0 \quad ; \; x = 10$$
$$\frac{49^x * 343}{7^{4x-1}} = \sqrt[3]{49} \quad ; \quad 7^{2x} * 7^3 * 7^{-4x+1} = 7^{\frac{2}{3}} \quad ; \quad -2x + 4 = \frac{2}{3} \quad ; \; x = \frac{5}{3}$$

6. Función exponencial



Partiendo del concepto de función, que indica que una función es la relación existente entre dos conjuntos de números, donde los números del conjunto de partida, tienen un único elemento en el conjunto de llegada. Esta relación es la que conocemos como función exponencial y vienen dada por la forma:

$f(x)=a*b^x$

Podemos observar que la variable independiente "x" se halla en el exponente, lo cual hace que la gráfica sea una curva.

7. Ecuaciones exponenciales

Una ecuación exponencial es aquella donde la incógnita de la ecuación se halla en el exponente, por lo tanto, la forma de resolverla no es tan simple como parece, en ese sentido presta mucha atención, pues utilizaremos propiedades de logaritmos y la propiedad de las ecuaciones exponenciales que dice: "A exponentes iguales, bases iguales. Y a bases iguales, exponentes iguales", además de convertir las cantidades en sus bases más simples. Veamos:

Ejemplo 14: Aplicando la propiedad, simplificamos los siguientes ejercicios.

1. $8^x = 16$

Solución

$$(2^3)^x = 2^4$$
$$2^{3x} = 2^4$$
$$3x = 4$$
$$x = \frac{4}{3}$$

1. $\sqrt[x]{729} = 27$

SOLUCIÓN

$$\sqrt[x]{3^6} = 3^3$$
$$3^{\frac{6}{x}} = 3^3$$
$$\frac{6}{x} = 3 \quad ; \quad \frac{6}{3} = x$$
$$2 = x$$

1. $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{9}{4}$

Solución

$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{3}{2}\right)^2$$
$$\left(\frac{2}{3}\right)^x = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2}$$
$$x = -2$$

1. $4 * 2^x = 32 * 8^3$

Solución

$$2^2 * 2^x = 2^5 * (2^3)^x$$
$$2^{2+x} = 2^5 * 2^{3x}$$
$$2^{2+x} = 2^{5+3x}$$
$$2 + x = 5 + 3x$$
$$-3 = 2x \quad ; \quad -\frac{3}{2} = x$$

1. $\frac{(5^x)^x}{625} = 1$

Solución

$$\frac{5^{x^2}}{5^4} = 1$$
$$5^{x^2-4} = 5^0$$
$$x^2 - 4 = 0$$
$$x = 2 \quad ; \quad x = -2$$

1. $\frac{343^x}{49*7^x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-4}$

Solución

$$\frac{(7^3)^x}{7^2*7^x} = \left(\frac{1}{7}\right)^{-4}$$
$$7^{3x-2-x} = 7^4$$
$$3x - 2 - x = 4$$
$$x = 3$$

Actividad 34: Con el apoyo de los ejercicios mostrados resolvemos las siguientes ecuaciones:

1. $128^x = 4 * 2^x$

2. $(a^x)^{2x} = a^{31} * a^{19}$

3. $\sqrt[x]{m^5} = \frac{\sqrt[3]{m^2}}{\sqrt{m}}$

4. $81 * 9^x = \frac{3^x}{243}$

1) $\left(\frac{7^x}{49}\right)^x = 343$

2) $\frac{4}{2^x} * \sqrt{\sqrt[10]{32^x}} = 1$

3) $\sqrt[3]{a}\sqrt{a^{3x}} = a\sqrt[6]{a^x a^{2x}}$

4) $\frac{27^x}{64^x} = 1\frac{1}{3}$

1) $\left(\sqrt[2x]{3}\right)^{2x-5} = \sqrt[8]{\frac{9^x}{243}}$

2) $\frac{m^{x+3}}{m^{1-2x}} = \sqrt[x]{m^5}$

3) $125^{3x} * 5^{x-2} = 25(5^{3-x})^{-2}$

4) $\sqrt[x-3]{m^{5x}}\sqrt[4]{m^{3+2x}} = 1$

Ejemplo 15: Aplicando la propiedad simplificamos los siguientes ejercicios.

1. $\sqrt[4]{\frac{m^x * \sqrt[3]{m^x}}{m^{5+x}}} - 1 = 0$

Solución

$$\sqrt[4]{\frac{m^x * m^{\frac{x}{3}}}{m^{5+x}}} - 1 = 0$$
$$\sqrt[4]{m^{x+\frac{x}{3}-x-5}} = 1$$
$$m^{\frac{\frac{x}{3}-5}{4}} = m^0$$
$$\frac{\frac{x}{3}-5}{4} = 0 \quad ; \quad x = 15$$

2. $125 * 5^x - \frac{25}{625^x} = 0$

Solución

$$5^3 * 5^x - \frac{5^2}{5^{4x}} = 0$$
$$5^{3+x} = 5^{2-4x}$$
$$3 + x = 2 - 4x$$
$$x = -\frac{1}{5}$$

3 $\frac{5}{3}a^{3x-5} - \frac{2}{3}a^{3+x} = \frac{a^{-1}*(a^5)^x}{a^4*a^{2x}}$

Solución

$$\frac{5}{3}a^{3x-5} - \frac{2}{3}a^{3+x} = \frac{a^{-1}*a^{5x}}{a^4*a^{2x}}$$
$$\frac{5}{3}a^{3x-5} - \frac{2}{3}a^{3+x} = a^{-1+5x-4-2x}$$
$$\frac{5}{3}a^{3x-5} - a^{3x-5} = \frac{2}{3}a^{3+x}$$
$$\frac{2}{3}a^{3x-5} = \frac{2}{3}a^{3+x}$$
$$3x - 5 = 3 + x$$
$$x = 4$$

4 $\frac{\left(\sqrt[x]{2}\right)^{x^3}}{128} - \left(\frac{2^{-1}}{4^x}\right)^{-1} = 0$

Solución

$$\frac{2^{\frac{x^3}{x}}}{2^7} - \left(\frac{2^{-1}}{2^{2x}}\right)^{-1} = 0$$
$$2^{x^2-7} = \frac{2}{2^{-2x}}$$
$$2^{x^2-7} = 2^{1+2x}$$
$$x^2 - 7 = 1 + 2x$$
$$x^2 - 2x - 8 = 0$$
$$x = 4 \; ; \; x = -2$$

Actividad 35: Apoyándonos en los ejemplos anteriores resolvemos las siguientes ecuaciones:

1) $3m^{2x}+2m^{3x-7}=5m^{2x}$

2) $\frac{(a^x)^{x-1}}{a^5}-\frac{a^{2x}a^{4-x}}{a^{x+3}}=0$

3) $\frac{\sqrt{125^x}}{25}-\frac{35}{7\sqrt[3]{5^x}}=0$

4) $\frac{3*49^x}{686}-\frac{35}{4}\left(\frac{343}{7^x}\right)^{-1}=\frac{(49)^{x-1}}{14}-\frac{7^x(2^{-1})^2}{49}$

Ecuaciones exponenciales de bases diferentes

Existen ecuaciones donde la base del exponente suele ser diferente, por lo tanto, es necesario aplicar la función logaritmo, ya que la propiedad de la potencia de un logaritmo, nos permite convertir el exponente como coeficiente.

Ejemplo 16: Aplicando propiedades de exponentes y logaritmos resolvemos las siguientes ecuaciones.

1. $\sqrt[x]{7}=5$

Solución

$$\log\sqrt[x]{7}=\log 5$$

$$\frac{\log 7}{x}=\log 5$$

$$x=\frac{\log 7}{\log 5}$$

2 $2^x=3$

Solución

$$\log 2^x=\log 3$$

$$x*\log 2=\log 3$$

$$x=\frac{\log 3}{\log 2}$$

3 $3^{3x-1}=11$

Solución

$$\log 3^{3x-1}=\log 11$$

$$(3x-1)\log 3=\log 11$$

$$3x*\log 3-\log 3=\log 11$$

$$x=\frac{\log 11+\log 3}{3*\log 3}$$

4 $5^{x+2}=13$

Solución

$$\log 5^{x+2}=\log 13$$

$$(x+2)\log 5=\log 13$$

$$x*\log 5+2*\log 5=\log 13$$

$$x=\frac{\log 13-2*\log 5}{\log 5}$$

5 $2^{5x+3}=7^{x-2}$

Solución

$\log 2^{5x+3}=\log 7^{x-2}$	Aplicamos logaritmos.
$(5x+3)*\log 2=(3x-2)*\log 7$	Aplicamos log de Potencia.
$5x*\log 2+3*\log 2=3x*\log 7-2*\log 7$	Multiplicamos.
$5x*\log 2-3x*\log 7=-2*\log 7-3*\log 2$	Ordenamos los términos
$x(5*\log 2-3*\log 7)=-2*\log 7-3*\log 2$	Factorizamos la incógnita
$x=\frac{-2*\log 7-3*\log 2}{5*\log 2-3*\log 7}$	Despejamos “x”

Actividad 36: En nuestro cuaderno de práctica resolvemos las siguientes ecuaciones.

1) $5^x=2$ 3) $5^{-7x}=3$ 5) $11^{x-3}=2^x$ 7) $4^{7x+1}=5^{2x}$ 9) $6^{5x+3}=17^{1-x}$

2) $2^{3x}=7$ 4) $3^{x+5}=4$ 6) $7^{2x+1}=11^{x-7}$ 8) $13^{3x}=2^{1-x}$ 10) $9^{2x-7}=11^{3x+1}$

Ecuaciones exponenciales de 2do grado.

Ejemplo 17: Aplicando propiedades de exponentes y logaritmos resolvemos las siguientes ecuaciones:

1. $49^x-7*7^x+12=0$

Solución

$(7^2)^x-7*7^x+12=0$	Convertimos a base 7
$(7^x)^2-7*(7^x)+12=0$	Volvemos ec. 2do grado
$(7^x-4)(7^x-3)=0$	Factorizamos.
$7^x-4=0\ ;\ 7^x-3=0$	Igualamos a Cero.
$7^x=4\ \ ;\ \ 7^x=3$	Despejamos “x”.
$x=\frac{\log 4}{\log 7}\ ;\ x=\frac{\log 3}{\log 7}$	Aplicamos Logaritmos

2 $4^x-5*2^x+4=0$

Solución

$$(2^2)^x-5*2^x+4=0$$

$$(2^x)^2-5*(2^x)+4=0$$

$$(2^x-4)(2^x-1)=0$$

$$2^x-4=0\ ;\ 2^x-1=0$$

$$2^x=4\ \ ;\ \ 2^x=1$$

$$x=2\ \ ;\ \ x=0$$

Actividad 37: En nuestro cuaderno de prácticas, resolvemos las siguientes ecuaciones.

1) $25^x - 30 * 5^x + 125 = 0$
2) $9^x - 14 * 3^x + 45 = 0$
3) $49^x - 8 * 7^x + 7 = 0$
4) $4^x + 6 * 2^x - 16 = 0$
5) $4^x - 5 * 2^x - 24 = 0$
6) $9^x + 25 * 3^x - 54 = 0$
7) $25^x - 7 * 5^x + 10 = 0$
8) $121^x - 10 * 11^x - 11 = 0$
9) $9^x - 30 * 3^x + 81 = 0$

8. Sistemas de Ecuaciones Logarítmicos y Exponenciales

Los sistemas de ecuaciones de este tipo, pueden estar formadas por una ecuación exponencial, una ecuación logarítmica o ambas en un mismo sistema. Para su resolución utilizaremos los métodos ya estudiados:

Método de sustitución, se despeja una incógnita y se reemplaza en la otra ecuación.

Método de igualación, se despeja la misma incógnita y se igualan sus equivalentes.

Método de reducción, se busca eliminar una incógnita previa multiplicación adecuada.

Método de determinantes, se aplica las fórmulas de los determinantes de las matrices

Ejemplo 18: Resolvamos los sistemas de ecuaciones aplicando propiedades de logarítmos y exponentes.

1. $\begin{cases} \ln 2 + \ln x = \ln(5 - y) \\ \dfrac{a^x}{a^{3y}} = \dfrac{1}{a} \end{cases}$

Solución

$\begin{cases} \ln 2x = \ln(5 - y) \\ a^{x-3y} = a^{-1} \end{cases}$ Suma de logaritmos. / Cociente de la misma base

$\begin{cases} 2x = 5 - y \\ x - 3y = -1 \end{cases}$ Eliminamos logaritmos / Aplicamos bases Iguales

Resolviendo el sistema por cualquier método tenemos: $x = 2; y = 1$

$\begin{cases} \dfrac{3^x}{81^y} = 1 \\ \log_4 x + \log_4 y = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} 3^{x-4y} = 3^0 \\ \log_4 xy = 1 \end{cases}$

$\begin{cases} x - 4y = 0 \\ xy = 4 \end{cases}$ Aplicamos bases iguales / Definición de logaritmos

Resolviendo el sistema por cualquier método tenemos: $x_1 = 4; y_1 = 1$ $\quad x_2 = -4; y_2 = -1$

Ejemplo 19: Resolvemos los sitemas de ecuaciones aplicando propiedades de logarítmos y exponentes.

1. $\begin{cases} 3\log_x 8 - 2\log_y 49 = 5 \\ 2\ \log_x 8 + 5\log_y 49 = 16 \end{cases}$

Solución: Usamos Reducción

$\begin{cases} 3\log_x 8 - 2\log_y 49 = 5 & (5) \\ 2\ \log_x 8 + 5\log_y 49 = 16 & (2) \end{cases}$

$\begin{cases} 15\log_x 8 - \cancel{10\log_y 49} = 25 \\ 4\log_x 8 + \cancel{10\log_y 49} = 32 \end{cases}$

$19\log_x 8 \qquad = 57$

$\log_x 8 = 3$

Reemplazamos $\log_x 8 = 3$ *en la 1ra ecuación*

$3(3) - 2\log_y 49 = 5$

$-2\log_y 49 = -4$

$\log_y 49 = 2$

Usando propiedad de logaritmos despejamos “x” e “y”

$\log_x 8 = 3 \qquad \log_y 49 = 2$

$2^3 = x^3 \qquad 7^2 = y^2$

$2 = x \qquad 7 = y$

Ejemplo 20: Resolvemos los sistemas de ecuaciones aplicando propiedades de logarítmos y exponentes.

1. $\begin{cases} 5 * 2^x - 3 * 3^y = 13 \\ 7 * 2^x - 6 * 3^y = 2 \end{cases}$

SOLUCIÓN: Usamos Reducción

$\begin{cases} 5 * 2^x - 3 * 3^y = 13 & \text{(-2)} \\ 7 * 2^x - 6 * 3^y = 2 \end{cases}$

$\begin{cases} -10 * 2^x + \cancel{6 * 3^y} = -26 \\ 7 * 2^x - \cancel{6 * 3^y} = 2 \end{cases}$

$-3 * 2^x \quad = -24$

$2^x = 8$

Reemplazamos $2^x = 8$ *, en la 2da ec.*

$7 * (8) - 6 * 3^y = 2$

$-6 * 3^y = -54$

$3^y = 9$

Usando propiedad de exponentes despejamos “x” e “y”

$2^x = 8 \qquad 3^y = 9$

$2^x = 2^3 \qquad 3^y = 3^2$

$x = 3 \qquad y = 2$

Actividad 38: Apoyándonos en los ejercicios resueltos resolvamos las siguientes ecuaciones

1. $\begin{cases} -2+\log_5(x^2+y^2)=0 \\ 2^x * 2^y - 128 = 0 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3\log_{\sqrt{3}} x + 4\log_{0,25} y = 2 \\ 5\log_{\sqrt{3}} x + \log_{0,25} y = 11 \end{cases}$

3) $\begin{cases} \frac{5^x}{125} - \frac{1}{5^y} = 0 \\ \log_{\sqrt{3x+5-y^2}} x + \log_{\sqrt{3x+5-y^2}}(x+3) = 2 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 3 * 5^x + 2^y = 407 \\ 5^x - 2 * 2^y = 61 \end{cases}$

9. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

Como habíamos mencionado en el momento de la teoria, las funciones logarítmicas y exponenciales, han empezado a tener bastante aplicación en el desarrollo tecnológico.

- En psicología La Ley de Fencher, $S = K + C\ln E$, nos habla de la medición de los estímulos y las sensaciones
- La datación de Fósiles utilizando $t = \frac{T_N}{-\ln 2} * \ln\left(\frac{N_f}{N_0}\right)$.
- La determinación de la magnitud de un terremoto en la escala de Ritcher, $\log E = 11,8 + 1,5 * M$.
- La medición del pH de las soluciones, $pH = -\log[H3O^+]$ el cual nos permite calcular la acidez o alcalinidad de algunos productos domésticos.
- En la estadística, específicamente en el crecimiento demográfico, $P_t = P_0 (1+r)^t$.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 39 :
Los logaritmos y exponentes se aplican para el estudio de diferentes fenómenos como ser el crecimiento poblacional, el cálculo de distancias entre planetas y otros, como lo analizamos anteriormente.

Ahora respondamos reflexivamente las siguientes preguntas:

- ¿Qué fenómenos naturales pueden estudiarse a través de logaritmos y exponentes?
- ¿Aplicas funciones exponenciales y logarítmicas en tu contexto?
- ¿Si tuviéramos que utilizar funciones logarítmicas podrías realizarlo? detalla 5 ejemplos.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 40:

1. Plantea una situación problematica del contexto que se pueda resolver utilizando logaritmos.
2. Investiguemos y escribamos dos aplicaciones de las ecuaciones exponenciales, exponentes y logaritmos.
3. En grupos de 3 a 4 personas, analizamos los trabajos de investigación de cada compañero y escogemos uno para exponerlo al curso, utilizando diapositivas o cuadros didácticos.

SUCESIONES, PROGRESIONES
ARITMÉTICAS Y GEOMÉTRICAS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Analizamos la siguiente situación problematica:

1. Un científico realiza una combinación de sustancias, en un vaso de precipitados, mientras pasa el tiempo observa que esta sustancia dobla su volumen cada minuto. Si el vaso de precipitados está lleno después de una hora, ¿Qué tiempo el vaso se encuentra a la mitad?

Escribe la respuesta en tu cuaderno.

Johann Carl Friedrich Gauss

Fue un matemático, astrónomo y físico alemán que contribuyó significativamente en muchos ámbitos, incluida la teoría de números, el análisis matemático, la geometría diferencial, la estadística, el álgebra, la geodesia, el magnetismo y la óptica.

2. Investiguemos el motivo, del porqué no se pudo pagar el premio al creador del ajedrez y escribamos una opinión sobre la investigación realizada.

En ambas situaciones se aplica progresiones, lo cual tiene una anécdota muy interesante con el matemático Gauss, además con el ajedrez, el cuál lo investigaremos.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Sucesión de Fibonacci

En matemática, la sucesión de Fibonacci (mal llamada la serie de Fibonacci), es un conjunto de números, que a partir de la base 0 y 1, van formándose otro sumando las dos últimas cantidades.

Sucesión de Fibonacci 0;1;1;2;3;5;8;13;21;34;55;89;144;233…

Esta sucesión es estudiada debido a la gran aplicación que tiene en diferentes áreas de conocimiento.

2. Sucesiones numéricas

Sucesión.- Es un conjunto de números, cuyos elementos están enumerados ordinalmente (primero, segundo, tercero, etc.) indicando así la posición que ocupan, y cuyo valor es construido por una función generatriz, que en este texto será definido como U_n, donde "n ∈ N", será la variable que nos permita determinar el valor del elemento en esa posición. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1: Determinamos la sucesión de números bajo la generatriz $\boldsymbol{U_n} = 2 * \boldsymbol{n} - 1$
Por lo tanto, la sucesión obtenida es el conjunto de los números Impares **{1,3,5,7,9,11,13,15,17,…}**

$U_1 = 2(1) - 1$	$U_2 = 2(2) - 1$	$U_3 = 2(3) - 1$	$U_4 = 2(4) - 1$	$U_5 = 2(5) - 1$	$U_5 = 2(6) - 1$	$U_5 = 2(7) - 1$
$2 - 1 = \mathbf{1}$	$4 - 1 = \mathbf{3}$	$6 - 1 = \mathbf{5}$	$8 - 1 = \mathbf{7}$	$10 - 1 = \mathbf{9}$	$12 - 1 = \mathbf{11}$	$14 - 1 = \mathbf{13}$

Ejemplo 2: Determinamos la sucesión de números bajo la generatriz .

Por lo tanto, la sucesión obtenida es {1/2;2/3;3/4;4/5;5/6;6/7;7/8;8/9;9/10;…} $\boldsymbol{U_n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}}$

$U_1 = \frac{(1)}{(1)+1}$	$U_2 = \frac{(2)}{(2)+1}$	$U_3 = \frac{(3)}{(3)+1}$	$U_4 = \frac{(4)}{(4)+1}$	$U_5 = \frac{(5)}{(5)+1}$	$U_6 = \frac{(6)}{(6)+1}$	$U_7 = \frac{(7)}{(7)+1}$
$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$	$\frac{2}{2+1} = \frac{2}{3}$	$\frac{3}{3+1} = \frac{3}{4}$	$\frac{4}{4+1} = \frac{4}{5}$	$\frac{5}{5+1} = \frac{5}{6}$	$\frac{6}{5+1} = \frac{6}{7}$	$\frac{7}{7+1} = \frac{7}{8}$

Ejemplo 3: Determinamos la sucesión de números bajo la generatriz. $\boldsymbol{U_n} = \boldsymbol{n} - \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{n}}$

Por lo tanto, la sucesión obtenida es {0;3/2;8/3;15/4;24/5;35/6;48/7;63/8;80/9;99/10;…}

$U_1 = (1) - \frac{1}{(1)}$	$U_2 = (2) - \frac{1}{(2)}$	$U_3 = (3) - \frac{1}{(3)}$	$U_4 = (4) - \frac{1}{(4)}$	$U_5 = (5) - \frac{1}{(5)}$	$U_6 = (6) - \frac{1}{(6)}$	$U_7 = (7) - \frac{1}{(7)}$
$1 - \frac{1}{1} = \frac{0}{1}$	$2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$	$3 - \frac{1}{3} = \frac{8}{3}$	$4 - \frac{1}{4} = \frac{15}{4}$	$5 - \frac{1}{5} = \frac{24}{5}$	$6 - \frac{1}{6} = \frac{35}{6}$	$7 - \frac{1}{7} = \frac{48}{7}$

Actividad 41 : Generamos 5 elementos de cada generatriz mostrada, empezando en n=1

1) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\mathbf{2*n-1}}{\boldsymbol{n}}$ 2) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n+1}}$ 3) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\boldsymbol{n^2}}{\boldsymbol{n+3}}$ 4) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{n+1}} + \mathbf{1}$ 5) $\boldsymbol{U_n} = \frac{\mathbf{3}\boldsymbol{n-1}}{\boldsymbol{n^2}}$

3. Sumatorias y sus propiedades

Desde el punto de vista de la matemática, la sumatoria, se emplea para representar a la suma de varios o infinitos elementos de un conjunto de números. Esta operación se representa por la letra griega Sigma (Mayúscula) "Σ", la cual iremos detallando a continuación:

$$\sum_{i=1}^{n} X_i = X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + \cdots + X_n$$

$\boldsymbol{X_i}$: son los elementos del conjunto

$\boldsymbol{i = 1}$: el inicio de los elementos a tomar en cuenta.

$\boldsymbol{n}$: el número de elementos a tomar en cuenta

Propiedades de la sumatoria

La suma del producto de una constante por una variable, es igual a k veces la sumatoria de la variable.

$$\sum_{i=1}^{n} k * X_i = \sum_{i=1}^{n} k * X_i$$

La sumatoria hasta "n" de una constante, es igual a "n" veces la constante.

$$\sum_{i=1}^{n} k = n * k$$

La sumatoria de una suma es igual a la suma de las sumatorias de cada término.

$$\sum_{i=1}^{n} (X_i + Y_i) = \sum_{i=1}^{n} X_i + \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

La sumatoria de un producto no es igual al producto de las sumatorias de cada término.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i * Y_i \neq \sum_{i=1}^{n} X_i * \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

La sumatoria de los cuadrados de los valores de una variable no es igual a la sumatoria de la variable elevado al cuadrado.

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{\,2} \neq \left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2$$

4. Progresiones Aritméticas (P. A.)

Una progresión aritmética (P. A.) es un conjunto de números, que a partir del primer término (U_1), los siguientes se obtienen sumando una cantidad constante llamada razón (r), al anterior término. Según la bibliografía que se estudie, la nomenclatura de los elementos de la P. A. puede cambiar, en nuestro caso utilizaremos los siguientes:

Sea la P. A. $\{U_1; U_2; U_3; U_4; U_5; U_6; \ldots; U_{n-1}; U_n\}$

$\boldsymbol{U_1}$: Primer término de la P.A.

$\boldsymbol{U_n}$: Último término de la P.A.(o Término Enésimo)

r : Razón de la P.A. (Suma o resta)

n :Número de términos de la P.A.

FÓRMULA DEL TÉRMINO ENÉSIMO $(\boldsymbol{U_n})$

Sea:

$\boldsymbol{U_1 = U_1}$

$\boldsymbol{U_2 = U_1 + r}$

$\boldsymbol{U_3 = U_2 + r = U_1 + 2 * r}$

$\boldsymbol{U_4 = U_3 + r = U_1 + 3 * r}$

$\boldsymbol{U_5 = U_4 + r = U_1 + 4 * r}$

$\boldsymbol{U_6 = U_5 + r = U_1 + 5 * r}$

$$\boldsymbol{r = U_2 - U_1 = U_5 - U_4 = U_6 - U_5 = U_{11} - U_{10}}$$

Nota. En una P. A. la razón se obtiene restando dos términos consecutivos, el término posterior menos el término anterior. Es decir:

$\boldsymbol{U_1} = 2$; $\boldsymbol{U_n} = 23$; $\boldsymbol{n} = 8$; $\boldsymbol{r} = 5 - 2 = 20 - 17 = \boldsymbol{3}$

Ejemplo 4: Determinamos los elementos de la P. A.: 2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23.

$\boldsymbol{U_1} = 37$; $\boldsymbol{U_n} = -12$; $\boldsymbol{n} = 7$; $\boldsymbol{r} = 30 - 23 = -5 - 2 = \boldsymbol{-7}$

Ejemplo 5: Determinamos los elementos de la P. A.: 30;23;16; 9;2;-5;-12

Ejemplo 6: Determinamos los elementos de la P. A.: $2; \frac{7}{6}; \frac{1}{3}; -\frac{1}{2}; -\frac{4}{3}; -\frac{13}{6}$

$\boldsymbol{U_1} = 2$; $\boldsymbol{U_n} = -\frac{13}{6}$; $\boldsymbol{n} = 6$; $\boldsymbol{r} = \frac{7}{6} - 2 = -\frac{4}{3} + \frac{1}{2} = -\frac{5}{6}$

FÓRMULA DEL PRIMER TÉRMINO $(\boldsymbol{U_1})$

$$\boldsymbol{U_1 = U_n - (n-1) * r}$$

FÓRMULA DE LA RAZÓN $(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{r = \frac{U_n - U_1}{n-1}}$$

FÓRMULA DEL NÚMERO DE TÉRMINOS $(\boldsymbol{n})$

$$\boldsymbol{n = \frac{U_n - U_1}{r} + 1}$$

Actividad 42: Resolvemos los siguientes ejercicios.

1). *Sea la P. A.:* $\boldsymbol{-15; -11; -7; -3; 1; 5; 9; 13; 17; 21; 25}$ Determinamos $\boldsymbol{U_1} =$; $\boldsymbol{U_n} =$; $\boldsymbol{n} =$; $\boldsymbol{r} =$

2) *Sea la P. A.:* $\boldsymbol{91; 80; 79; 68; 57; 46; 35; 24; 13}$ Determinamos $\boldsymbol{U_1} =$; $\boldsymbol{U_n} =$; $\boldsymbol{n} =$; $\boldsymbol{r} =$

3) *Sea la P. A.:* $\boldsymbol{5; \frac{13}{3}; \frac{11}{3}; 3; \frac{7}{3}; \frac{5}{3}; 1; \frac{1}{3}; -\frac{1}{3}; -1}$ Determinamos $\boldsymbol{U_1} =$; $\boldsymbol{U_n} =$; $\boldsymbol{n} =$; $\boldsymbol{r} =$

Determinación de los elementos de una P. A. partiendo del término enésimo (U_n)

Determinar unos cuantos elementos de una P. A. es sencillo, ya que solo debemos sumar o restar la razón y así generar los siguientes números, pero resulta moroso e incluso inexacto si los elementos a calcular fueran demasiados, es en ese sentido, la fórmula del último término (o término enésimo) $U_n = U_1 + (n - 1) * r$, nos simplifica determinar dichos valores, aunque a veces tengamos que despejar incógnitas. Veamos.

Ejemplo 7: Calculamos el trigésimo quinto término de la P. A. $1;\ 7;\ 13;\ 19$

Determinamos los datos.	Utilizamos
$U_1 = 1$	$U_n = U_1 + (n-1) * r$
$U_n = \ ?$	$U_n = (1) + (35-1) * (6)$
$n = 35$	$U_n = 1 + 34 * 6$
$r = 13 - 7 = 6$	$U_n = 1 + 204$
	$U_n = 205$

Ejemplo 8: En una **P. A.** de 49 términos, el primer término es -24, la razón $\frac{7}{4}$. Calculamos el último término

Determinamos los datos.	Utilizamos $U_n = U_1 + (n-1) * r$
$U_1 = -24$	$U_n = (-24) + (49-1) * \left(\frac{7}{4}\right)$
$U_n = \ ?$	$U_n = -24 + 48 * \frac{7}{4}$
$n = 49$	$U_n = -24 + 84$
$r = \frac{7}{4}$	$U_n = 60$

Ejemplo 9: Una **P. A.** tiene 85 términos, si los últimos términos son $-\frac{11}{2};\ -\frac{25}{4};\ -7$. Calculamos el primer término.

Determinamos los datos.	**Utilizamos**
$U_1 = \ ?$	$U_1 = U_n - (n-1) * r$
$U_n = -7$	$U_n = (-7) - (85-1) * \left(-\frac{3}{4}\right)$
$n = 85$	$U_n = -24 + 84 * \frac{3}{4}$
$r = -7 + \frac{25}{4}$	$U_n = -24 + 63 = 39$
$r = -\frac{3}{4}$	

Ejemplo 10: El primer término de una **P. A.** de 89 términos, es /33, y el último"550"Calculamos la razón.

Determinamos los datos.	Utilizamos
U1= -11	"r=Un-U1n-1
Un=33	r=(33)-(-11)67-1
n=67"'	r=33+1166=4466
r="A	?45"

Ejemplo 11: Determinamos la cantidad de términos que tiene la **P. A.** donde el primer término es 8;, el último es "/85"y la razón es"/339

Determinamos los datos.	Utilizamos
$U_1 = 69$	$n = \frac{U_n - U_1}{r} + 1$
$U_n = -63$	$n = \frac{(-63)-(69)}{-\frac{11}{7}} + 1 = \frac{-63-69}{-\frac{11}{7}} + 1$
$n = \ ?$	$n = \frac{\frac{-132}{1}}{-\frac{11}{7}} + 1 = 84 + 1 = 85$
$r = -\frac{11}{7}$	

Ejemplo 12: Calculamos la razón y el primer término de la progresión aritmética si $U_8 = -3$ y $U_{14} = -1$

Determinamos los datos.	Utilizamos: $U_n = U_1 + (n-1)r$
$U_1 = \ ?$	$U_8 = U_1 + 7 * r = -3$
$U_8 = -3$	$U_{14} = U_1 + 13 * r = -1$
$U_{15} = -1$	*Resolviendo el sistema obtenido por algún método, tenemos:*
$n = 15$	
$r = \ ?$	$U_1 = \frac{16}{3}$ y $r = \frac{1}{3}$

Actividad 43: En el cuaderno determinamos los elementos indicados en cada uno los incisos:

1) Determinar el nonagésimo séptimo término de la P. A.: 5,9,13,...

2) En una P. A. $U_1 = \frac{37}{6}$ y $r = \frac{37}{6}$. Calcular U_{19}

3) Los últimos términos de una P. A. de 39 elementos es: -334,-347,-360. Cuál es el valor del primer término.

4) El último valor de una P. A. de 61 términos es $\frac{65}{9}$, si la razón es $\frac{2}{3}$ calcular el valor del primer término.

5) La P. A. tiene los siguientes datos: $U_1 = 24$ y $U_{16} = 15$. Calcular la razón

6) El último y el primer número de una P. A. de 87 términos son -1037 y 425 respectivamente. Determine la razón.

7) Determine la cantidad de términos que hay en la P. A. 169,...,-34,-41.

8) En la P. A. de razón 3/4, primer término 2 y último término 20. Determinar cuántos términos la componen.

9).Determinamos la razón y el primer término, si el noveno termino es 4 y el décimo segundo es -1

10). Calculamos el vigésimo octavo término de la P. A. que tiene $U_5 = 27$ y $U_{10} = 7$

SUMA DE TÉRMINOS DE UNA P. A. (S_n)

$$S_n = \frac{(U_1 + U_n) * n}{2}$$

La demostración está dada por deducción, y explicada en la anécdota del pequeño Gauss, en su clase de matemática, situación que lo hizo merecedor de la protección del rey.

Suma de términos de una progresión aritmética (S_n).

Partiendo de la anécdota de Gauss niño, sobre la suma de los 100 primeros números naturales, comprendemos muy bien que, la suma del último número con el primero, es igual a la suma del penúltimo con el segundo, igual a la suma del antepenúltimo con el tercero y así sucesivamente. Veamos

$$1 + 2 + 3 + 4 + \cdots + 97 + 98 + 99 + 100$$

En la suma:
Observamos que: 1+100=101 ; 2+99=101 ; 3+98=101

El mismo número se obtiene 50 veces, por lo tanto, la suma es 50*101=5050, respuesta que dio el pequeño Gauss, el cual fue considerado como el primcipe de las matematcas.

Ejemplo 13: El primer término de una P. A. de 71 términos, es 25, el último 235. Determinar la suma de todos los elementos de dicha progresión.
Determinamos los datos.

$U_1 = 25; U_n = 235; n = 71; S_n = ?$

Utilizamos $S_n = \frac{(U_1+U_n)*n}{2}$

$$S_n = \frac{[(25)+(235)]*(71)}{2}$$

$$S_n = \frac{[260]*(71)}{2}$$

$$s_n = 130 * 71 = 9230$$

Ejemplo 13: Sumar los 247 primeros términos de la P. A. 5401; 5378; 5355,...

Determinamos los datos.

$U_1 = 5401; U_n = ?; n = 247; r = 5378 - 5401 = -23$

Utilizamos $U_n = U_1 + (n-1) * r$

$$U_n = (5401) + (246 - 1) * (-23)$$

$$U_n = 5401 - 245 * 23$$

$$U_n = 5401 - 5635 = -243$$

Utilizamos $S_n = \frac{(U_1+U_n)*n}{2}$

$$S_n = \frac{[(5401) + (-243)] * (247)}{2}$$

$$S_n = \frac{[5158] * (247)}{2}$$

$$s_n = 2579 * 247$$

$$s_n = 637013$$

Actividad 44: En el cuaderno de prácticas calculamos las sumas indicadas:

1) Sumar los primeros 75 términos de la P. A. 241,230,219,...
2) Sumar los términos de la P. A. que empieza en 13/10 y termina en 153/10 a una razón de 2/5
3) Don Alberto decide abrir una cuenta de ahorro en el banco, donde desea depositar las ganancias del mes, en enero abona Bs 3000, en febrero Bs 3500, en marzo Bs 4000 y así sucesivamente hasta diciembre ¿Cuánto dinero tendrá el 31 de diciembre en su cuenta de ahorro?

Aplicación de las progresiones aritméticas

Las progresiones aritméticas, por su enfoque y características, dan paso a utilizarlo en diferentes actividades que se dan en la vida real, como lo podemos ver en el último ejercicio de práctica, es así que es muy útil en otras áreas, veamos.

Ejemplo 15: Don José, desea comprarse una moto que cuesta Bs 7500, pero solo tiene Bs 2450, así que decide ahorrar Bs 135 de su sueldo cada mes. ¿Cuántos meses deberá ahorrar para comprarse la moto?

Solución. Antes de proceder al cálculo debemos comprender que los ahorros solo deben completar el saldo. Por lo tanto,

Un=7500-2450=5050

Datos: Un=5050; U1=135 r=135; n=?

$$n = \frac{5050 - 135}{135} + 1 = 36.41 + 1 = 37{,}41$$

Rta.- Exactamente necesita 37,41 meses, pero como los sueldos se pagan a fin de mes, se debe concluir que necesita 38 meses para comprarse la moto.

Ejemplo 15: La profesora Telma, en el mes de enero, apertura una cuenta de ahorro en el Banco Unión con Bs 175, y en los meses posteriores, decide ahorrar Bs 17 más que en el mes anterior ¿Cuál será el monto de dinero que depositará en el mes de diciembre? ¿Cuánto de dinero tendrá ahorrado en el año?

Solución. Determinamos el monto que depositará en diciembre.
Datos: $U_n = ?$; $U_1 = 175$; $r = 17$; $n = 12$

$$U_n = 175 + (12 - 1) * 17 = 362$$

Rta.- En el mes de diciembre depositará Bs 362.

Determinamos el monto acumulado hasta diciembre.

Rta.- En el año la profesora lograra ahorrar Bs 2982.

$$\boldsymbol{S_n = \frac{(135+362)*12}{2} = 2982}$$

Ejemplo 16: Un joven desea mejorar su aspecto físico, así que decide consultar con su instructor de gimnasio, sobre una rutina. El instructor le indica que después de levantarse debe realizar 10 flexiones, 20 sentadillas y 15 abdominales, repetir eso dos veces seguidas, eso durante 3 días, luego debe aumentar 1 flexión, 1 sentadilla y 1 abdominal por otros tres días, luego aumentar 1 flexión, 1 sentadilla y 1 abdominal por otros tres días y así sucesivamente. ¿Al final del mes, cuantas flexiones, sentadillas y abdominales ya realizara, los últimos tres días del mes? ¿Durante el mes cuantas sentadillas, abdominales y flexiones realizó?

Solución: analizamos la cantidad de ejercicios.

	1er día	2do día	3er día	Total	4to día	5to día	6to día	Total
Flexiones	20	20	20	60	22	22	22	66
Sentadillas	40	40	40	120	42	42	42	126
Abdominales	30	30	30	90	32	32	32	96

Determinamos cuantas flexiones, sentadillas y abdominales hace en los últimos días del mes.

Sentadillas : $\boldsymbol{U_n = 120 + (10-1)*6 = 174}$ (en los últimos 3 días del mes)
Abdominales : $\boldsymbol{U_n = 90 + (10-1)*60 = 144}$ (en los últimos 3 días del mes)
Determinamos el total de flexiones, sentadillas y abdominales que realizó en el mes.

Flexiones : $\boldsymbol{S_n = \frac{(60+114)*10}{2} = 870}$ (en el mes)

Sentadillas : $\boldsymbol{S_n = \frac{(120+174)*10}{2} = 1470}$ (en el mes)

Abdominales : $\boldsymbol{S_n = \frac{(90+144)*10}{2} = 1170}$ (en el mes)

5. Progresiones Geométricas (P. G.)

Una progresión Geométrica (P. G.), es un conjunto de números que se generan a partir de un primer elemento (U_1) (diferente de cero), al cual se debe ir multiplicando una cantidad constante llamada razón (r- diferente de cero). La simbología que utilizaremos será la misma que para progresiones aritméticas, para evitar confusiones, ya que el orden y las posiciones son las mismas, solo se diferencian en las operaciones

FÓRMULA DEL TÉRMINO ENÉSIMO $(\boldsymbol{U_n})$

Sea:

$\boldsymbol{U_1 = U_1}$

$\boldsymbol{U_2 = U_1 * r}$

$\boldsymbol{U_3 = U_2 * r = U_1 * r^2}$

$\boldsymbol{U_4 = U_3 * r = U_1 * r^3}$

$\boldsymbol{U_5 = U_4 * r = U_1 * r^4}$

$\boldsymbol{U_6 = U_5 * r = U_1 * r^5}$

....

$\boldsymbol{U_n = U_1 * r^{n-1}}$

Sea la P. G. $\{U_1; U_2; U_3; U_4; U_5; U_6; \dots; U_{n-1}; U_n\}$

$\boldsymbol{U_1}$: *Primer término de la* $\boldsymbol{P.G.}$

$\boldsymbol{U_n}$: *Último término de la* $\boldsymbol{P.G.}$ (***o Término Enésimo***)

$\boldsymbol{r}$: *Razón de la* $\boldsymbol{P.G.}$ (Ahora multiplica o divide)

$\boldsymbol{n}$: *Número de términos de la* $\boldsymbol{P.G.}$

Nota. - En una P. G. la razón se obtiene dividiendo dos términos consecutivos, el término posterior dividido por el anterior. Es decir: $: \boldsymbol{r} = \frac{U_2}{U_1} = \frac{U_5}{U_4} = \frac{U_6}{U_5} = \frac{U_{11}}{U_{10}}$

Ejemplo 17: anote los elementos de la P. G.: 5; 10; 20; 40; 80; 160; 320

$$\boldsymbol{U_1} = 5 \quad ; \boldsymbol{U_n} = 320 \quad ; \boldsymbol{n} = 7 \quad ; \boldsymbol{r} = \frac{10}{5} = \frac{160}{80} = \boldsymbol{2}$$

Ejemplo 18: anote los elementos de la P. G.: -8/27;4/9;-2/3; 1;-3/2;9/4;-27/8;81/16

$$\boldsymbol{U_1 = -\frac{8}{27} \quad ; U_n = \frac{81}{16} \quad ; n = 8 \quad ; r = \frac{-\frac{2}{3}}{\frac{4}{9}} = -\frac{\frac{9}{4}}{-\frac{3}{2}} = -\frac{3}{2}}$$

FÓRMULA DEL PRIMER TÉRMINO $(\boldsymbol{U_1})$

$$\boldsymbol{U_1 = \frac{U_n}{r^{n-1}}}$$

FÓRMULA DE LA RAZÓN $(\boldsymbol{r})$

$$\boldsymbol{r = \sqrt[n-1]{\frac{U_n}{U_1}}}$$

FÓRMULA DEL NÚMERO DE TÉRMINOS $(\boldsymbol{n})$

$$\boldsymbol{n = \frac{\log\left(\frac{U_n}{U_1}\right)}{\log r} + 1}$$

Actividad 45: Determinamos los elementos de las progresiones:

1)*Sea la P. G.:* $-\frac{1}{4}; \frac{1}{2};\ -1;\ 2;\ -4;\ 8;\ -16;\ 32;\ -64;128;\ -256$

$U_1 =\qquad ;U_n =\qquad ;\ n =\qquad ;\ r =$

2) *Sea la P. G.:* $486;\ 162;\ 54;\ 18;\ 6;\ 2;\frac{2}{3}$

$U_1 =\qquad ;U_n =\qquad ;\ n =\qquad ;\ r =$

3)*Sea la P. G.:* $-\frac{5}{4802}; -\frac{5}{686}; -\frac{5}{98}; -\frac{5}{14}; -\frac{5}{2}; -\frac{35}{2}; -\frac{245}{2}; -\frac{1715}{2}$

$U_1 =\qquad ;U_n =\qquad ;\ n =\qquad ;\ r =$

Determinación de los elementos de una P. G. a partir del término enésimo (U_n)

Determinar unos cuantos elementos de una P. G. es sencillo, ya que solo debemos multiplicar o dividir la razón y así generar los siguientes números, pero resulta cansador calcular los elementos, debido a que sus valores son demasiado grandes, es en ese sentido, la fórmula del último término $U_n = U_1 * r^{n-1}$, nos simplificará determinar dichos valores, aunque a veces tengamos que despejar las variables. Veamos.

Ejemplo 19: Calcular el décimo segundo término de la **P. G.** $1;\ 2;\ 4;\ 8$

Determinamos los datos.

$U_1 = 1$

$U_n = ?$

$n = 12$

$r = \frac{2}{1} = \frac{8}{4} = 2$

Utilizamos

$U_n = U_1 * r^{n-1}$

$U_n = (1) * (2)^{12-1}$

$U_n = 1 * 2^{11}$

$U_n = 2048$

Ejemplo 20: En una **P. G.** de 13 términos, el primer término es $\frac{567}{320}$, la razón $-\frac{2}{3}$. Calcule el último término

Determinamos los datos.

$U_1 = \frac{567}{320}$

$U_n = ?$

$n = 13$

$r = -\frac{2}{3}$

Utilizamos $U_n = U_1 * r^{n-1}$

$U_n = \left(\frac{567}{320}\right) * \left(-\frac{2}{3}\right)^{13-1}$

$U_n = \frac{3^4 * 7}{5 * 2^6} * \frac{2^{12}}{3^{12}}$

$U_n = \frac{7 * 2^6}{5 * 3^8} = \frac{448}{32805}$

Ejemplo 21: Una **P. G.** tiene 8 términos, si los últimos términos son $-\frac{7}{125}; \frac{14}{625}; -\frac{28}{3125}$. Calcule U_1.

Determinamos los datos.

$U_1 = -\frac{3}{512}$

$U_n = -96$

$n = 15$

$r = ?$

Utilizamos $U_1 = \frac{U_n}{r^{n-1}}$

$U_1 = \frac{\left(-\frac{28}{3125}\right)}{\left(-\frac{2}{5}\right)^{8-1}}$

$U_1 = \frac{-\frac{7*2^2}{5^5}}{-\frac{2^7}{5^7}} = \frac{-\frac{7*2^2}{5^5}}{-\frac{2^7}{5^7}} = \frac{175}{32}$

Ejemplo 22: El 1.er término de una **P. G.** de 15 términos, es $-\frac{3}{512}$, y el último término es -96. Calcule "r".

Determinamos los datos.

$U_1 = -\frac{3}{512}$

$U_n = -96$

$n = 15$

$r = ?$

Utilizamos $r = \sqrt[n-1]{\frac{U_n}{U_1}}$

$r = \sqrt[15-1]{\frac{-96}{-\frac{3}{512}}} = \sqrt[14]{\frac{\frac{3 * 2^5}{1}}{\frac{3}{2^9}}}$

$r = \sqrt[14]{2^{14}} = 2$

Ejemplo 23: Determine la cantidad de términos que tiene la **P. G.** donde el primer término es $\frac{2}{729}$, el último es 486 y la razón es **3**

Determinamos los datos.

$U_1 = \frac{2}{729}$

$U_n = 486$

$n = ?$

$r = 3$

Utilizamos $n = \frac{\log\left(\frac{U_n}{U_1}\right)}{\log r} + 1$

$n = \frac{\log\left(\frac{486}{\frac{2}{729}}\right)}{\log(3)} + 1$

$n = \frac{5.248333\ldots}{0.477121\ldots} + 1$

$n = 11.000004\ldots + 1$

$U_n = 12.000004\ldots = 12$

Opción sin calculadora $U_n = U_1 * r^{n-1}$

$486 = \left(\frac{2}{729}\right) * (3)^{n-1}$

$2 * 3^5 = 2 * 3^{-6} * 3^{n-1}$

$3^5 = 3^{n-7}$

$5 = n - 7$

$12 = n$

Suma de términos de una progresión geométrica (S_n).
Partiendo de la curiosidad, sobre la imposibilidad de pago al inventor del ajedrez, podemos mencionar que los resultados son un tanto exagerados, por tal motivo muchos de los resultados tendremos que expresarlos como potencias. Observemos como se determina la suma de una P. G.

Sea la suma: $$S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{n-1} + U_n$$

Multiplicamos por (r): $$r * S_n = U_2 + U_3 + U_4 + U_5 + \cdots + U_n + r * U_n$$

Restando las dos sumas: $$S_n - r * S_n = U_1 + U_2 + U_3 + U_4 + \cdots + U_{n-1} + U_n$$
$$-U_2 - U_3 - U_4 - \cdots - U_{n-1} - U_n - r * U_n$$

Por lo tanto, $$S_n - r * S_n = S_n(1-r) = U_1 - r * U_n \quad \text{à} \quad S_n = \frac{U_1 - r * U_n}{1-r}$$

Ejemplo 25: Calculamos la suma de los primeros 9 términos que tiene la **P. G.** $\mathbf{3;\ 6;\ 12;\ 24}$

Determinamos los datos.
$U_1 = 3$
$U_n = ?$
$n = 9$
$r = \frac{24}{12} = \frac{6}{3} = 2$

Utilizamos $U_n = U_1 * r^{n-1}$
$U_n = (3) * (2)^{9-1} = 3 * 2^8 = 768$

Utilizamos $S_n = \frac{U_1 - r * U_n}{1-r}$
$$S_n = \frac{(3) - (2) * (768)}{1-(2)}$$
$$S_n = \frac{3 - 1536}{-1} = 1533$$

Ejemplo 26: Calculamos la suma de los primeros 9 términos que tiene la **P. G.** $\mathbf{3;\ 6;\ 12;\ 24}$

Determinamos los Datos.
$U_1 = -5$
$U_n = ?$
$n = 15$
$r = \frac{135}{-45} = \frac{-45}{15} = -3$

Utilizamos $U_n = U_1 * r^{n-1}$
$U_n = (-5) * (-3)^{15-1} = -5 * 3^{14}$
$U_n = -23914845$

Utilizamos $S_n = \frac{U_1 - r * U_n}{1-r}$
$$S_n = \frac{(-5) - (-3) * (-5 * 3^{14})}{1-(-3)}$$
$$S_n = \frac{-5 - 5 * 3^{15}}{1+3} = -\frac{71744540}{4}$$

Actividad 46: Determinamos los elementos que indican los incisos tomando como en cuenta los ejemplos estudiados:

1) Determinar el décimo quinto término de la P. G.: -1; 2; -4;…

2) Hallar el valor del término doce de una P. G., donde el primer elemento es -11664/3125 y la razón 5/6.

3) Los números 5/72;5/42;5/2592 son los últimos términos de la P. G. de nueve términos. Hallar el valor del primer elemento.

4) Se sabe que la P. G. tiene como octavo término a -1875, una razón de -1/5, por lo tanto, se pide determinar el valor del primer término.

5)En la P. G., U^1=7 y U^7=-5103. Calcular la razón de la progresión.

6) Si la P. G. de doce términos empieza en 5/128 y termina en –80. Cuál será la razón que formo la progresión.
7) Hallar el número de términos que tiene la P. G.: 2/243,2/81,…,54

8) Si la información de la P. G. es, U^1=-675/343 ; U^n=-49/1125 ; r=7/15 . Determine la cantidad de términos que hacen posible la progresión.

9)Sumar los seis primeros términos de la P. G.: 1,-7,49,…

10)Sumar todos los términos de la P. G., si U^1=-2 y U^8=-4374.

6. Suma en una progresión geométrica-infinita decreciente

Existen progresiones geométricas, donde cada término va decreciendo de tal forma que sus términos se aproximan a cero, analicemos el siguiente conjunto $\left\{2; 1; \frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \ldots\right\}$ en decimales, el conjunto se puede entender como:

{2;1;0.5;0.25;0.125;0.0625;…}, entonces vemos que los valores cada vez son más pequeños, a esto es lo que se llama progresión infinita decreciente.

Por lo tanto, si seguimos incrementando la cantidad de términos, nuestro último término se hace cero, por lo cual nuestra fórmula de suma cambiaria.

Ejemplo 27: Sumamos todos los términos de la **P. G.** $\mathbf{3;\ -1;\ \frac{1}{3};\ -\frac{1}{9}}$

SUMA DE TÉRMINOS DE UNA P. G. (S_n)

$$S_n = \frac{U_1 - r * U_n}{1-r}$$

En una P. G. decreciente, U_n se va haciendo cero, por lo tanto la fórmula cambia a:

$$S_n = \frac{U_1}{1-r}$$

Solución: Determinamos los datos.

$U_1 = -5$

$r = \frac{-1}{3} = -\frac{1}{3}$

Utilizamos $S_n = \frac{U_1}{1-r}$ à $S_n = \frac{3}{1-\left(-\frac{1}{3}\right)} = \frac{3}{1+\frac{1}{3}} = \frac{\frac{3}{1}}{\frac{4}{3}} = \frac{9}{4}$

7. Problemas del contexto aplicados a la ciencia y la tecnologia

Las progresiones geométricas, al igual que las progresiones aritméticas, por su enfoque y características, dan paso a utilizarlo en diferentes actividades que se dan en la vida real. Veamos algunos casos.

Ejemplo 28: la señora Guadalupe Ortiz abre una cuenta de ahorro con Bs 7000,00 en el banco FIE, el asesor le indica que los intereses se pagan por día a una razón de 1,000083 (así el interés ganará otro interés). Si la señora decide sacar su dinero cumplido un año, ¿Cuál será el monto acumulado? ¿Cuánto tiempo deberá dejarlo en el banco para ganar un interés de Bs 1000, 00?.

Solución. Calculamos U_n cumplido un año, entonces: U_1=7000 ; r=1,000083 ; n=365

$$U_n = 7000 * (1.000083)^{365-1} = 7000 * 1.000083^{364} = 7214,70$$

Rta.- Al cumplir el año de ahorro, la señora tendrá un monto de Bs 7214,70
Calculamos el tiempo "n" que deberá esperar para ganar un interés de Bs mil entonces: U_1=7000 ; r=1,000083 ; U_n=8000=7000+1000 (intereses)

$$n = \frac{\log\left(\frac{U_n}{U_1}\right)}{\log r} + 1 = \frac{\log\left(\frac{8000}{7000}\right)}{\log 1{,}000083} + 1 = \frac{0{,}05799}{0{,}000036044} + 1 = 1608.88 + 1 = 1609.88$$

Rta.- La señora Guadalupe tendrá que esperar 1610 días para ganar un interés de Bs 1000.

Ejemplo 29: el crecimiento poblacional en Bolivia se ha ido dando a una razón de 1.19 cada 10 años. Si en 1990 teníamos una población de 6.86 M (millones), ¿Qué población tuvo Bolivia el 2020?, ¿Cuál será la población de Bolivia en 2030 y 2050)?

Solución. El cálculo se lo realiza cada 10 años. Por lo tanto (1990): U_1; (2000): U_2 ; (2010): U_3; (2020): U_4
Calculamos la población el año 2020:

$$U_n = (6.86) * (1.19)^{4-1} = 6.86 * 1.19^3 = 11.56$$

Rta.- En el año 2020 Bolivia tuvo una población de 11.56 M de habitantes calculamos la población el año 2030:

$$U_n = (6.86) * (1.19)^{5-1} = 6.86 * 1.19^4 = 13.75$$

Rta.- En el año 2030 Bolivia tendrá una población de 13.75 M de habitantes
Calculamos la población el año 2050:

$$U_n = (6.86) * (1.19)^{7-1} = 6.86 * 1.19^6 = 19.48$$

Rta.- En el año 2050 Bolivia tendrá una población de 19.48 millones de habitantes.

Actividad 47: Resolvamos el problema planteado a continuación en tu cuaderno de práctica.
Un joven consigue ahorrar Bs 5000,00 después de trabajar durante un año, dicho monto decide ponerlo al banco para que no pueda gastarlo además de que vaya ganando intereses. El banco le ofrece dos tipos de pago de intereses; I) De recibir cada mes Bs 10,20. II) De recibir la multiplicación por 1.002 del monto acumulado.

	Pago de intereses FORMA I		Pago de intereses FORMA II	
MESES	INTERÉS	SALDO	INTERÉS	SALDO
Inicio ahorro	0,00	5000,00	0,00	5000,00
1	10.20	5010,20	5000,00*(1,002)	5010,00
2	10,20	5020,40	5010,00*(1,002)	5020,02
3	10,20	5030,60	5020,02*(1,002)	5030,03

Respondamos a las siguientes situaciones.

a) Siendo amigo de este joven, a primera vista ¿Que opción de pagos le recomendaríamos escoger? y ¿Por qué?

b) Analicemos el monto acumulado en las dos opciones de pago, al año, y a los dos años.

c) Será posible que podamos aconsejarle que cambie la opción de pago, ¿sí?, ¿no?, ¿por qué?.

d) Si es posible hacer el cambio de la forma de pago, ¿en qué mes exactamente debería hacerlo?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 48: Formamos equipos de 3 o 4 personas para desarrollar la reflexión de los contenidos desarrollados a través del debate en función a las siguientes preguntas:

1. ¿Por qué es importante aprender sucesiones y progresiones?

2. En la producción, ¿como aplicamos sucesiones y progresiones?

Realizamos un círculo de reflexión, para realizar un debate en función al análisis efectuado en cada grupo.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 49: Realicemos las siguientes actividades.

- Realizamos un cuadro didáctico de la sucesión de Fibonacci, analizando matemáticamente su conformación y mostramos en recortes o dibujos las aplicaciones que se pueden apreciar en el mundo real.
- Contruimos materiales didacticos con la sucecion de Fibonacci.

MATEMÁTICA FINANCIERA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Escanea el QR

Para acceder a los documentos de matemática financiera del Banco Central de Bolivia.

Actividad 50: Analicemos los siguientes casos:

1. Una madre abandona a dos de sus hijos por la falta de trabajo.
2. Un niño muere en la sala de un hospital, por el alto costo de la intervención.
3. Un padre de familia debe conseguir hasta tres trabajos para sostener a su familia.

De las oraciones expuestas ¿Cuál crees que es el motivo de estos problemas?

Estas situaciones son las que generalmente se presentan en nuestro diario vivir y como podemos analizar el problema es el dinero, por lo tanto, vamos a estudiar en este contenido como administrar adecuadamente nuestros recursos económicos.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Importancia de la Matemática Financiera

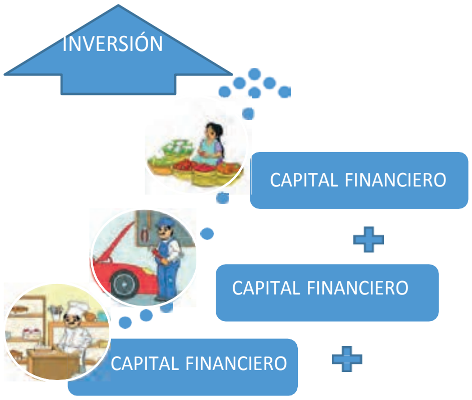
Hoy por hoy, uno de los más importantes fenómenos de análisis al crecimiento económico, administración y pérdidas que se dan del dinero. Siendo este aspecto el que se puede estudiar mediante las matemáticas financieras.

La matemática financiera, es el estudio del dinero en el tiempo, donde intervienen elementos como capital, interés, generalmente se hacen contratos de préstamos de dinero, para alguna compra o inversión con el fin de obtener ganancias económicas.

2. Valor del dinero en el tiempo

El dinero tiene un valor, el cual va cambiando mientras pasa el tiempo, un ejemplo de ello es el cambio del precio del pan, hace 30 años podías comprar 10 panes por Bs 1, pero hoy por hoy solo puedes comprar 4 panes por Bs 2, por ese motivo el estudio del dinero en el tiempo es importante. Analizar el dinero en el tiempo nos permite entender que:

- Bs 100 el día de hoy, es diferente a Bs100 del día de mañana.
- El valor del dinero permite analizar distintas oportunidades.
- Existen riesgos financieros a la hora de invertir.



3. Interés y tasa de interés

Imagina por un momento que estás en el campo y te quedas sin crédito, pero necesitas hacer una llamada urgente a tu mamá, así que le dices a tu amigo que te pase Bs 10 de crédito, pero tu amigo te dice que tendrás que devolverle 11.

¿Estarías de acuerdo con ese trato?

En la vida sucede que muchas veces cuando nos prestamos dinero, este tiende a crecer con el tiempo, es incremento viene dado por dos elementos que llamaremos a) Interés y b) Tasa de Interés, los cuales iremos conociendo más adelante.

4. Interés simple

Es el crecimiento del dinero en un tiempo determinado, donde observaremos el comportamiento de los elementos que describimos a continuación, los cuales forman parte de fórmula: M = C + r.

Capital (C). - Es el dinero al inicio, el cual será la fuente del crecimiento del interés

Monto (M). Es el total del dinero después de un tiempo, donde se suma el capital más el interés.

Tiempo (t). Es el espacio que trascurre, desde el préstamo de dinero hasta el momento de cierre o pago.

Interés (r). Es la cantidad de dinero ganado en un determinado tiempo, generalmente está basado anualmente, pero si se desea en unidades más pequeñas se debe dividir.

Tasa de Interés (i). Es el porcentaje de crecimiento del dinero.

Ahora iremos a estudiar la fórmula M = C + r, donde r = C * i * t

Por lo tanto, M = C + C * r * t = C (1 + r * t)

Ejemplo 1: Determinemos el interés y el monto que genera un capital de Bs 3000 , depositados en el banco a una tasa de interés del 5% (0.05), durante 7 años.

Calculamos el interés	Calculamos el monto	Respuesta.
$r = 3000 * 0.05 * 7 = 1050$	$M = 3000 + 1050 = 4050$	Al finalizar los 7 años, los Bs 3000. se convirtieron en Bs 4050

Ejemplo 2: Determinemos el interés y el monto que genera un capital de Bs 3000., depositados en el banco a una tasa de interés del 5% (0.05), durante 7 años.

Calculamos el interés	Calculamos el monto	Respuesta.
$r = 3000 * 0.05 * 7 = 1050$	$M = 3000 + 1050 = 4050$	Al finalizar los 7 años, los Bs 3000. se convirtieron en Bs 4050

5. Emprendimientos productivos

La matemática financiera nos permite realizar diferentes actividades, desde el préstamo para la apertura de un negocio, o la planificación de pagos de la compra de una casa. El objetivo de la matemática financiera es hacer que el dinero trabaje para obtener beneficios económicos para las personas, de tal forma que podremos mencionar aspectos en los cuales podemos aplicar las matemáticas financieras.

Efectuar pagos de préstamos a entidades financieras, de tal forma que podamos evitar intereses elevados.

Realizar depósitos de dinero, de tal forma que vaya ganando intereses (ahorro, intereses a plazo fijo, bonos, etc.).

Emprendimientos individuales de préstamo de dinero a personas de escasos recursos. ￼ Préstamos para pequeñas, medianas y grandes empresas.

¡Realicemos la valoración!

Actividad 51:

1.En grupos de 3 o 4 personas contamos alguna experiencia que se haya tenido con préstamos, e intereses, ya sea entre compañeros o quizá algún familiar.

2.Socializamos las experiencias, de tal forma que se pueda generar debate sobre aspectos positivos y negativos de los préstamos bancarios.

3.Por último, reflexionamos sobre la importancia de la matemática financiera para el beneficio de nuestros proyectos, si tuviéramos que recurrir a un banco.

¡Es hora de la producción!

Actividad 52:

1. Realizamos un cuadro didáctico donde podamos describir los elementos que se estudian en la matemática financiera, de tal forma que nos sirva como recordatorio.

2. Realizamos un sociodrama considerando la importancia de la matemática financiera en la administración correcta de nuestros recursos económicos.

LÓGICA Y EL DESARROLLO DEL PENSAMIENTO LÓGICO MATEMÁTICO

¡Iniciemos desde la práctica!

Actividad 53: Analicemos las situaciones que se plantean en la imagen y escribamos una respuesta.

En nuestra vida diaria existen situaciones donde nosotros debemos aprender a decidir o dar una respuesta o solución, aunque es cierto que cada uno de nosotros es un mundo diferente y las respuestas, como soluciones pueden ser diferentes, existen situaciones donde aunque quisiéramos no podemos negar su razón.

Subrayamos la palabra que corresponde a la oración planteada en tu cuaderno de ejercicios.

- Laura utiliza el color……………….., para pintar el cuadro de una noche estrellada.
  a) Rojo b) Negro c) Verde d) Amarillo
- José y Rodrigo agarran su………………., y van a la………………… ha jugar futbol.
  a) Bate b) Plaza c) Pelota d) Cuarto e) Raqueta f) Cancha
- Por la educación recibida en casa, cuando una mujer embarazada sube al trasporte publico, tú te…………………
  a) Haces al dormido b) Pones a chatear c) Insultas d) Levantas y cedes el asiento

Como te habrás podido dar cuenta, hay cosas que evidentemente no podemos negar o evitar, es decir se tienen que dar si o si y ese tipo de respuestas o conductas se dice que son LÓGICAS.

¡Continuemos con la TEORÍA!

Antes de iniciar con el desarrollo del contenido, es necesario conocer la definición de la palabra lógica y cuál es la relación que tiene con lo analizado en la anterior sección.

Como señala Lazo (1999, pág 1) “La Lógica, es la disciplina que trata de los métodos, modos y formas del razonamiento humano. Ofrece reglas y técnicas para determinar si un argumento es válido o no”.

Por lo tanto mediante la lógica, podemos mejorar nuestro lenguaje, comprender situaciones y planificar proyectos con resultados esperados. Es así que en este capítulo analizaremos como incide la lógica en nuestras actividades diarias, además de establecer de qué forma se conectan y representan utilizando el lenguaje matemático.

1. Proposiciones simples y compuestas

Proposición, Una proposición es una oración (o enunciado) declarativa, la cual solo se puede establecer si es verdadera o falsa, pero no ambas. Por lo tanto de una oración declarativa, solo pueden establecerse dos afirmaciones, o bien es Verdadera (V) o bien es Falsa (F).

Ejemplo 1: Establecemos los valores de verdad de las siguientes afirmaciones y subrayamos el correcto.

Don Alberto ha nacido en Chuquisaca, por lo tanto es boliviano.	V	o	F
En clase de matemática se aprende sobre el uso de anticonceptivos.	V	o	F
El teorema de Pitágoras es una propiedad de los triángulos rectos	V	o	F
Solo los hombres, son los que ejercen violencia a las mujeres	V	o	F
Por un punto pasan infinitas rectas.	V	o	F

Hay que entender que no todas las oraciones pueden ser proposiciones y por ende, no se puede establecer un valor de verdad, ya que existen oraciones interrogativas, de las cuales no se sabe si son verdaderas o falsas, veamos dos ejemplos: A) La casa está sola B) El perro es del vecino

Proposición Simple.- Es aquella oración declarativa que solo tiene una proposición que analizar. Los ejemplos analizados anteriormente son un ejemplo de proposición simple.

Proposición compuesta.- Es aquella oración declarativa que consta de dos o más proposiciones que analizar, las cuales están unidas por conectivos lógicos. Veamos algunos ejemplos:

- Los números pares son los que tienen como unidad: 0, 2, 4, 6, 8, entonces el 49 es par.
- En la clase de educación física observamos que Julio levanta a José y José levanta a María, por lo tanto Julio levanta a María.
- Las operaciones opuestas son: la suma con la resta y la multiplicación con la potenciación.

Las operaciones compuestas son las que nos permiten comprender algunos razonamientos, los cuales debemos validar y establecer una posición, para establecer esas validaciones aplicaremos lo que conoceremos como conectivos lógicos.

2. Notaciones y conectivos lógicos

Notación.- Es la representación matemática que se utilizará, de tal forma que nos permita comprender mejor y simplificar las operaciones que realizaremos. Para las proposiciones simples utilizaremos las letras minúsculas del alfabeto (a,b,c,d,…,z); mientras que para las proposiciones compuestas además de las ya indicadas utilizaremos los conectivos lógicos.

Conectivos Lógicos.- Son símbolos matemáticos que dependiendo de la acción que se realicen entre las proposiciones, adopta ciertas operaciones. Veamos:

CONECTIVOS LÓGICOS Y SU INTERPRETACIÓN MATEMÁTICA.	
Descripción Literal	Símbolo
Negación “NO”	"$\sim$"
Conjunción “Y”	" $\wedge$ "
Disyunción “O”	" $\vee$ "
Implicación “SI…, ENTONCES”	" $\rightarrow$ "
Doble Implicación “SI Y SOLO SI”	" $\leftrightarrow$ "
Disyunción Exclusiva “O”	" "

Negación.- Es la operación lógica que niega una proposición, veamos como negar una proposición:

- Esta mañana llovió por Sucre… negando la proposición… Esta mañana no llovió por Sucre.

Conjunción.- Es la operación lógica que une dos proposiciones con la letra "y", las cuales tienen que suceder una después de otra, Veamos cómo se presenta en las oraciones.

- Siempre debemos tener luz en casa, compremos los focos y las utilizaremos cuando se quemen.

Disyunción.- Es la operación lógica que une dos proposiciones con la letra "o inclusivo", lo cual nos indica que una de las operaciones se pueda dar aunque no la otra.

- El cielo esta nublado, puede hacer sol o puede llover, de cualquier forma saldré.

Implicación.- Es la operación lógica que indica que una proposición debe suceder para que suceda la otra proposición, se representa por el símbolo " → " (llamado entonces). Veamos cómo se presenta:

- El páramo ayer estaba seco, pero esta mañana llovió, entonces hoy el páramo esta mojado.

Doble Implicación.- Es la operación lógica que nos indica que una proposición debe cumplirse, bajo la condición de que la otra también se tenga que cumplir. Se representa por el símbolo "↔" (llamado si y solo sí). Veamos cómo se presenta en una oración.

- Alfredo debe correrá en una maratón si y solo sí puede cumplir la marca mínima.

Disyunción Exclusiva.- Es la operación lógica que indica que se pueden realizar dos acciones independientes, su representación es la "o excluyente", Veamos cómo son estas proposiciones.

- Mañana iré a trabajar al campo si hace sol, o me quedaré en casa a reparar las paredes si llueve.

NOTA.- Como podemos notar existen dos tipos de Disyunción que aparecerán en las oraciones o proposiciones una es incluyente y la otra excluyente, la diferencia radica, en que la incluyente permite realizar una acción sin importar si una de las proposiciones no se cumple, mientras que la excluyente, nos obliga a realizar una acción diferente según sean las condiciones.

3. Operaciones proposicionales

Es la interpretación matemática de las proposiciones utilizando los conectivos lógicos, además de la representación de las proposiciones por letras que permitan desarrollar las operaciones.

Ejemplo 2: Representamos matemáticamente, las siguientes proposiciones.

	Proposiciones	Representación lógica	Representación matemática.
1	Jaime irá a la escuela en la tarde	p: Jaime irá a la escuela en la tarde Negando la proposición $\sim p$: Jaime no irá a la escuela en la tarde	Sea: p Negando: $\sim(p) = \sim p$
2	Para ir al cine, me debo bañar y cambiar de ropa.	p: me debo bañar q: me debo cambiar de ropa.	$p \wedge q$
3	Hare mi tarea hasta terminar, no importa que haga frio en la noche o haga calor en el día.	p: haga frio en la noche q: haga calor en el día.	$p \vee q$
4	Si corro a la escuela entonces llegaré temprano	p: correr a la escuela q: llegar temprano.	$p \rightarrow q$
5	Participaré del campeonato si y solo sí tengo la edad establecida en la convocatoria	p: participar en el campeonato q: tener la edad establecida	$p \leftrightarrow q$
6	Tengo Bs 200 y viendo el precio de la ropa, me compro un pantalón o una campera.	p: comprar un pantalón q: comprar una campera	$p\ q$

4. Tablas de valor de verdad

Valor de verdad.- Es el establecimiento de la Veracidad o Falsedad de las proposiciones, tomando en cuenta las diferentes posibilidades de cada proposición. Analizaremos los valores de verdad de las operaciones lógicas, los cuales nos servirán para demostrar algunas proposiciones.

Para verificar o demostrar los valores de verdad de las proposiciones, es necesario asumir las posibles combinaciones de verdad o falsedad de cada proposición, los cuales iremos detallando en los ejemplos.

Ejemplo 3: realizamos las tablas de verdad de las operaciones lógicas (negación, conjunción, disyunción, etc.), para lo cual asumamos que p, q, r, son proposiciones.

Negación

p	$\sim p$
V	F
F	V

Conjunción

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Doble Implicación

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Disyunción Exclusiva

p	q	$p \veebar q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplo 4: determinamos el valor de verdad de la proposición $\sim p \rightarrow (\sim q \veebar \sim r)$, aplicando las leyes lógicas estudiadas anteriormente.

p	q	r	$\sim p$	$\rightarrow$	$(\sim q$	$\veebar$	$\sim r)$
V	V	V	F	V	F	F	F
V	V	F	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	V	F	V
F	V	V	V	F	F	F	F
F	V	F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	F
F	F	F	V	F	V	F	V
1ra operación			1		1		1
2da operación						2	
3ra operación (valor de verdad de la proposición)				3			

La conclusión de la proposición es la columna 3, el cual es el valor de verdad de la proposición compuesta.

5. Clasificación de fórmulas proposicionales (Tautología, Contradicción y Contingencia)

Como ya se ha indicado, las proposiciones deben tener una conclusión (resultado), el cual desde un punto de vista lógico, tiene tres posibles respuestas, analicemos dichas conclusiones.

a) Tautología

Es la conclusión lógica de una proposición, donde todos sus valores de verdad son verdaderos (V), lo que nos indica, que dicha proposición es verdadera.

b) Contradicción

Es la conclusión lógica de una proposición, donde todos sus valores de verdad son falsos (F), lo que nos indica, que dicha proposición es falsa.

c) Contingencia

Es la conclusión lógica de una proposición, donde los valores de verdad son falsos y verdaderos, lo que nos indica que la conclusión de la proposición es indeterminada.

Ejemplo 5: Analicemos la conclusión de la proposición $\sim p \rightarrow (\sim q \ \sim r)$ resuelta anteriormente.

Solución: la conclusión fue V, V, V, V, F, V, V, F Por lo tanto es CONTINGENCIA.

Ejemplo 6: Analicemos las conclusiones de las proposiciones siguientes:

a) $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \wedge \sim q)$

	p	q	$(\sim p$	$\rightarrow$	$q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p$	$\wedge$	$\sim q)$
	V	V	F	V	V	F	F	F	F
	V	F	F	V	F	F	F	F	V
	F	V	V	V	V	F	V	F	F
	F	F	V	F	F	F	V	V	V
1ra operación			1		1		1		1
2da operación				2				2	
3ra operación final						3			

Como toda la columna 3 es falsa la conclusión de la proposición es CONTRADICCIÓN

b) $(p \leftrightarrow \sim q) \vee \sim(p \wedge q)$

	p	q	$(p$	$\leftrightarrow$	$\sim q)$	$\vee$	$\sim$	$(p$	$\wedge$	$q)$
	V	V	V	F	F	F	F	V	V	V
	V	F	V	V	V	F	V	V	F	F
	F	V	F	V	F	F	V	F	F	V
	F	F	F	F	V	V	V	F	F	F
1ra operación			1		1			1		1
2da operación				2					2	
3ra operación							3			
4ra operación final						4				

Como toda la columna 4 tiene falsos y verdaderos la conclusión de la proposición es CONTINGENCIA

c) $[(\sim p \rightarrow q) \wedge \sim q] \rightarrow p$

	p	q	$[(\sim p$	$\rightarrow$	$q)$	$\wedge$	$\sim q]$	$\rightarrow$	p
	V	V	F	V	V	F	F	V	V
	V	F	F	V	F	V	V	V	V
	F	V	V	V	V	F	F	V	F
	F	F	V	F	F	F	V	V	F
1ra operación			1		1		1		1
2da operación				2					
3ra operación						3			
4ra operación final								4	

Como toda la columna 4 es falsa la conclusión de la proposición es TAUTOLOGÍA

Actividad 54: En nuestro cuaderno de prácticas determinamos las conclusiones de las proposiciones siguientes:

1) $[(p \rightarrow \sim q) \wedge p] \veebar (\sim p \wedge q)$

2) $\left[\left(\sim p \veebar \sim q\right) \wedge (p \rightarrow \sim q)\right] \vee \sim(\sim p \leftrightarrow q)$

3) $\{(p \wedge q) \vee [p \wedge (\sim p \vee q)]\} \veebar \sim(p \rightarrow \sim q)$

6. Equivalencia lógica

La equivalencia lógica se presenta cuando existen dos funciones proposicionales, las cuales tienen la misma tabla de valores en cada renglón que se analice.

Ejemplo 7: Demostramos la equivalencia lógica de las siguientes proposiciones, $P_1: p \leftrightarrow q$ y $P_2: \sim(p \veebar q)$

p	q	p	$\leftrightarrow$	q	$\sim$	$(p$	$\veebar$	$q)$
V	V	V	V	V	V	V	F	V
V	F	V	F	F	F	V	V	F
F	V	F	F	V	F	F	V	V
F	F	F	V	F	V	F	F	F
1ra operación		1		1		1		1
2da operación			2				2	
3ra operación					3			

Las proposiciones 1 y 2 son equivalentes como lo podemos observar en la tercera operación del verde y la segunda del color plomo, ambas son una contingencia, pero lo más importante se demuestra la equivalencia de ambas.

Actividad 55: Demostramos la equivalencia de las siguientes proposiciones.

P_1: $\sim(p \wedge q)$ es equivalente a P_2: $\sim p \vee \sim q$

P_1: $p \rightarrow q$ es equivalente a P_2: $\sim p \vee q$

P_1: $(p \wedge q) \wedge r$ es equivalente a P_2: $p \wedge (q \wedge r)$

P_1: $p \vee (q \wedge r)$ es equivalente a P_2: $(p \vee q) \wedge (p \vee r)$

P_1: $p \leftrightarrow q$es equivalente a P_2: $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

7. Álgebra de proposiciones

Mediante las propiedades del algebra, podemos simplificar todas y cada una de las expresiones algebraicas, de tal forma que una operación (suma, resta, multiplicación división, etc.) pueda realizarse de una forma más rápida y exacta. El mismo principio podemos aplicarlo al algebra de proposiciones, los cuales se podrán lograr mediante el uso de las leyes de equivalencia, de las cuales algunas ya pudimos demostrarlas mediante las tablas de verdad.

Las leyes lógicas que nos permitirán realizar operaciones con las proposiciones son las siguientes.

L1	Leyes de Idempotencia	$p \wedge p \equiv p$ $p \vee p \equiv p$	L2	Leyes conmutativas	$p \wedge q \equiv q \wedge p$ $p \vee q \equiv q \vee p$
L3	Leyes Asociativas	$(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$ $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$	L4	Leyes de negación	$\sim(\sim p) \equiv p$ $p \wedge \sim p \equiv F$ $p \vee \sim p \equiv V$

L5	Leyes de Identidad	$p \wedge V \equiv p$ $p \vee F \equiv p$	L6	Leyes de Morgan	$\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$ $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
L7	Definición de Implicación	$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$	L8	Leyes Distributivas	$p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$ $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
L9	Leyes de Absorción	$p \wedge (p \vee q) \equiv p$ $p \vee (p \wedge q) \equiv p$ $p \wedge F \equiv F$ $p \vee V \equiv V$	L1 0	Definición de doble implicación	$p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$

Con estas equivalencias, podremos realizar la simplificación de operaciones con proposiciones lógicas.

Ejemplo 8: Simplificamos las siguientes proposiciones.

1. $p \wedge (q \vee \sim q)$	Usamos L4		1. $\sim q \vee (\sim p \wedge p)$	Usamos L4
$p \wedge V$	Usamos L5		$\sim q \vee F$	Usamos L5
p	Simplificado		$\sim q$	simplificado

1. $\sim(p \wedge \sim q) \vee q$	Usamos L2		1. $\sim(p \rightarrow \sim q) \wedge p$	Usamos L7
$q \vee \sim(p \wedge \sim q)$	Usamos L6 y L4		$\sim(\sim p \vee \sim q) \wedge p$	Usamos L6, L2, L4
$q \vee (\sim p \vee q)$	Usamos L3 y L1		$(p \wedge q) \wedge p$	Usamos L3 y L1
$\sim p \vee q$	Simplificado		$p \wedge q$	Simplificado

1. $q \vee (p \rightarrow \sim q)$	Usamos L2		1. $\sim(p \wedge q) \wedge (p \rightarrow q)$	Usamos L6 y L7
$q \vee (\sim p \vee \sim q)$	Usamos L3 y L4		$(\sim p \vee \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$	Usamos L8
$\sim p \vee V$	Usamos L9		$\sim p \vee (\sim q \wedge q)$	Usamos L4
V	Simplificado		$\sim p \vee F$	Usamos L9
			$\sim p$	Simplificado

Actividad 56: Simplificamos las siguientes proposiciones.

1. $(\sim p \rightarrow q) \wedge (p \vee \sim q)$
2. $p \vee \sim(p \rightarrow r)$
3. $p \wedge [q \vee (p \wedge \sim q)]$
4. $[q \wedge (q \rightarrow \sim p)] \rightarrow (p \wedge q)$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 57:

1. Respondemos las siguientes preguntas.
   - ¿Por que es importante la lógica?
   - ¿Como aplicamos la lógica en el enlace tecnologico?
2. Mencione 5 ejemplos de la aplicacion de la logica en la cotidianidad
3. Elaboramos cuadros didácticos sobre las leyes y conectivos lógicos, los cuales nos permitan retroalimentar y reforzar nuestro aprendizaje.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 58:

Elaboramos e investigamos diferentes ejercicios sobre las tablas de verdad en proposiciones de la vida real y las damos a conocer a nuestros compañeros utilizando los recursos tecnológicos.

Escanea el QR

Escanea el codigo QR para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades.

Escanea el QR

Ingresa al QR para aprender las nociónes básicas del ajedrez.

Escanea el QR

Ingresa al codigo QR para resolver problemas de razonamiento (combinaciones), a través de la plataforma virtual LICHESS.

5

SECUNDARIA

ÁREA MATEMÁTICA

CIENCIA TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN
MATEMÁTICA

APLICACIÓN DE LAS PROGRESIONES EN LA COTIDIANIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Depreciación

Dejando a un lado los casos en que un objeto adquiere valor precisamente a causa de su antigüedad y rareza, todo bien (vehículos, casas, maquinarias, equipos de computación, etc.) va disminuyendo de valor año a año debido al desgaste, la desactualización y el envejecimiento. A este proceso se denomina “depreciación”. Al final de su vida útil (el tiempo en que puede ser utilizado y aprovechado) un bien tiene un valor que se conoce como “valor en libros”.

Actividad 1

1 *Un bus de transporte interdepartamental es adquirido en $us 130 000. El ritmo de depreciación es de 7% el primer año, 6,5% el segundo, 6% el tercero y así sucesivamente, porcentajes calculados sobre el costo original del vehículo. ¿Cuál será su valor en libros al cabo de sus 12 años de vida útil?*

2 Construyamos la tabla en el cuaderno de ejercicios y completemos los datos faltantes:

Año	*0*	*1*	*2*	*3*	*4*	*...*
% de depreciación	-	*7%*	*6,5%*	*6%*		
Depreciación	-	*9 100*	*8 450*	*7 800*		
Valor al final de año	*130 000*	*120 900*	*112 450*	*104 650*		

3 Respondemos las siguientes preguntas en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Qué porcentaje va depreciándose cada año?
2. ¿Qué precio tendrá el autobús al cabo de 10 años?
3. ¿Qué entiendes por la palabra sucesión?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Progresiones y sucesiones

Una sucesión $\{a_n\}$ es un conjunto ordenado de números: $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ donde a cada uno de ellos se los denomina como término de la sucesión. En una sucesión a_1, a_2, a_3,..., el subíndice indica la posición del término. Así, por ejemplo, a_5 es el quinto término y a_n es el término n-ésimo de la sucesión.

Formas de determinar una sucesión.

La fórmula directa (llamada también fórmula del término general) indica cómo hallar un término cualquiera de una sucesión conociendo el lugar que el término ocupa.

La fórmula recursiva indica cómo hallar un término a partir del término anterior.

Actividad 2: Nos familiaricemos con algunas sucesiones. Descubre el patrón de cada sucesión y escribe al menos tres términos siguientes:

$3,\ 4,\ 6,\ 9,\ 13, \boxed{18}, \boxed{}, \boxed{}$ $\qquad$ $2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 13, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}$

$5,\ 1,\ -3,\ -7, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}$ $\qquad$ $1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 5, \boxed{}, \boxed{}, \boxed{}$

Actividad 3

Calculamos los primeros 5 términos de cada sucesión, dada la fórmula directa.

1) $d_n = \frac{n(n+1)}{2}$
2) $h_n = 3^{n-3}$
3) $a_n = 3n - 1$
4) $u_n = \frac{n^2}{n+1}$

Ejemplo 1: Calculamos los 5 primeros términos de cada sucesión a partir de la fórmula directa.

a) $\boldsymbol{a_n = 2n - 1}$

$a_1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$
$a_2 = 2 \cdot 2 - 1 = 3$
$a_3 = 2 \cdot 3 - 1 = 5$
$a_4 = 2 \cdot 4 - 1 = 7$
$a_5 = 2 \cdot 5 - 1 = 9$

La sucesión formada es:

1, 3, 5, 7, 9, …

b) $\boldsymbol{b_n = 3^{n-3}}$

$b_1 = 3^{1-3} = 3^{-2} = \frac{1}{9}$
$b_2 = 3^{2-3} = 3^{-1} = \frac{1}{3}$
$b_3 = 3^{3-3} = 3^0 = 1$
$b_4 = 3^{4-3} = 3^1 = 3$
$b_5 = 3^{5-3} = 3^2 = 9$

La sucesión formada es:

$\frac{1}{9}, \frac{1}{3}, 1, 3, 9, \ldots$

Ejemplo 2. Encontramos la fórmula directa de las siguientes sucesiones:

A)

5, 10, 15, 20, 25, …

+5 +5 +5 +5

*La secuencia está comprendida por los múltiplos de 5, es decir 5*la posición que ocupa el término en la sucesión.*

Por tanto, la fórmula directa será: $\boxed{\boldsymbol{a_n = 5n}}$

B)

14, 21, 28, 35, 42, …

+7 +7 +7 +7

*La secuencia está comprendida por los múltiplos de 7, sin embargo, la sucesión no inicia desde 7, de tal manera que no se puede determinar únicamente con la expresión **7*n**, es necesario sumarle 7 para que el primer término sea 14.*

Por tanto, la fórmula directa será: $\boxed{\boldsymbol{b_n = 7n + 7}}$

Ejemplo 3. Encontramos la fórmula recursiva de las siguientes sucesiones:

2, 5, 8, 11, …

+3 +3 +3

Hay que sumarle 3 al término anterior. Denotamos como b_{n-1} como el término anterior a b_n.

Por tanto, la fórmula recursiva será: $\boxed{\boldsymbol{b_n = b_{n-1} + 3}}, \boldsymbol{b_1 = 2}$

1, 1, 2, 3, 5, 8, …

1+1 1+2 2+3 3+5

Conocida como la Sucesión de Fibonacci, hay que sumar los dos términos anteriores.

Por tanto, la fórmula directa será: $\boxed{\boldsymbol{f_n = f_{n-1} + f_{n-2}}}$, con $\boldsymbol{f_1 = 1, f_2 = 1}$

Actividad 4

Calculamos los primeros 5 términos de cada sucesión, dada la fórmula recurrente.

$a_n = \frac{(-1)^n}{a_{n-1}}, \quad a_1 = 3$

$b_n = \frac{b_{n-1}}{n}, \quad b_1 = 1$

$d_n = \frac{1}{d_{n-1} + 1}; d_1 = 1$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

a_i: son los elementos del conjunto.
La expresión $i = 1$ indica dónde empieza la suma.
n: el número de elementos a tomar en cuenta, donde termina la sumatoria.

Sumatorias y sus propiedades

Desde el punto de vista de la matemática, la sumatoria o sumatorio se emplea para representar la suma de varios o infinitos elementos de un conjunto de números. Esta operación se representa por la letra griega Sigma (Mayúscula) "Σ" la cual iremos detallando a continuación:

Ejemplos:

- $$\sum_{k=0}^{5} (-2)^k = (-2)^0 + (-2)^1 + (-2)^2 + (-2)^3 + (-2)^4 + (-2)^5 = 1 - 2 + 4 - 8 + 16 - 32 = \boxed{-21}$$
- $$\sum_{i=0}^{4} \frac{2i+1}{2i-1} = \frac{2(0)+1}{2(0)-1} + \frac{2(1)+1}{2(1)-1} + \frac{2(2)+1}{2(2)-1} + \frac{2(3)+1}{2(3)-1} + \frac{2(4)+1}{2(4)-1} = -1 + 3 + \frac{5}{3} + \frac{7}{5} + \frac{9}{7} = \boxed{\frac{667}{105}}$$

Tu turno:

a) $\displaystyle\sum_{k=2}^{5} 3 \cdot 2^k =$ $\qquad$ b) $\displaystyle\sum_{k=1}^{7} k =$ $\qquad$ c) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} \frac{i}{i+1} =$ $\qquad$ d) $\displaystyle\sum_{i=1}^{5} i^2 =$

Propiedades de la sumatoria

Sumatoria de una constante	Sumatoria de una constante de una sucesión	Sumatoria de una suma o de una diferencia
$\sum_{i=1}^{n} c_i = n \cdot c$	$\sum_{i=1}^{n} c \cdot a_i = c \sum_{i=1}^{n} c_i\, a$	$\sum_{i=1}^{n} (a \pm b) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i$

Progresiones aritméticas P.A.

Una progresión aritmética (P. A.) es aquella en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumando al anterior una cantidad constante d llamada diferencia.

a_1 = a_1 → a_1: 1er término

a_2 = a_1 d → $a_2 = a_1 + d$

a_3 = a_1 d d → $a_3 = a_1 + 2d$

a_4 = a_1 d d d → $a_4 = a_1 + 3d$

a_5 = a_1 d d d d → $a_5 = a_1 + 4d$

$$a_n = a_1 + (n-1)\cdot d$$

Fórmula directa

a_n: Término general
a_1: 1er término
n: Número de término
d: Diferencia

Fórmula del 1er término:
$$a_1 = a_n - (n-1)\cdot d$$
Fórmula de la diferencia:
$$d = \frac{a_n - a_1}{n-1}$$
Fórmula del número de términos:
$$n = \frac{a_n - a_1}{d} + 1$$

Ejemplo 1:

Determinamos los elementos de la P. A.:

2; 5; 8; 11; 14; 17; 20; 23

$$a_1 = 2,$$
$$a_n = 23, n = 8, d = 3$$

La diferencia es posible calcular restando algún término de la P.A. con su término anterior.

$$d = a_2 - a_1 = 5 - 2 = \boxed{3}$$

Ejemplo 2:

Calculamos el trigésimo quinto término de la P.A.: $1, 7, 13, 19$

$a_1 = 1$ $\quad n = 35$

$d = 7 - 1 = 6$ $\quad a_n = ?$

Utilizamos:

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$
$$a_{35} = 1 + (35-1)\cdot 6$$
$$a_{35} = 1 + 34 \cdot 6$$
$$a_{35} = 1 + 204$$
$$\boxed{a_{35} = 205}$$

Ejemplo 3:

Una P.A. tiene 85 términos. Si los tres últimos términos son $-\frac{11}{2}, -\frac{25}{4}, -7$.

Calculamos el 1er término.

$a_1 = ?$ $\quad n = 85$ $\quad a_n = -7$

$$d = -7 - \left(-\frac{25}{4}\right) = -\frac{3}{4}$$

Utilizamos:

$$a_1 = a_n - (n-1)d$$
$$a_1 = -7 - (85-1)\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$a_1 = -7 - 84\cdot\left(-\frac{3}{4}\right)$$
$$a_1 = -7 + 63 = \boxed{56}$$

Para pensar un poco

El General Irahola decide formar su tropa en forma de triángulo de tal manera que la primera fila tenga un soldado, la segunda dos, la tercera tres, y así sucesivamente. Si hay 1 225 soldados, ¿cuántas filas puede formar?

Ejemplo 4:

Encontramos los cinco primeros SI:

$$a_1 = 2 \text{ y } d = 7$$

$$a_n = 2 + (n-1)7$$
$$a_n = 2 + 7n - 7$$
$$a_n = 7n - 5$$

Calculamos los cinco primeros términos de la sucesión:

$$a_1 = \mathbf{2}$$
$$a_2 = 7\cdot 2 - 5 = \mathbf{9}$$
$$a_3 = 7\cdot 3 - 5 = \mathbf{16}$$
$$a_4 = 7\cdot 4 - 5 = \mathbf{23}$$
$$a_5 = 7\cdot 5 - 5 = \mathbf{30}$$

Ejemplo 5:

Hallamos a_{30} si $a_1 = \frac{1}{2}$ y $a_{12} = 6$

Calculamos la diferencia:

$$d = \frac{6 - \frac{1}{2}}{12 - 1} = \frac{\frac{11}{2}}{11} = \frac{11}{22} = \frac{1}{2}$$

Calculamos el término pedido:

$$a_{30} = \frac{1}{2} + (30-1)\cdot\frac{1}{2}$$
$$a_{30} = \frac{1}{2} + \frac{29}{2} = \frac{30}{2} = \boxed{15}$$

Ejemplo 6:

¿Cuántos términos tiene la sucesión?: $4, 8, 12, 16, \ldots, 512$

$a_1 = 4$ $\quad a_n = 512$

$$d = 8 - 4 = 4$$

Encontramos el número de términos:

$$n = \frac{512 - 4}{4} + 1$$
$$n = \frac{508}{4} + 1 = \frac{512}{4}$$
$$\boxed{n = 128}$$

Interpolación Aritmética

En una progresión aritmética, los términos que se encuentran entre los dos términos extremos dados, a_1 y a_n, se llaman medios aritméticos entre a_1 y a_n; los términos a_1 y a_n se denominan extremos.

Actividad 5. Resolvemos los siguientes ejercicios:

1. Determinar los elementos de la P. A.: $\mathbf{23;\ 20;\ 17;\ 14;\ 11;\ 8;\ 5}$
2. Calcular el décimo sexto término de la P.A.: $\mathbf{2, 7, 12, 17}$
3. Una P.A. tiene 35 términos. Si los tres últimos términos son $-\frac{11}{2}, -\frac{25}{4}, -7$. Calcula el 1er término.
4. En la P.A. entre -10 y 5, ubicar 4 términos centrales.
5. En una P.A. el 3er término es 5 y el 7mo término es 3. Calcula el 10mo término.
6. En una P.A. $t_n = 2(n-1)+7$. Calcula: t_{10}, para $n = 10$.

Realizar una interpolación aritmética de p términos entre dos números dados significa hallar p medios aritméticos entre a y b: $a_1, \underbrace{x_1, x_2, \dots, x_p}_{p\ términos}, a_n$

Ejemplo 1:
Interpolamos tres medios aritméticos entre 2 y 14.

$$\boldsymbol{a_1 = 2; a_n = 14, \qquad n = 5}$$

Calculamos la diferencia:

$$d = \frac{14-2}{5-1} = \frac{12}{4} = \mathbf{3}$$

Interpolamos:

$$a_1 = \mathbf{2}$$
$$a_2 = 2+3 = 5$$
$$a_3 = 2+2\cdot 3 = 8$$
$$a_4 = 2+3\cdot 3 = 11$$
$$a_5 = \mathbf{14}$$

2, 5, 8, 11, 14

Ejemplo 2:
Interpolamos seis medios aritméticos entre 3 y 38.

$$\boldsymbol{a_1 = 3; a_n = 38, \qquad n = 8}$$

Calculamos la diferencia:

$$d = \frac{38-3}{8-1} = \frac{35}{7} = \mathbf{5}$$

Interpolamos:

$$\mathbf{3}, 8, 13, 18, 23, 28, 33, \mathbf{38}$$

Suma de términos equidistantes

En toda sucesión aritmética finita $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ se verifica que la suma de dos términos equidistantes de los extremos es constante e igual a la suma de los extremos $a_1 + a_n$.
Es decir, en la sucesión $a_1, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, a_{n-1}, a_n$ se verifica:

$$a_1 + a_n = a_2 + a_{n-1} = a_3 + a_{n-2} = a_4 + a_{n-3} = \cdots$$

Suma de n términos de una sucesión aritmética

$$\boldsymbol{S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2}} \quad ó \quad \boldsymbol{S_n = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}}$$

Ejemplo 1:
En una P.A. de 7 términos, el término central es 18 y el segundo 22. Calcula el 6to y 7mo términos y la suma para 10 términos.

$$\boldsymbol{a_4 = 18; a_2 = 22, \qquad n = 7}$$

Calculamos la diferencia:

$$d = \frac{18-22}{3-1} = \frac{-4}{2} = \mathbf{-2}$$

Calculamos el 6to y 7mo término. $\boldsymbol{a_1 = 24}$

$$a_6 = 24 + (6-1)\cdot(-2)$$
$$a_6 = 24 - 10 = \boxed{\mathbf{14}}$$
$$a_7 = 24 + (7-1)\cdot(-2)$$
$$a_7 = 24 - 12 = \boxed{\mathbf{12}}$$

Calculamos la suma para $n = 10$. Calculamos a_{10}

$$a_{10} = 24 + (10-1)\cdot(-2) = \mathbf{6}$$

$$S_{10} = \frac{10(24+6)}{2} = \frac{10\cdot 30}{2} = \boxed{\mathbf{150}}$$

Ejemplo 2: LUCHEMOS CONTRA LA VIOLENCIA
Desde que Victoria decidió rehacer su vida después de haberse separado de su pareja por violencia intrafamiliar, abrió una cuenta de ahorros en un banco con 120$us, el 2do mes depositó 145$us y el 3er mes 170$us. ¿Cuánto ha ahorrado en un año y medio y cuánto el último mes?

$$P.A.: 120, 145, 170, \dots$$

$$a_1 = 120\$, n = 18\text{meses}, d = 25\$, S_{18} = ?, a_n = ?$$

Calculamos el último término:

$$a_{18} = 120 + (18-1)\cdot 25$$
$$a_{18} = 120 + 425 = \boxed{\mathbf{545}\$\mathrm{us}}$$

Para saber el monto ahorrado, calculamos la suma hasta a_{18}:

$$S_{18} = \frac{18(545+120)}{2}$$

$$S_{18} = \frac{18\cdot 665}{2} = \boxed{\mathbf{5985}\$\mathrm{us}}$$

Respuesta. Victoria ahorró 545 dólares el último mes y 5985 dólares durante el año y medio, demostrando que se puede salir adelante.

Actividad 6.
Resolvemos los siguientes ejercicios

1) Encontramos la suma indicada en la siguiente progresión aritmética: $-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, 1, \frac{7}{4}, \dots; S_{20}$
2) Hallamos el número de términos para que 2+8+14+20+⋯=3640
3) Sobre una recta en el suelo hay una canasta y 30 manzanas distribuidas en la misma recta. La canasta está a 3m de la primera manzana y las manzanas están a 1,5m una de la otra. Una persona parte de la canasta, recoge la primera manzana y regresa a ponerla en la canasta; hace la misma operación con la segunda manzana y así sucesivamente.
   a) ¿Qué distancia ha recorrido al recoger y colocar la vigésima manzana?
   b)¿Qué distancia ha recorrido en total al recoger las 30 manzanas?
4) Un dentista arregla todas las piezas de un cliente, por el primer diente cobra Bs 80 y por cada diente después del primero cobra Bs 7 más que el anterior. Si el cliente tiene la dentadura completa ¿Cuál será el honorario del profesional y cuánto cobró por el último diente?

Progresiones geométricas P.G.

En una sucesión geométrica cada término (exceptuando el primero) se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad fija r llamada razón geométrica. La fórmula directa (o término general) es:

$a_1 = a_1$ → a_1: 1er término

$a_2 = a_1 \cdot r$ → $a_2 = a_1 \cdot r$

$a_3 = a_1 \cdot r \cdot r$ → $a_3 = a_1 \cdot r^2$

$a_4 = a_1 \cdot r \cdot r \cdot r$ → $a_4 = a_1 \cdot r^3$

$a_5 = a_1 \cdot r \cdot r \cdot r \cdot r$ → $a_5 = a_1 \cdot r^4$

$$\boldsymbol{a_n = a_1 \cdot r^{n-1}}$$

Fórmula directa

a_n: Término general
a_1: 1er término
n: Número de término
r: Razón

Fórmula del 1er término:

$$a_1 = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

Fórmula de la razón:

$$r = \sqrt[n-1]{\frac{a_n}{a_1}}$$

Fórmula del número de términos:

$$n = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log r} + 1$$

Ejemplo 1:

Determinamos los elementos de la P.G.:
5; 10; 20; 40; 80; 160: 320

$$\boldsymbol{a_1 = 5,}$$
$$\boldsymbol{a_n = 320, n = 7, r = 2}$$

La razón es posible calcular dividiendo algún término de la P.G. con su término anterior.

$$r = \frac{a_n}{a_{n-1}} = \frac{10}{5} = \boxed{2}$$

Ejemplo 2:

Hallamos el primer término de una progresión geométrica cuyo quinto término es 432 y su razón es 6.

$a_1 = ?$ $\quad n = 5$
$r = 6$ $\quad a_5 = 432$

Utilizamos:

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{a_n}{r^{n-1}}$$

$$a_1 = \frac{432}{6^{5-1}} = \frac{432}{6^4} = \frac{432}{1296}$$

$$\boxed{a_1 = \frac{1}{3}}$$

Ejemplo 3:

Hallamos el número de término de la P.G. donde $a_1 = 2$, $a_n = 486$ y $r = 3$.
$n = ?$

Utilizamos:

$$\boldsymbol{n} = \frac{\log\left(\frac{a_n}{a_1}\right)}{\log r} + 1$$

$$n = \frac{\log\left(\frac{486}{2}\right)}{\log 3} + 1$$

$$n = \boxed{6}$$

Actividad 7. Resolvemos los siguientes ejercicios

1. Determinamos los elementos de la P. G.: **2**; **6**; **18**; **54**; **162**
2. Hallamos $\boldsymbol{a_8}$ de la progresión: $:: \frac{1}{3} : 1 : 3 :$ . . . . .
3. El 6º término de una progresión geométrica es 50 y la razón 2. Hallamos el primer término.
4. En una progresión geométrica, $\boldsymbol{a_1} = 8$ y $\boldsymbol{a_7} = \frac{1}{512}$. Hallamos la razón
5. Un hombre trabajó durante 8 días y cada día ganó $\frac{1}{3}$ de lo que ganó el día anterior. Si e 8º día ganó Bs. 1. ¿Cuánto ganó el primer día?

Ejemplo 4:

En una progresión geométrica el término $a_3 = 18$ y el término $a_5 = 162$, hallar a_{12}.

Para calcular la razón: Podemos trabajar con a_3 que puede ocupar el espacio de a_1 y a_5 que funge como a_3.

$$a_1, a_2, \underset{a_1}{\underset{\uparrow}{a_3}}, a_4, \underset{a_3}{\underset{\uparrow}{a_5}}, a_6, \ldots$$

Hallamos **r** con $a_1 = 18$ y $a_3 = 162, n = 3$.

$$\boldsymbol{r} = \sqrt[3-1]{\frac{162}{18}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

Hallamos a_1:

$$\boldsymbol{a_1} = \frac{18}{3^{3-1}} = \frac{18}{3^2} = \frac{18}{9} = \boxed{2}$$

Hallamos a_{12}:

$$a_{12} = 2 \cdot 3^{12-1} = 2 \cdot 3^{11}$$
$$a_{12} = \boxed{354\,294}$$

Ejemplo 5: Calculemos el término pedido en cada P.G.

$$1, \sqrt{2}, 2, \ldots$$

$a_1 = 1 \quad r = \sqrt{2}$

Calculamos el décimo término:

$$a_{10} = 1 \cdot \left(\sqrt{2}\right)^9$$
$$a_{10} = \sqrt{2^9}$$
$$a_{10} = \sqrt{2^8 \cdot 2} = 2^4\sqrt{2} = \boxed{16\sqrt{2}}$$

Halla la razón r de una sucesión geométrica si: $a_8 = 4374\ y\ a_2 = 6$

$$a_8 = a_2 \cdot r^6$$
$$4374 = 6 \cdot r^6$$
$$r^6 = \frac{4374}{6} = 729$$
$$r = \sqrt[6]{729} = \boxed{3}$$

Interpolación geométrica

Realizar una interpolación geométrica de p términos entre dos términos extremos a y b significa hallar p términos, $x_1, x_2, \ldots, x_p$ talles que estos y los extremos formen una sucesión geométrica. Los términos interpolados se llaman medios geométricos.

$$\underbrace{a, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_p, b}_{\text{sucesion geométrica}}$$

Ejemplo 1:

Interpolamos 3 medios geométricos entre 2 y 162.

$$\boldsymbol{a_1 = 2; a_n = 162, \quad n = 5}$$

Calculamos la razón:

$$r = \sqrt[5-1]{\frac{162}{2}} = \sqrt[4]{81} = \boxed{3}$$

Interpolamos:

$a_1 = \mathbf{2}$
$a_2 = 2 \cdot 3 = 6$
$a_3 = 2 \cdot 3^2 = 18$
$a_4 = 2 \cdot 3^3 = 54$
$a_5 = \mathbf{162}$

:: **2, 6, 18, 54, 14**

Ejemplo 2:

Interpolamos 4 medios geométricos entre $\frac{4}{5}$ y $\frac{128}{1215}$.

$$\boldsymbol{a_1 = \frac{4}{5}; a_n = \frac{128}{1\,215}, \quad n = 6}$$

Calculamos la razón:

$$r = \sqrt[6-1]{\frac{\frac{128}{1215}}{\frac{4}{5}}} = \sqrt[5]{\frac{32}{243}} = \boxed{\frac{2}{3}}$$

Interpolamos:

$$a_1 = \frac{\mathbf{4}}{\mathbf{5}}$$
$$a_2 = \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$
$$a_3 = \frac{4}{5} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{16}{45}$$

$$:: \frac{4}{5}, \frac{8}{15}, \frac{16}{45}, \frac{32}{135}, \frac{64}{405}, \frac{128}{1215}$$

Suma de términos de una progresión geométrica

Dada la progresión geométrica: $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_{n-1}, a_n$
O bien: $a_1,\ a_1 \cdot r,\ a_1 \cdot r^2,\ a_1 \cdot r^3, \dots, a_1 \cdot r^{n-1}$

Vamos a obtener la expresión matemática que nos permita determina la suma de los términos de una progresión geométrica. S_n

$$S_n = a_1 + a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + \dots + a_1 \cdot r^{n-1} \quad (1)$$

Es decir: $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + a_n \quad (2)$

Multiplicación **(1)** por ***r***

$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r \cdot r + a_1 \cdot r^2 \cdot r + a_1 \cdot r^3 \cdot r + \dots + a_1 \cdot r^{n-1} \cdot r$$
$$r \cdot S_n = a_1 \cdot r + a_1 \cdot r^2 + a_1 \cdot r^3 + a_1 \cdot r^4 + \dots + a_1 \cdot r^{n-1} + a_1 \cdot r^n$$
$$r \cdot S_n = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots + a_{n-1} + a_n + a_1 \cdot r^n \quad (3)$$

Restando miembro a miembro ***(1)*** *y* ***(3)***

$$r \cdot S_n = \cancel{a_2} + \cancel{a_3} + \cancel{a_4} + \cancel{a_5} + \dots + \cancel{a_{n-1}} + \cancel{a_n} + a_1 \cdot r^n$$
$$-S_n = -a_1 - \cancel{a_2} - \cancel{a_3} - \cancel{a_4} - \dots - \cancel{a_{n-1}} - \cancel{a_n}$$
$$r \cdot S_n - S_n = a_1 \cdot r^n - a_1$$
$$S_n(r-1) = a_1(r^n - 1)$$

$$\boldsymbol{S_n = \frac{a_1(r^n - 1)}{r - 1}}$$

Ejemplo 1:
Una persona ahorró bs 128 en el mes de enero, y de ahí en adelante solo ha podido ahorrar la mitad de lo que ahorró el mes anterior. ¿Cuánto ha ahorrado en el mes de octubre y cuánto es su ahorro total?

$$\boldsymbol{a_1 = 128;\ r = 1/2, n = 10}$$

Calculamos el último término:

$$a_{10} = 128 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{10-1} = \frac{1}{4} = \boxed{0.25}$$

Calculamos la suma total:

$$S_{10} = \frac{128 \cdot \left(\left(\frac{1}{2}\right)^{10} - 1\right)}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{128 \cdot \left(\frac{1-1024}{1024}\right)}{\frac{1-2}{2}}$$
$$S_{10} = \frac{1023}{4} = \boxed{255.75}$$

Rpta. En octubre ahorró apenas 25 centavos y en total ahorró 255.75 bs.

2. Resolución de problemas del contexto y la tecnología

Actividad 8. Resolvemos los siguientes ejercicios

1. Hallamos la suma de los 5 primeros términos de la progresión: $:: 6 : 3 : 1\frac{1}{2} : \dots$
2. Hallamos la suma de los 10 primeros términos de la progresión: $:: \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : \dots$
3. El día lunes gané Bs 2 y cada día después gané el doble de lo que gané el día anterior. ¿Cuánto gané el sábado y cuánto de lunes a sábado?
4. Si $a_1 = 1, r = \frac{1}{2}$; calculamos S_{11}

La leyenda del ajedrez

Una leyenda acerca del origen del ajedrez en la India cuenta que Lhaur Sessa, el inventor del juego, ante el ofrecimiento del rey Ladava pidió que se le recompensara entregándole un grano de trigo por la primera casilla del tablero de ajedrez, dos por la segunda, cuatro por la tercera y así sucesivamente. El rey se sorprendió ante la aparentemente mísera petición y ordenó calcular la cantidad de trigo. Los matemáticos, después de mucho trabajo, le comunicaron que no estaba en condiciones de cumplir el pedido de Sessa debido a la exorbitante cantidad de trigo que se necesitaba. La historia cuenta que Sessa liberó al rey de su promesa y se convirtió en su consejero. ¿Cuántos granos de trigo pidió Sessa?
Con los datos brindados en la lectura tenemos que: $a_1 = 1, r = 2, n = 64$

Calculamos la suma S_{64}.

$$S_{64} = \frac{1 \cdot (2^{64} - 1)}{2 - 1} = \frac{2^{64} - 1}{1} = 2^{64} - 1$$
$$= \boxed{\mathbf{1\,833\,581\,560\,671\,830\,015}} \quad \text{granos de trigo}$$

¡Toda la producción de trigo de un siglo no sería suficiente!

Actividad 9. Analizamos y resolvemos el siguiente problema

Te ofrezco un trabajo por el que ganarías Bs 1 el primer día, Bs 2 el segundo día, Bs 4 el tercero; es decir, cada día ganarías el doble de lo que ganaste el día anterior, ¿Cuánto ganarías en 30 días de trabajo?, ¿te conviene?, ¿aceptarías el trabajo?

Actividad 10. Resolvamos el siguiente problema

Historia familiar
¿Cuántos antepasados tienes en 10 generaciones anteriores?
a_1=2 (padres), a_2=4 (abuelos), a_3=8 (bisabuelos)

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 11. Respondamos las siguientes preguntas:

Formamos grupos sociocomunitarios de tres o cuatro personas para reflexionar y debatir los contenidos desarrollados, en función a las siguientes preguntas:

- ¿En la leyenda del ajedrez, qué opinión te merece la decisión del rey al aceptar la forma de pago a Sessa?
- ¿En qué aspectos de la naturaleza se observan sucesiones numéricas? Mencionamos al menos tres.
- En el campo de la economía, ¿en qué circunstancias se aplican las sucesiones?
- Valoremos lo maravillosos que pueden ser los números y anotemos dos sucesiones que nos llamaron más la atención.

Formemos un círculo de reflexión para debatir en función al análisis efectuado en cada grupo sociocomunitario.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 12. Elaboremos materiales:

- Elaboremos un cuadro didáctico de la sucesión de Fibonacci, analizando matemáticamente su conformación.
- Construimos un calendario de ahorro (30 días) y proponemos una progresión para llevar adelante el ahorro. (Según nuestras posibilidades). Calculemos el total de dinero a recaudar al finalizar el mes.
- Socialicemos el calendario de ahorro en nuestras familias incentivandoles a cumplir el reto.

ANÁLISIS COMBINATORIO EN SITUACIONES CONCRETAS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 13. Respondamos a las preguntas de acuerdo al caso

Isabel es una niña que nació en pleno confinamiento por la pandemia, como las restricciones iniciales eran muy rígidas al inicio, su madre no podía acudir a las tiendas cercanas para adquirir nueva ropa para su hija. Sólo disponía de 5 poleras, 4 pantalones, 3 pares de calzados. En equipos de trabajo, determinamos todas las posibles formas diferentes de vestir a Isabel y respondemos las siguientes preguntas.

- ¿Cuántas son las posibles formas de vestir a Isabel?
- Asumiendo que, a Isabel la deben cambiar 2 veces al día. ¿Para cuantos días abastece su ropa?
- ¿Cómo se llama el cálculo realizado para determinar todas las posibles formas de vestir a Isabel?
- ¿En qué otras situaciones es necesario saber todas las posibles formas de hacer algo?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Principios básicos de conteo

El principio fundamental de conteo establece que si hay p formas de hacer una cosa, y q formas de hacer otra cosa, entonces hay p × q formas de hacer ambas cosas. También se le conoce como el principio multiplicativo.

Expresado algebraicamente tenemos: $p \cdot q \cdot r \cdot \ldots$

Ejemplo:

¿Cuántos números divisibles por 5 formados por 4 dígitos distintos se pueden formar con los dígitos 0, 1, 2, 3, 4, y 5?

_ _ _ 0

3 posibilidades
4 posibilidades
5 posibilidades

$5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$

_ _ _ 5

3 posibilidades
4 posibilidades
4 posibilidades

$4 \cdot 4 \cdot 3 = 48$

Por consiguientes es posible formar 60 + 48 = 108 números.

Actividad 14. Resolvamos el siguiente problema

Para ir de la ciudad A a la ciudad B hay cuatro caminos; para ir de B a C hay 5 caminos; y para ir de la ciudad C a la ciudad D hay tres caminos. ¿Cuántas rutas diferentes se pueden tomar para ir de la ciudad A a la ciudad D, pasando por las ciudades B y C?

2. Factorial de un número natural y sus propiedades

El producto de 5·4·3·2·1 se suele simbolizar 5! que se lee "cinco factorial".

El factorial de un número natural n se representa por "n factorial" o "factorial de n" y se define como:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

Ejemplos: Calculemos:

1) $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{720}$

2) $5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = \mathbf{120}$

3) $\frac{6!}{(6-4)!} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2!} = \frac{720}{2 \cdot 1} = \mathbf{360}$

Calcula cada una de las siguientes expresiones.

1) $8! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40320$

2) $\frac{8!}{3!\,5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = \frac{40320}{720} = 56$

3. Permutaciones simples

Dado un conjunto n de elementos, se llama permutación simple de n elementos a cualquier agrupamiento ordenado de esos n elementos, de modo que dos agrupaciones se diferencien solo en el orden de aquellos.

Actividad 15. Resolvamos los siguientes problemas

1.- ¿Cuántos números distintos de 5 cifras se pueden formar con los dígitos 4, 5, 6, 7 y 8?
2.- ¿Cuántos anagramas se pueden formar con las letras de Beatriz? ¿Cuántos comienzan con la letra Z?
3.- Orlando tiene un CD de música de 8 pistas. ¿De cuántas maneras distintas podría escuchar su CD en el modo de "Secuencia aleatoria" (Random)?

El número de permutaciones simples de n elementos está dado por:

$$P_n = n! = n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 1$$

Ejemplos:

1. ¿De cuántas maneras pueden sentarse 5 personas en una banca?

$$5! = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120 \text{ maneras}$$

2. Un equipo de futbol de salón tiene 6 jugadores, de los cuales el arquero y un delantero son inamovibles ¿de cuántas maneras se puede disponer de los jugadores del equipo?

$$\mathbf{A}\ B\ C\ E\ F\ \mathbf{D}$$

$$P_{n,k} = (n-k)! \rightarrow P_{6,2} = (6-2)! = 4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24\ maneras$$

4. Permutaciones con repetición

Si en un conjunto de n elementos uno de ellos se repite n_1 veces, otro se repite n_2 veces y así sucesivamente, entonces el total de permutaciones está dado por:

$$\mathbf{P_n^{n_1, n_2, \ldots}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{n_1! \cdot n_2! \cdot \cdots}}$$

Actividad 16. Resolvemos los siguientes problemas

1.- Con los dígitos 1, 1, 2, 2, 2, 3, 3, 3, y 3, ¿Cuántos números distintos podemos escribir en el sistema de numeración decimal?
2.- ¿Cuántas señales formadas por 6 banderines pueden formarse con un banderín rojo, uno amarillo, uno verde y tres azules?

Ejemplo:

Calculamos el número de anagramas que pueden formarse con las letras de la palabra MARA.El número de elementos es 4: n = 4

La letra A se repite dos veces: $n_1 = 2$

$$P_4^2 = \frac{4!}{2!} = 4 \cdot 3 = 12 \text{ permutaciones}$$

5. Variaciones simples

Si con las letras de la palabra AMOR construimos secuencias de 3 letras (sin repetirlas), ¿Cuántas secuencias podríamos formar?

- Comenzando por A: AMO, AMR, AOM, AOR, ARO y ARM
- Comenzando por M: MAO, MAR, MOA, MOR, MRA y MRO
- Comenzando por O: ……
- Comenzando por R: ……

Una variación sin repetición de n elementos tomados de k en k (donde k≤n) es un grupo ordenado de k elementos distintos que se pueden formar a partir de los n elementos.

La cantidad de variaciones de n elementos se calcula mediante:

$$\mathbf{V_{n,k}} = \mathbf{n} \cdot (\mathbf{n}-1) \cdot (\mathbf{n}-2) \cdot \cdots \cdot (\mathbf{n}-\mathbf{k}+1) = \frac{\mathbf{n!}}{(\mathbf{n}-\mathbf{k})!} \ \textbf{donde n} \geq \mathbf{k}$$

Ejemplos:

1.- ¿Cuántas variaciones se pueden obtener con las letras a, b y c tomadas de 2 en 2?

$$n = 3 \quad k = 2$$

$$V_{n,k} = \frac{n!}{(n-k)!} \rightarrow V_{3,2} = \frac{3!}{(3-2)!} = \frac{3 \cdot 2 \cdot 1}{1} = \boxed{6}$$

2.- Diez personas esperan para subir a un funicular que sólo tiene capacidad para 6. ¿de cuantas maneras distintas se pueden sentar 6 de esas personas en el funicular?

$$n = 10 \quad k = 6$$

$$V_{10,6} = \frac{10!}{(10-6)!} = \frac{10!}{4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{4!} = \boxed{151200 \text{ maneras}}$$

6. Variaciones con repetición

Si con las letras de la palabra AMOR formamos secuencias de 2 letras, pero de tal manera que pueden repetirse las letras hasta dos veces, ¿Cuántas secuencias podríamos formar?

- Comenzando por A: AA,AM,AO,AR
- Comenzando por M: MA,MM,MO,MR, etc.

Las variaciones con repetición de n elementos tomados de k en k son los distintos grupos ordenados de k elementos, repetidos o no, que se pueden formar con los n elementos dados.

La cantidad de variaciones con repetición de n elementos está dada por:

$$\mathbf{VR_{n,k} = n^k}$$

Ejemplo:
¿Cuántos números formados por dos cifras podemos obtener con las cifras 1, 2, 3, 4, 5?
n=5
k=2 **$VR_{n,k} = n^k \rightarrow \quad VR_{5,2} = 5^2 = 25$ números**

7. Combinaciones simples

Se llama combinación de n elementos tomados de k en k a cada uno de los grupos de k elementos que se pueden formar, sin tener en cuenta el orden en que se pongan los elementos.
El número de combinaciones de n elementos tomados de k en k ($C_{n,k}$) es igual al cociente del número de variaciones ($V_{n,k}$) entre el número de permutaciones ($P_k = k!$). Entonces:

$$C_{n,k} = \frac{V_{n,k}}{P_k} = \frac{\frac{n!}{(n-k)!}}{k!} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-k)! \cdot k!}} \text{ donde } n > k$$

Ejemplo:
De siete profesores y diez estudiantes se debe formar una comisión integrada por dos profesores y 4 estudiantes. ¿Cuántas comisiones diferentes se pueden formar?
Combinaciones de los profesores tomados de 2 en 2:

$$C_{n,k} = \frac{7!}{(7-2)! \cdot 2!} = \frac{7!}{5! \cdot 2!} = \frac{7 \cdot 6}{2 \cdot 1} = 21$$

Combinaciones de los estudiantes tomados de 4 en 4:

$$C_{10,4} = \frac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \frac{10!}{6! \cdot 4!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$$

Por el principio multiplicativo:

21 · 210 = 4 410 comisiones posibles

8. Números combinatorios

El número de combinaciones (sin repetición) de n elementos tomados de k en k se llama número combinatorio de n sobre k y se denota mediante $\binom{n}{k}$

$$\textbf{Es decir } \binom{n}{k} = \mathbf{C_{n,k}} = \frac{\mathbf{n!}}{\mathbf{(n-k)! \cdot k!}} \textbf{ donde } \mathbf{n \geq k}$$

Ejemplos:
1. Calculamos el número combinatorio de "7 Sobre 4".

$$\binom{7}{4} = \frac{7!}{(7-4)! \cdot 4!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = \boxed{35}$$

2. Calculamos el número combinatorio de "11 sobre 2"

$$\binom{11}{2} = \frac{11!}{(11-2)! \cdot 2!} = \frac{11 \cdot 10 \cdot 9!}{9! \cdot 2 \cdot 1} = \boxed{55}$$

9. Binomio de Newton

Analizando el desarrollo de $(a+b)^n$ podemos hacer la siguiente generalización:

$$\text{El término } k+1 \text{ es: } \mathbf{t_{k+1}} = \binom{n}{k} \mathbf{a^{n-k} \cdot b^k}$$

Ejemplo 1: desarrollamos por el binomio de Newton. $(a^2+2b)^5$

$$= \binom{5}{0}(a^2)^5(2b)^0 + \binom{5}{1}(a^2)^4(2b)^1 + \binom{5}{2}(a^2)^3(2b)^2 + \binom{5}{3}(a^2)^2(2b)^3 + \binom{5}{4}(a^2)^1(2b)^4 + \binom{5}{5}(a^2)^0(2b)^5$$
$$= \binom{5}{0}a^{10} + \binom{5}{1}a^8 \cdot 2b + \binom{5}{2}a^6 \cdot 4b^2 + \binom{5}{3}a^4 \cdot 8b^3 + \binom{5}{4}a^2 \cdot 16b^4 + \binom{5}{5}32b^5$$
$$= \frac{5!}{5!}a^{10} + \frac{5!}{4! \cdot 1!}2a^8b + \frac{5!}{3! \cdot 2!}4a^6b^2 + \frac{5!}{2! \cdot 3!}8a^4b^3 + \frac{5!}{4!}16a^2b^4 + \frac{5!}{5!}32b^5$$
$$= a^{10} + 5 \cdot 2a^8b + 10 \cdot 4a^6b^2 + 10 \cdot 8a^4b^3 + 5 \cdot 16a^2b^4 + 1 \cdot 32b^5$$
$$= \boldsymbol{a}^{10} + 10\boldsymbol{a}^8\boldsymbol{b} + 40\boldsymbol{a}^6\boldsymbol{b}^2 + 80\boldsymbol{a}^4\boldsymbol{b}^3 + 80\boldsymbol{a}^2\boldsymbol{b}^4 + 32\boldsymbol{b}^5$$

Ejemplo 2: determinamos el 6º término del desarrollo de (3x-x^3)^9 y determina el grado del término resultante.

$$t_{k+1} = t_6 \rightarrow \quad k+1 = 6 \rightarrow \quad k = 5t_4$$
$$= \binom{9}{5}(3x)^{9-5} \cdot (-x^3)^5$$
$$= \frac{9!}{4! \cdot 5!}(3x)^4(-x^{15}) = \frac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!}(-81x^{19})$$
$$= \mathbf{-10\,206x^{19}; grado\ 19}$$

Actividad 17. Resolvemos los siguientes problemas

1.- ¿Cuántos números de 3 dígitos se pueden formar con los dígitos 3, 4, 5, 6, 7 si los mismos pueden repetirse?
2.- Si se lanzó una moneda 3 veces consecutivas, ¿cuántos son los resultados posibles?
3.- ¿Cuántos números de 4 cifras que además son múltiplos de 5 existen?
4.- ¿Cuántas placas de automóvil pueden fabricarse utilizando sólo cifras pares?
5.- Sobre una circunferencia se marcan 9 puntos distintos. ¿Cuántos triángulos se pueden construir haciendo que sus vértices estén situados sobre esos 9 puntos?

Actividad 18. Resolvamos el siguiente problema:

1.- Calculamos el valor de los siguientes números combinatorios:
a) $\binom{5}{2}$ **b)** $\binom{11}{5}$ **c)** $\binom{14}{4}$
2.- Desarrollamos las siguientes expresiones por el Binomio de Newton con números combinatorios:
a) $(2a+3b)^5$
b) $(3x+5y)^6$
c) $\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{2}{3}\right)^7$
3.- Determinamos el 6º término del desarrollo de $(3x+2y)^8$ y determina el grado del término resultante.

¡Realicemos la VALORACIÓN!

Actividad 19. Realicemos el siguiente ejercicio:

1. En nuestro cuaderno de apuntes anotamos en qué se aplican las permutaciones, variaciones y combinaciones.
2. Anotemos en qué situaciones utilizamos consiente o inconscientemente el cálculo combinatorio.

¡Es hora de la PRODUCCIÓN!

Actividad 20. Realicemos la siguiente dinamica en aula:

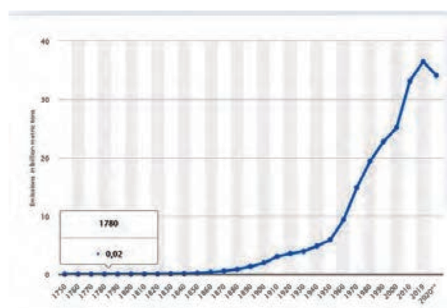
- Formamos equipos de trabajo para plantear desafíos con ejercicios de permutaciones, variaciones y combinaciones.
- Intercambiamos desafíos con entre equipos de trabajo.
- Cada equipo resuelve los desafios asignados y los socializamos en plenaria.

ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA EN PROCESOS PRODUCTIVOS Y FENÓMENOS SOCIALES

¡Iniciemos desde la PRÁCTICA!

Actividad 21. Analicemos los siguientes datos e interpretemos la información

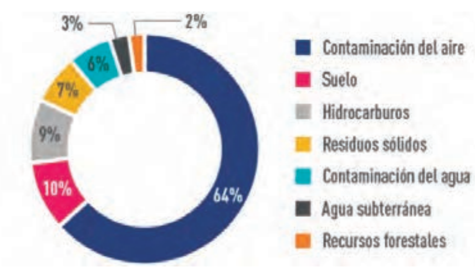
Estadísticas del cambio climático muestran que en 2020, la temperatura de la superficie de la tierra era alrededor de 0,98 grados Celsius más cálida que el promedio del siglo XX. En los últimos años, las temperaturas globales han estado constantemente entre las más calientes registradas.



La anomalía global en la temperatura de la superficie podría ser la causa de un aumento en el nivel del mar, una disminución del hielo ártico y el creciente número de catástrofes relacionadas con el clima, incluidas tormentas, inundaciones y sequías.

Emisiones globales de CO_2 relacionadas con la energía, se situaron en alrededor de 36,44 mil millones de toneladas métricas en 2019, un aumento significativo desde la era preindustrial. Sin embargo, las proyecciones para 2020 y 2021 muestran una notable reducción de emisiones debido a los impactos del COVID-19.

La actual tendencia de calentamiento es de particular importancia porque la mayor parte de ella (se estima que más de un 95%) es el resultado de la actividad humana desde mediados del siglo XX y procediendo a un ritmo sin precedentes a través de milenios.



La primera gráfica muestra las emisiones globales históricas de CO_2 de 1758 – 2020.

- ¿Qué información nos puedes brindar a partir de la 1ra gráfica?
- ¿Qué información nos puedes brindar a partir de la 2da gráfica?
- ¿Qué conocimientos tienes sobre la estadística?
- Menciona en qué situaciones o lugares observas el uso de la estadística.

¡Continuemos con la TEORÍA!

1. Definiciones fundamentales de Estadística

La estadística es una rama de las matemáticas que te permite recopilar, organizar y analizar datos según la necesidad que tengas, por ejemplo: obtener un resultado, comparar información, tomar mejores decisiones, entre muchas cosas más.
Recolección y organización de datos:

- La población de un estudio estadísticos el conjunto de objetos que tienen por lo menos una característica común.
- La muestra de un estudio estadístico es el subconjunto de la población sobre la que se realiza el estudio. Los resultados de la muestra se trasladan a la población.

2. Tipos de variable: cuantitativa (discretas y continuas) y cualitativas

Las características que se estudian en una población se llaman variables. Las variables pueden tomar distintos valores.

Variable cualitativas, sus variables se expresan mediante atributos o cualidades.
Variable cuantitativas, los valores se expresan por números.

- Variable cuantitativa discreta: proviene del conteo, mediante números enteros.
- Variable cuantitativa continua: proviene de la medición, mediante números reales.

3. Tablas de frecuencias y gráficos estadísticos

La frecuencia absoluta (f_i) de un valor x_i es la cantidad de veces que ese valor es observado. La suma de las frecuencias absolutas es igual al número total de datos.

La frecuencia relativa (h_i) de un valor es el cociente entre la frecuencia absoluta (f_i) y el número total de datos (n): $h_i = \frac{f_i}{n}$. La suma de frecuencias relativas es igual a la unidad.

La frecuencia relativa puede también expresarse en porcentaje y así se llama frecuencia relativa porcentual. La suma de frecuencias relativas porcentuales es igual a 100%.

Ejemplo 1: En un curso de Administración de Empresas, los estudiantes son evaluados cualitativamente con los conceptos A (el más alto), B, C, D y E (el más bajo). Las evaluaciones obtenidas son las siguientes:

C	A	B	C	A	B	C	A	D	E	C	A	C	E	B	B	D	E
C	D	B	C	E	C	B	D	E	C	C	B	B	C	A	C	A	A

a) Construye una tabla con las frecuencias relativa y absoluta

TABLA 1

EVALUACION	f_i	h_i	$h_i(\%)$
A	7	0,19	19%
B	8	0,22	22%
C	12	0,33	33%
D	4	0,11	11%
E	5	0,14	14%
TOTAL	36	1	100%

b) ¿Cuántos estudiantes obtuvieron la calificación A?
R.- f_A=7, la obtuvieron 7 estudiantes.
c) Sabiendo que la calificación mínima de aprobación es la calificación C, ¿Cuántos estudiantes están reprobados?
R.- sumamos las frecuencias absolutas de D y E:
$f_D+f_E=4+5=9$
9 estudiantes están reprobados.

- Frecuencia absoluta acumulada (f_i) de un valor x_i es la suma de las frecuencias absolutas de los valores menores o iguales que x_i.
- Frecuencia relativa acumulada (H_i) de un valor x_i es la suma de las frecuencias porcentuales de los valores menores o iguales que x_i.

Ejemplo 2: De la actividad anterior construyamos la tabla de frecuencias:

Tabla 2

EVALUACION	f_i	F_i	h_i	H_i	$h_i(\%)$	$H_i(\%)$
A	7	7	0,19	0,19	19%	19%
B	8	15	0,22	0,41	22%	41%
C	12	27	0,33	0,75	33%	75%
D	4	31	0,11	0,86	11%	86%
E	5	36	0,14	1	14%	100%

Distribución de frecuencias para datos agrupados

Cuando la variable es continua o cuando se recogen muchos datos distintos, es conveniente agrupar los distintos valores que toma la variable en conjuntos de valores que se llaman intervalos o clases, usualmente de la misma amplitud.

Ejemplo 3: la tabla muestra los salarios semanales (en Bs.) de 40 estudiantes de un lugar de comida rápida. Elabora una tabla de frecuencias con las frecuencias absolutas, relativas y acumuladas.

Tabla 3

Salario	Nro de Empleados
[300, 320]	10
[320, 340]	4
[340, 360]	5
[360, 380]	18
[380, 400]	3

Tabla 4

Salarios	f_i	h_i	$h_i\%$	F_i	H_i	$H_i\%$
[300, 320]	10	0,25	25%	10	0,25	25%
[320, 340]	4	0,1	10%	14	0,35	35%
[340, 360]	5	0,125	12,50%	19	0,48	48%
[360, 380]	18	0,45	45%	37	0,93	93%
[380, 400]	3	0,075	7,5%	40	1,00	100%
[300, 320]	40	1	100%			

200	150	780	2132	1976
208	624	2236	4404	5232
832	676	3172	3208	2132
988	3926	1196	2132	3728
728	2948	1248	2704	5928
988	1710	1716	1404	4108
468	2392	2028	4472	3174
624	3959	4040	1092	1040

Actividad 22. Los datos corresponden a los impuestos de vivienda (en Bs.) que 40 personas, elegidas al azar pagan anualmente.

a) Organiza los datos en orden decreciente:

b) Determina una amplitud de intervalo conveniente y agrupa los datos en una distribución de frecuencias con intervalos.

c) ¿Cuál es el intervalo que contiene los montos más comunes de contribuciones fiscales? ¿Cuál es su frecuencia relativa porcentual? ¿Y cuál frecuencia relativa porcentual acumulada hasta ese intervalo?

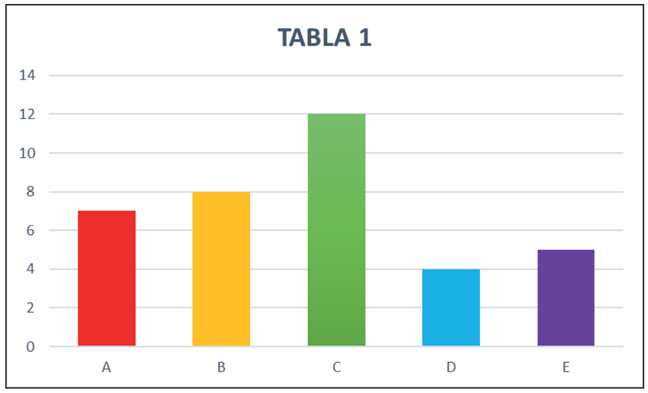
Diagrama de barras, histograma y polígono de frecuencias

El diagrama de barras se utiliza para representar variables cualitativas o cuantitativas discretas.

En el eje horizontal se indican los valores de la variable y, esos puntos, se levantan barras verticales de altura igual a las frecuencias que vamos a representar. Cada valor de la variable x, y se frecuencia absoluta f_i determinan un punto (x_i, f_i).

Si los puntos (x_i, f_i) se unen mediante segmentos resulta una línea poligonal que se llama polígono de frecuencias.

El histograma se utiliza para representar variables cuantitativas continuas cuyos valores se agrupan en intervalos.



Sobre el eje horizontal se indican los intervalos y se levantan rectángulos de base la amplitud del intervalo y la altura la frecuencia. La línea poligonal que une los puntos medios de los lados superiores de cada rectángulo es el polígono de frecuencias. Completando la curva poligonal aumentando un punto de frecuencia cero ubicado de manera equidistante en cada extremo de la escala horizontal.

Para elaborar un histograma, trazamos los rangos en el eje horizontal y graduamos hasta el valor máximo el eje vertical.

Trazamos las barras que indican el valor sin dejar espacios entre barras.

Para trazar el Polígono de frecuencias se debe unir con línea poligonal los puntos medios del borde superior de cada barra del histograma.

1.- Música. Los datos corresponden a las preferencias musicales que los jóvenes de una muestra manifestación en una encuesta telefónica. Elabora un diagrama de barras y un polígono de frecuencias.

a) Elaboramos una tabla de frecuencias.

b) Elabora un diagrama de barras de los datos mostrados.

Género musical	f_i
Reggaetón	12
Salsa	8
Tecno	5
Cumbia	10
Rock	15

60	52	51	40	36	28
17	16	18	40	42	60
23	34	31	45	38	53
47	58	10	5	3	12
16	43	44	56	57	6

2. - Educación. La siguiente tabla muestra las notas de 30 estudiantes que obtuvieron en una evaluación sobre 60 puntos. La nota mínima de aprobación es 30.

a) Elabora una tabla de frecuencias con datos agrupados en intervalos. Usa una amplitud conveniente.

b) ¿Cuál es el porcentaje de aprobados? ¿Cuál el de reprobados?

c) Elabora un histograma y polígono de frecuencias.

Gráfico de sectores o gráfico circular

En estos gráficos se representa un conjunto de cantidades que sumadas correspondientes al 100% de una población o una muestra.

Ejemplo: Representa mediante un gráfico circular o de sectores las frecuencias correspondientes a los votos válidos, blancos y nulos del referéndum sobre la extensión máxima de la propiedad agraria, realizado en enero de 2009.

Votos	Totales	Porcentaje
Válidos	2425981	69,16%
Blancos	893198	25,46%
Nulos	188551	5,38%
Emitidos	3507730	100%

Para trazar el ángulo:

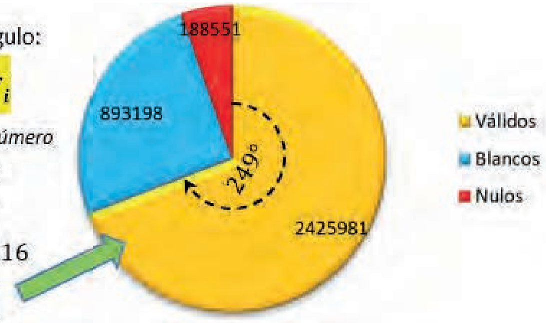
$$\alpha = \frac{360°}{n} \cdot f_i$$

n *representa el número total de elementos*

Ej. Votos válidos.

$$\alpha = \frac{360°}{100} \cdot 69.16$$

$$\alpha = \boxed{249°}$$



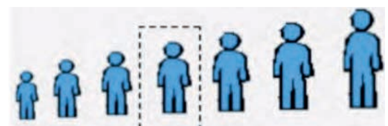
4. Medidas de tendencia central

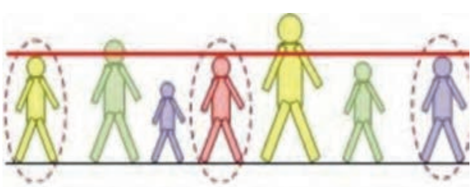
En la mayoría de los casos, el conjunto de datos obtenidos, ya sea de una muestra o de una población, tienden a reunirse alrededor de un valor central. De esta manera, es posible obtener un valor típico o representativo de todo el conjunto de datos, el cual se denomina medida de tendencia central

Media aritmética: La media aritmética es la medida de tendencia central más utilizada y la de mayor representatividad en los análisis estadísticos. Representa el promedio del conjunto de datos de la muestra. Su cálculo se realiza con la suma de todos los valores de los datos, dividida entre el número de datos que componen la muestra.

$$\boxed{\overline{x} = \frac{\sum_{i=0}^{n} x_i}{n}} \text{ ó } \boxed{\overline{x} = \frac{\text{suma de valores}}{\text{cantidad de valores}}}$$

Mediana: La mediana Me en un conjunto de datos es el valor que ocupa el lugar central, de tal forma que aquel valor deja el 50% de las observaciones por debajo de él y el otro 50% por encima de él





Moda: En la vida cotidiana se escucha la expresión "está de moda" cuando algo se observa o se presenta repetidamente. En estadística, el concepto de la moda no se aleja de esta apreciación y, efectivamente, se denomina moda de un conjunto de datos al valor que más se presenta, es decir, el atributo o el valor de mayor frecuencia. La moda se representa por Mo y puede ser aplicada a las variables cualitativas y cuantitativas discretas o continuas.

Actividad 23:

1.- Calculamos la media aritmética, mediana y moda de la siguiente serie de datos:

0	0	0	1	1	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	7	8	8	9	9	9	9

2.- La tabla muestra las temperaturas registradas en Trinidad durante las horas de sol de un cierto día.

Temperatura °C	21	22	24	27	28	29	31	32	32	31	26	29
Hora	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18

Calcula la temperatura promedio del día durante las horas de sol, la mediana y moda.

3.- Las edades en cm, de 25 estudiantes son: 158, 160, 168, 156, 166, 158, 160, 168, 160, 168, 158, 156, 164, 162, 166, 164, 168, 160, 162, 162, 162, 158, 156, 166, 160.
Realiza un recuento de datos y construye una tabla de frecuencias. Calcula la media aritmética, la mediana y la moda.

5. Cuartiles, deciles y percentiles

Cuartiles:

Los cuartiles (Q_k) son valores que fraccionan la distribución de los datos en cuatro partes iguales. Existen tres cuartiles y cada una de las partes representa un 25% de los datos.
El cálculo de los cuartiles se realiza mediante el siguiente procedimiento:
1. Ordenar los datos de forma ascendente.
2. Calcular la posición con la ecuación: $i = \left(\frac{k}{4}\right) \cdot n$ Donde K es el número del cuartil (k = 1, 2, 3) y ***n*** el número total de datos.
3. Si i no es un número entero, se debe redondear al entero siguiente y el valor que ocupa esta posición será el cuartil requerido. Si i es un número entero, el cuartil es el promedio de los valores i,i+1.

Ejemplo: La talla de los neonatos prematuros nacidos en los partos durante una noche en un hospital fueron: 40, 37, 29, 31, 32, 38, 38, 38 cm.; para el cálculo de los cuartiles se empleará el procedimiento del ejemplo anterior, teniendo en cuenta el resultado obtenido al calcular la posición.

- *Primer paso:* ordenamos los datos de forma ascendente: 29, 31, 32, 37, 38, 38, 38, 40.

$i_1 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_4 \quad i_5 \quad i_6 \quad i_7 \quad i_8$

- *Segundo paso*: para el cuartil Q_1 la posición sería: $i = \left(\frac{1}{4}\right) \cdot 8 = 2$

- *Tercer paso*: dado que es un entero, el cuartil Q_1 corresponde al promedio entre los valores ubicados en las posiciones 2 y 3. $Q_1 = \frac{31+32}{2} = 31{,}5\ cm$. Su interpretación significa que el 25% de los neonatos prematuros presentaron una talla máxima de 31,5cm.

- El cuartil Q_2, la posición sería: $i = \left(\frac{2}{4}\right) \cdot 8 = 4$ y sería el promedio entre los valores ubicados en las posiciones 4 y 5. $Q_2 = \frac{37+38}{2} = 37{,}5cm$. Su interpretación significa que el 50% de los neonatos prematuros presentaron la talla máxima de 37,5 cm, igual a la mediana.

- Para el Q_3, la posición será: $i = \left(\frac{3}{4}\right) \cdot 8 = 6$ y sería el promedio entre los valores ubicados en las posiciones 6 y 7. Esto es, $Q_3 = \frac{37+38}{2} = 37{,}5$cm. Su interpretación significa que el 75% de los neonatos prematuros presentaron una talla máxima de 37,5 cm.

Deciles:

Los deciles (Dk) son valores que fraccionan la distribución de los datos en diez partes iguales). En la distribución se presentan nueve deciles: el D1 acumula el 10% del conjunto de datos, el D2 deja el 20%, y así sucesivamente hasta el D9, que acumula el 90% de los datos. Para el cálculo de los deciles se usa un procedimiento similar al de los cuartiles:

Percentiles:

Los percentiles $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{99}$ son los valores que dividen en 100 partes iguales (o aproximadamente iguales) un conjunto de datos $\{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n\}$ ordenado de manera ascendente.

Para calcular el valor percentil P_m, calculamos el valor de $\boldsymbol{j = \left(\frac{m}{100}\right) n.}$

- Si j es un número entero, entonces: $\boldsymbol{P_m = \frac{x_j + x_{j+1}}{2}}$
- Si j no es un número, su valor es redondeado hacia la mitad superior más cercana: $\boldsymbol{P_m = x_j}$.

65	45	51	87	98	67	98	45
89	94	67	48	68	98	100	51
65	68	69	75	86	86	87	93

Actividad 24: Las calificaciones (sobre 100) de 20 estudiantes en el área de Comunicación y Lenguajes fueron las siguientes:

- Calcula la media aritmética, la moda y mediana.
- Determina los cuartiles y percentiles. Interpreta los resultados.

Actividad 25: Se le consultó a un grupo de siete estudiantes sobre el número de horas semanal que dedican para el repaso de los temas vistos en clase, obteniendo los siguientes resultados: 3, 5, 2, 7, 6, 4, 9 horas. Calcula sus cuartiles.

6. Medidas de dispersión

Las medidas de dispersión indican cuán dispersos están los datos respecto de la media aritmética. Cuando un conjunto de valores es muy disperso, la media aritmética no es representativa.

Rango: El rango o recorrido es la diferencia entre el valor mayor y el valor menor.

$$\mathbf{R = x_{máx} - x_{mín}}$$

Ejemplo: En una habitación hay tres hombres adultos, de 170cm, 180cm y 184cm de estatura, y tres bebés, de 61cm, 65cm y 72cm de estatura.

¿Cuál es el rango o recorrido de la información?

Rango=184-61= 123cm ← Este rango es alto e indica que los datos tienen alta dispersión. La dispersión alta explica que la media no es muy representativa.

Actividad 26:

1.- Las calificaciones, sobre 100 puntos, de cuatro amigas en algunas áreas durante en el primer trimestre fueron:

Juana: 70, 65, 80, 65, 57 — Abi: 90, 85, 75, 60, 80

Luisa: 45, 72, 60, 65, 70 — Olga: 65, 70, 75, 67, 70

¿las notas de qué estudiante tienen mayor dispersión?

Desviación media

El rango es simple de calcular, pero es severamente afectado por un valor atípico. Una manera de disminuir el efecto de valores atípicos consiste en calcular la desviación media.

La desviación media DM es la media aritmética de los valores absolutos de las desviaciones de cada dato respecto del promedio.

$$\mathbf{DM} = \frac{\sum_{i=1}^{n} |x_i - \bar{x}|}{n}$$

Ejemplo: Calculemos la desviación media y el rango de la siguiente tabla de datos.
Cantidad de viviendas en Chuquisaca por provincia: Fuente Censo 2012.

Provincia	Oropeza	Azurduy	Zudañez	Tomina	H. Siles	Yamparaez	Nor Cinti	Belisario Bueno	Sud Cinti	Luis Calvo
N° de viviendas (Miles)	86.7	7.7	11.6	11.6	9.6	9.2	23.6	4.6	8.1	5.6

- La media de los datos es $\bar{x} \simeq 17{,}8$; por tanto, la desviación media está dada por:

$$DM = \frac{|86.7 - 17.8| + |7.7 - 17.8| + \cdots + |8.1 - 17.8| + |5.6 - 17.8|}{10} \simeq 14.9 \text{ mil viviendas.}$$

- El rango está dado por: $R = 86.7 - 4.6 = 82.1$ mil viviendas.

- **Promedio:** Esta función nos devuelve la media aritmética de los números o del rango que está entre paréntesis o Ejemplo: =promedio(4,5,6) nos devuelve el valor 5.
- **Max:** esta función nos devuelve el valor máximo de una lista de números o de celdas. Por ejemplo: o Ejemplo: =max(1,12,125) nos devuelve el valor 125.
- **Min:** esta función nos devuelve el valor mínimo de una lista de números o de celdas. Por ejemplo: o Ejemplo: =min(1,12,125) nos devuelve el valor 1.
- **Moda:** esta función nos devuelve el valor más repetido de una lista de números o de celdas. o Ejemplo: =moda(1,2,2,3,4) nos devuelve el valor 2 (el más repe).

¡Realicemos la valoración!

Actividad 27.

1. Investigamos datos estadísticos sobre las siguientes temáticas.
   - Violencia familiar
   - Contaminación del aire
   - Depresión juvenil
2. Analizamos reflexivamente para responder las siguientes preguntas:
   - ¿Cuáles son los aspectos más relevantes que te llaman la atención de los datos encontrados?
   - ¿En qué ámbitos de nuestro contexto puedes evidenciar el uso de la estadística?
   - ¿Como aplicamos la estadística en procesos productivos de la comunidad?

¡Es hora de la producción!

Actividad 28.

Con la información anterior, elegimos una de las temáticas de violencia familiar, contaminación del aire o depresión juvenil y elaboramos solo siguiente:
- Tabla de frecuencias con los datos encontrados.
- Gráficos estadísticos que represente la información encontrada.

Socializamos en una plenaria, interpretando la imagen gráfica.

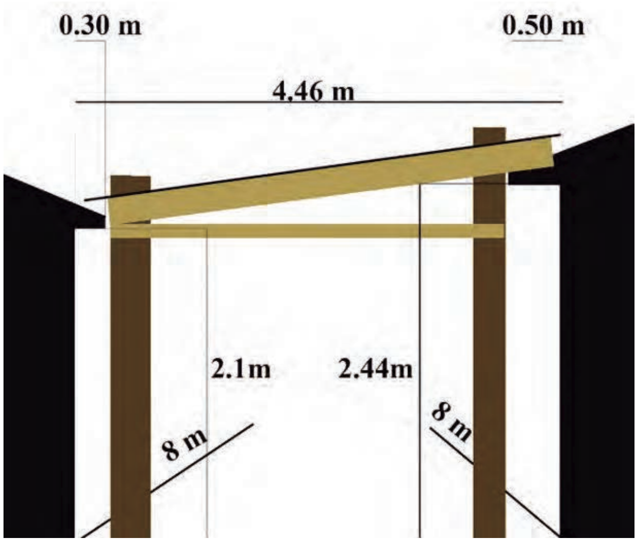
TRIGONOMETRÍA Y LA APLICACIÓN EN LA TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Analicemos la siguiente historia

En temporada de lluvia la familia Angulo, decidió construir un techo para cubrirse de la lluvia y que la ropa ya no se moje, entre ambos cuartos hay una distancia de 4.46 metros, el cuarto que está ubicado a la derecha tiene una altura de 2.44 metros y el cuarto de la izquierda tiene una altura de 2.1 metros, así también el cuarto de la derecha tiene una visera de 0.50 metros y el de la izquierda 0.30 metros.

Calculemos de manera creativa todas las medidas de las vigas y calaminas que se requerirá ya que de fondo tiene una distancia de 8 metros, así también como las inclinaciones que exista, tipos de madera y precios.



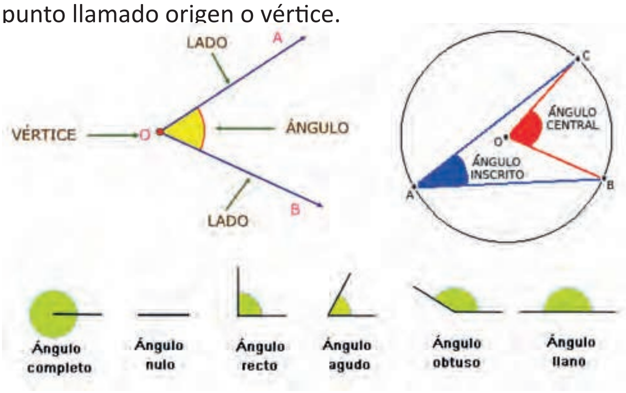
Actividad 29. A partir de la presente experiencia responde las siguientes interrogantes:

1. ¿En otro proyecto es posible aplicar los conocimientos de la trigonometría?
2. ¿De qué manera nos ayuda la trigonometría a dar soluciones a un problema de tu contexto o comunidad?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

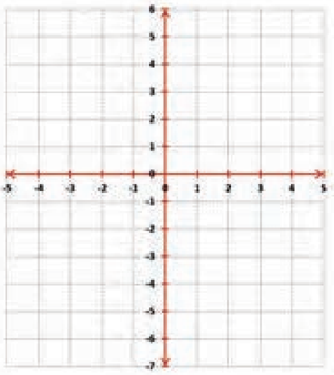
Para abordar la unidad, tomemos en cuenta la siguiente información:

Ángulo. Es el espacio comprendido entre dos semirrectas (lado inicial y lado terminal) que se cortan en un mismo punto llamado origen o vértice.



Actividad 30. En el cuaderno de ejercicios graficamos los siguientes puntos:

a) $A(2,5)$
b) $B(-3,4)$
c) $C(-1,-6)$
d) $D\left(\frac{7}{2},-3\right)$
e) $E(0,-4)$
f) $F(1,\sqrt{7})$
g) $G(-\pi,-e)$



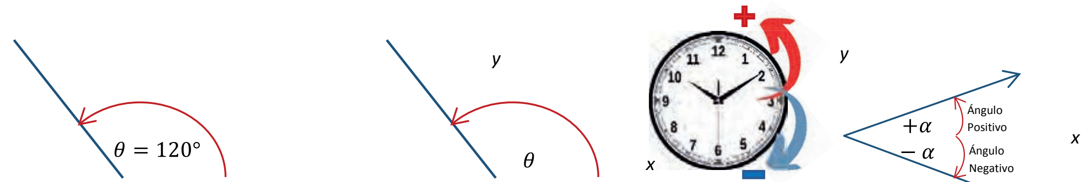
1.Definicion de trigonometría.
Es una parte de la matemática que estudia las relaciones de los lados y ángulos de un triangulo

2. Ángulo trigonométrico y medida angular

Ángulo trigonométrico y ángulos en posición central o normal

Es aquel ángulo que se genera por la rotación de un rayo alrededor de un punto fijo llamado vértice u origen desde una posición inicial hasta otra posición final, debiendo considerar que esta rotación se efectúa en un mismo plano. Por lo tanto, debemos considerar dos tipos de rotación:

Un ángulo está en posición central o normal si su vértice está en el origen del plano de coordenadas rectangulares y su lado inicial coincide con el eje positivo “x”.

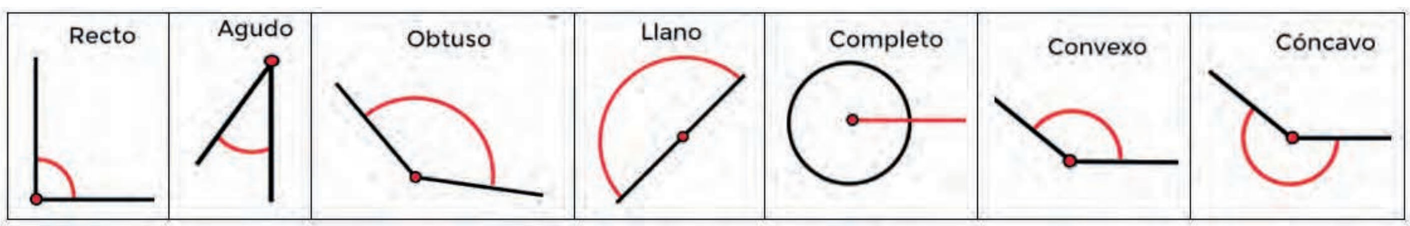


Ángulo trigonométrico *Ángulo en posición central*

- Un ángulo es positivo si la rotación se realiza en sentido antihorario (levógiro).
- Un ángulo es negativo si la rotación se realiza en sentido horario (dextrógiro).

Si el lado terminal de un ángulo en posición central o normal θ se localiza en un determinado cuadrante, se dice entonces que θ está en, o que pertenece a dicho cuadrante.

Clasificación de los ángulos:



Ángulos coterminales: Dos o más ángulos son coterminales cuando tienen el mismo lado inicial y el mismo lado Terminal.

$$\boldsymbol{\beta = 1\,vuelta + \alpha}$$

Ejemplo. - Un ángulo mide, $\theta = 60°$ y es un ángulo normal. Hallar dos ángulos positivos y negativos que sean coterminales con .

1er. ángulo coterminal positivo:

$$60° + 360° = 420°$$

2do. ángulo coterminal positivo:

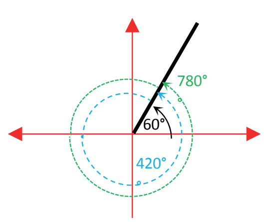
$$60° + 720° = 780°$$

1er. ángulo coterminal negativo:

$$60° - 360° = -300°$$

2do. ángulo coterminal negativo:

$$60° - 720° = -660°$$



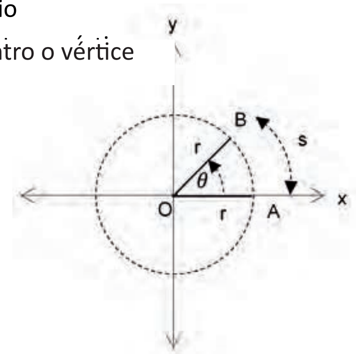
Ángulo central: El vértice se encuentra en el centro de una circunferencia; los lados vienen a ser el radio de dicha circunferencia.

s = longitud del arco A a B

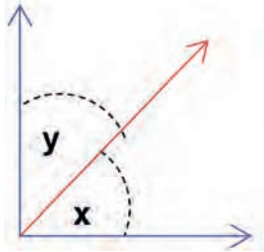
= ángulo central

= radio

O = centro o vértice

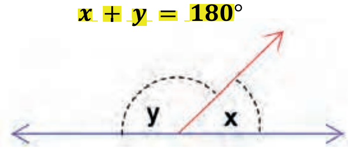


Ángulos complementarios: Dos ángulos son complementarios cuando sumados dan 90°.
Los ángulos de la figura son complementarios porque: $x + y = 90°$



Ángulos suplementarios: Dos ángulos son suplementarios cuando sumados dan 180°.
Los ángulos de la figura son suplementarios porque:

$x + y = 180°$



Actividad 31. Realicemos los siguientes calculos y gráficos.

Graficamos los ángulos positivos y negativos

1) $46°$ 3) $-160°$
2) $200°$ 4) $-314°$

Calculamos y graficamos el ángulo coterminal

1) $45° + 360° =$ 3) $95° - 360° =$
2) $100° + 720° =$ 4) $350° - 720° =$

Calculamos y graficamos el ángulo complementario

1) $17° + \beta = 90°$ 3) $45° + \beta = 90°$
2) $\alpha + 38° = 90°$ 4) $\alpha + 33° = 90°$

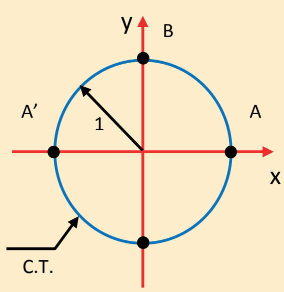
Calculamos y graficmosa el ángulo suplementario

1) $19° + \beta = 180°$ 1) $117° + \beta = 180°$
2) $\alpha + 48° = 180°$ 2) $\alpha + 98° = 180°$

Medida angular y determinación de un punto en el círculo unitario

Círculo trigonométrico

Si logramos que el centro de una circunferencia coincida con el origen de coordenadas rectangulares y que esta circunferencia tenga un radio cuya medida sea la unidad del sistema, entonces estamos hablando del llamado Círculo Trigonométrico o Circunferencia Trigonométrica.



Donde:
A : Origen de Arcos.
B : Origen de Complementos.
A' : Origen de Suplementos.
C.T. : Circunferencia Trigonométrica.

Ángulo en Posición Normal

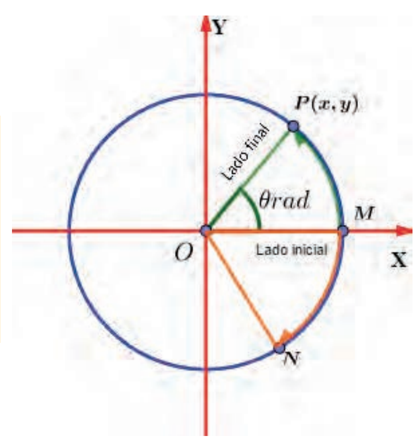
En el plano cartesiano el origen del ángulo en el centro y el lado inicial coincide con el eje x y el lado final con el punto P(x,y).

Dónde: $\overset{\frown}{MP}$ y $\overset{\frown}{MN}$ son arcos en posición normal.

(Numéricamente)
¡¡¡Recordar!!!

$\boxed{q = \overset{\frown}{MP}}$

Es muy frecuente que debido a esto igualdad la medida del ángulo central se coloque en el extremo final del arco en posición normal.



3. Sistemas de medicion de angulos

Existen varios sistemas de medición de ángulos, pero los más utilizados son tres:

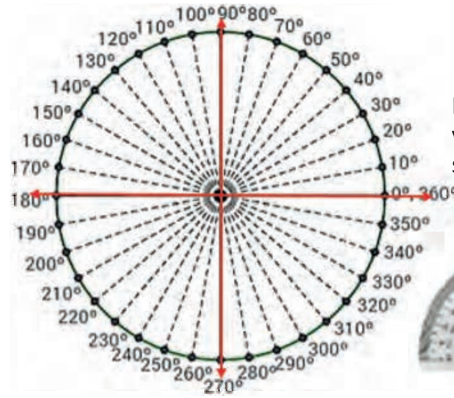
- Sistema Sexagesimal
- Sistema Centesimal
- Sistema Radial

Sistema Sexagesimal (S)

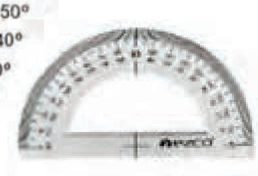
Llamado Sistema Inglés, es aquel que tiene como unidad a: Un Grado Sexagesimal → 1°
Dicho sistema divide al ángulo de una vuelta (1 v) en 360 partes iguales y a cada parte se le denomina 1° por lo tanto: 1 vuelta = 360°
Sus unidades:

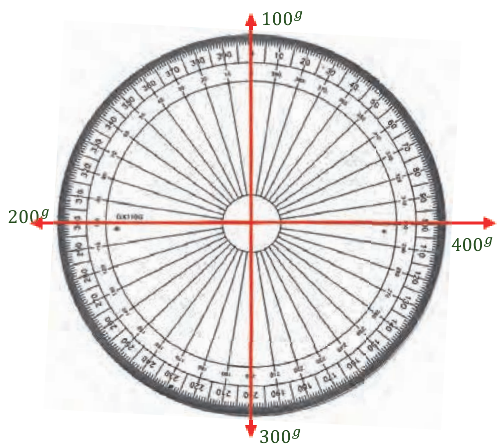
1 minuto sexagesimal →1'
1 segundo sexagesimal → 1"

Equivalencia: 1°=60'=>1^'=60"=> 1°=3600"



Los transportadores vienen en el sistema sexagesimal.





Sistema Centesimal (C)

Llamado también francés, es aquel que tiene como unidad a: Un Grado Centesimal → 1g
Dicho sistema divide al ángulo de una vuelta (1 v) en 400 partes iguales y a cada parte se le denomina 1g por lo tanto:

1 vuelta = 400^g

Sus unidades:

1 minuto centesimal → 1m
1 segundo centesimal → 1s

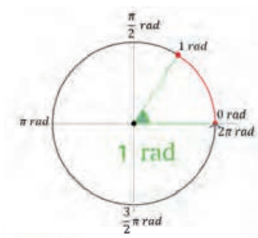
Equivalencia:
$1^g=100^m$ => $1^m=100^s$
=> $1^g=10000^s$

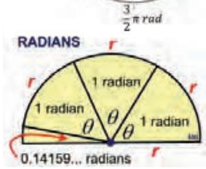
Sistema Radial

En este sistema la medida del ángulo central, es el arco correspondiente a la longitud igual al radio de la circunferencia, esta unidad de medida corresponde a un radián.

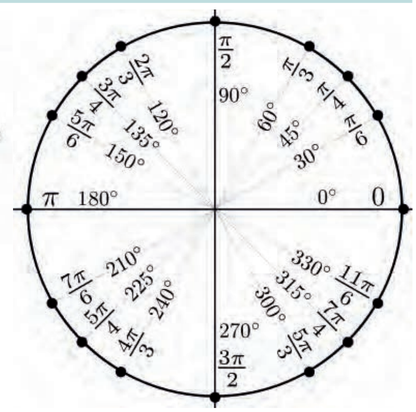
1 vuelta = 2π rad

Sus unidades:
Radián: El ángulo descrito por la proyección de un radio en una circunferencia.





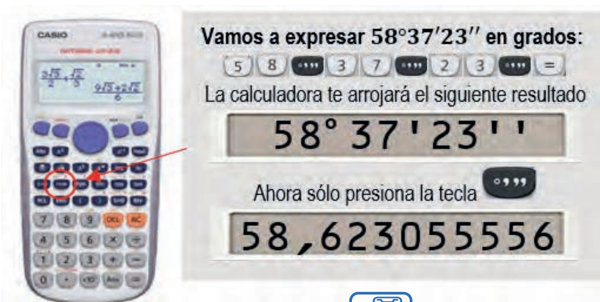
½ vuelta = 3,1415... rad



4. Conversión de un ángulo de un sistema a otro

Para convertir los ángulos de un sistema a otro, consideramos la siguiente relación:

Vuelta	Cuadrante	S. Sexagesimal	S. Circular
¼ vuelta	$I\ C$	90°	$\pi/2\ rad$
½ vuelta	$II\ C$	180°	$\pi\ rad$
3/2 vuelta	$III\ C$	270°	$3\pi/2\ rad$
1 vuelta	$IV\ C$	360°	$\pi\ rad$



Relación Fundamental de conversión de ángulos trigonométricos: Es la relación que existe entre los números de grados sexagesimales (S), grados centesimales (C), y el número de radianes (R) que contiene un ángulo trigonométrico. En el gráfico tenemos:

$$\frac{S}{180^\circ} = \frac{C}{200^g} = \frac{R}{\pi\ rad}$$

Escanea el QR

Mira el siguiente video

Ejemplo 1: convertimos 15° a radiantes

Datos:

S = 15° (ángulo en grados sexagesimales)

R = ? (convertir a ángulo en Radianes)

Recordemos:

$$\frac{S}{180°}=\frac{C}{200^g}=\frac{R}{\pi\, rad} \quad \text{(Relación Fundamental)}$$

Entonces:

$$\frac{R}{\pi\, rad}=\frac{S}{180°}$$ *(Relación a utilizar según datos o par de la fórmula general)*

$$R=\frac{S\cdot\pi\cdot rad}{180°}$$ *(Despejando R y sustituimos S= 15°)*

$$R=\frac{15°\cdot\pi\cdot rad}{180°}$$ *(Simplificamos)*

$$R=\frac{\pi}{12}\, rad=\boxed{0{,}26 rad}$$

Ejemplo 2: Convertimos $\frac{\pi}{5}rad$ o grados sexa

Datos:

R = $\frac{\pi}{5}rad$ (ángulo en Radianes)

S = ? (ángulo en Sexagesimales)

Recordemos:

$$\frac{S}{180°}=\frac{C}{200^g}=\frac{R}{\pi\, rad} \quad \text{(Relación Fundamental)}$$

Entonces:

$$\frac{S}{180°}=\frac{R}{\pi\, rad}$$ *(Relación a utilizar según datos)*

$$S=\frac{R\cdot 180°}{\pi\cdot rad}$$ *(Despejando S)*

(Sustituimos R= $\frac{\pi}{5}rad$)

$$S=\frac{\frac{\pi}{5}rad\cdot 180°}{\pi\cdot rad}$$ *(Simplificación)*

$$R=\boxed{36°}$$

Actividad 32.

Completemos los datos en el cuaderno de ejercicios

1. Completar la siguiente tabla:

N.º	Grados	Radianes	Grades
1		$1\, rad$	
2		$\sqrt{31}\, rad$	
3			57.7^g
4	$-456°$		
5		$3/4\, rad$	
6			π^g
7	$15^0 2'30''$		
8		$0{,}2964\, rad$	
9	$-45°30''$		
10			-345.5^g

2. Une con una flecha el ángulo a su gráfica.

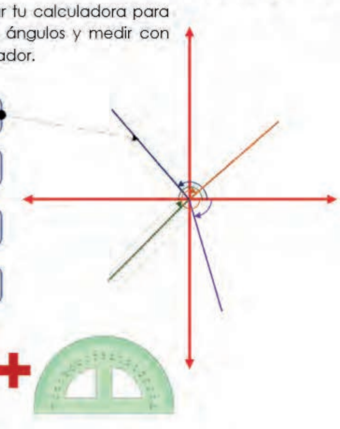
Debes utilizar tu calculadora para convertir los ángulos y medir con un transportador.

a) $2{,}3\, rad$

b) $-1{,}3\, rad$

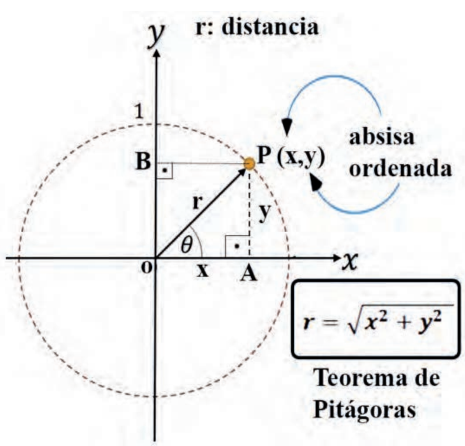
c) $\frac{5}{4}\pi\, rad$

d) $-\sqrt{31}\, rad$



Funciones trigonométricas

Si P(x,y) es un punto de la circunferencia unitaria con centro en el origen, forma un ángulo θ con el eje "x", teniendo las principales funciones trigonométricas, representadas como razón de segmentos, de la siguiente manera:



$$Seno\ \theta \Rightarrow \mathbf{Sen}\ \theta=\frac{ordenada}{distancia}=\frac{y}{r}$$

$$Coseno\ \theta \Rightarrow \mathbf{Cos}\ \theta=\frac{abscisa}{distancia}=\frac{x}{r}$$

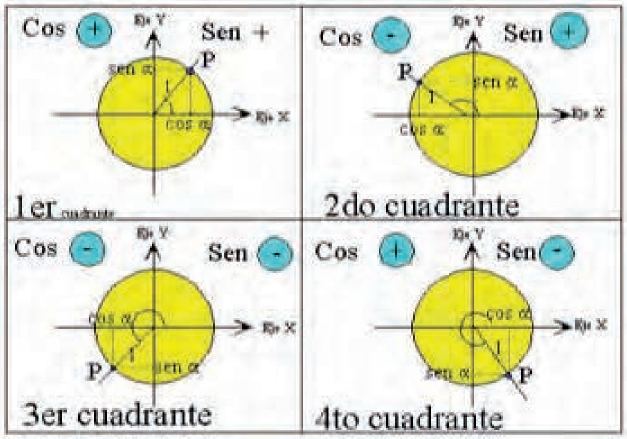
$$Tangente\ \theta \Rightarrow \mathbf{Tan}\ \theta=\frac{ordenada}{abscisa}=\frac{y}{x}$$

$$Cotangente\ \theta \Rightarrow \mathbf{Cot}\ \theta=\frac{abscisa}{ordenada}=\frac{x}{y}$$

$$Secante\ \theta \Rightarrow \mathbf{Sec}\ \theta=\frac{distancia}{abscisa}=\frac{r}{x}$$

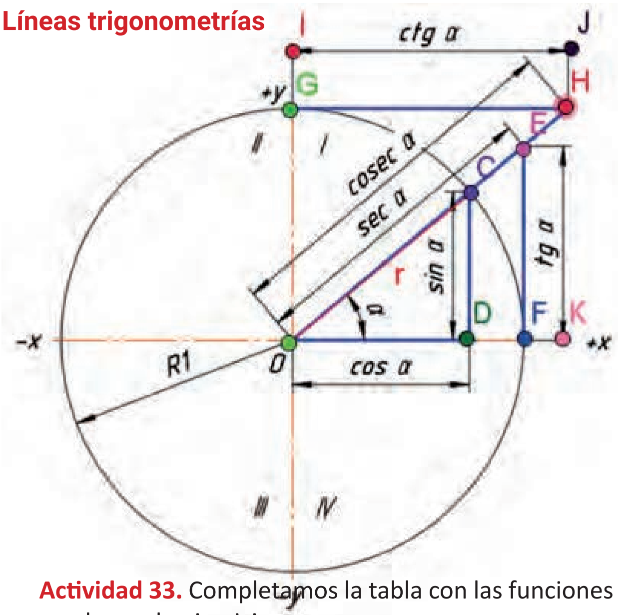
$$Cosecante\ \theta \Rightarrow \mathbf{Csc}\ \theta=\frac{distancia}{ordenada}=\frac{r}{y}$$

Signos de las Funciones Trigonométricas en los cuadrantes



	I C	II C	III C	IV C
sin θ	+	+	-	-
cos θ	+	-	-	+
tan θ	+	-	+	-
cot θ	+	-	+	-
sec θ	+	-	-	+
csc θ	+	+	-	-

Líneas trigonometrías



$$\text{Sen } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{distancia}} = \frac{CD}{OC} = CD$$

$$\text{Cos } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{distancia}} = \frac{OD}{OC} = OD$$

$$\text{Tan } \theta = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{CD}{OD} = EF$$

$$\text{Cot } \theta = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{OD}{CD} = GH$$

$$\text{Sec } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{abscisa}} = \frac{OC}{OD} = OF$$

$$\text{Csc } \theta = \frac{\text{distancia}}{\text{ordenada}} = \frac{OC}{CD} = OH$$

Actividad 33. Completamos la tabla con las funciones faltantes en el cuaderno de ejercicios:

Funciones Trigonométricas	**Razones**	
Función Seno	$Sen\ \theta = \frac{ordenada}{distancia}$	$Sen\ \theta = \frac{y}{1} = y$
Función Coseno	$Cos\ \theta = \frac{abscisa}{distancia}$	
Función Tangente	$Tan\ \theta = \frac{ordenada}{abscisa}$	
Función Cotangente	$Cot\ \theta = \frac{abscisa}{ordenada}$	$Cot\ \theta = \frac{x}{y}$
Función Secante	$Sec\ \theta = \frac{distancia}{abscisa} = \frac{r}{x}$	
Función Cosecante	$Csc\ \theta = \frac{distancia}{ordenada}$	

Actividad 34. Graficamos los ángulos en el cuaderno de ejercicios:

1. En el plano Cartesiano grafica los siguientes ángulos e indica el cuadrante en que pertenecen:

a) 75°

b) $\frac{10\pi}{9}$rad

c) $-85°$

d) $-\frac{5\pi}{3}$

6. Gráfica de funciones trigonométricas y sus propiedades periódicas

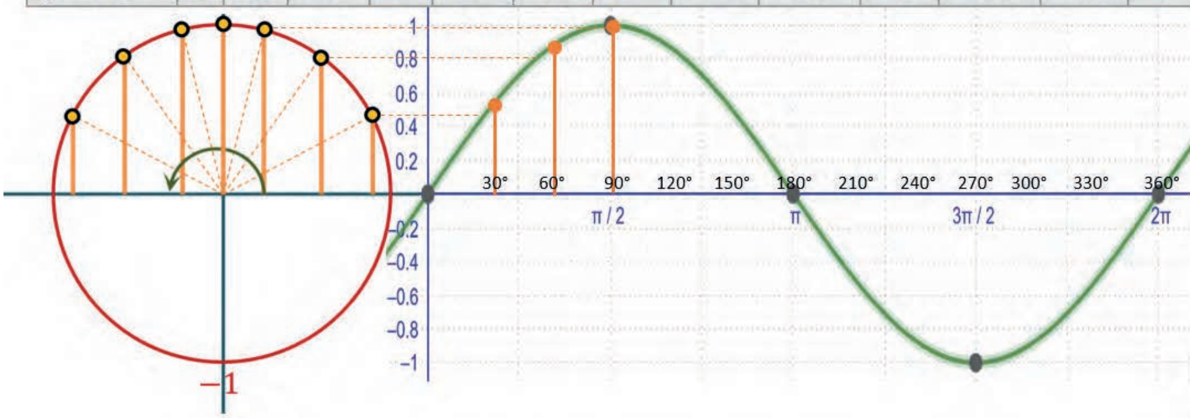
Los fenómenos ondulatorios como la luz, el sonido entre otros, se representan por medio de las funciones trigonométricas.

Gráfica de la función Seno: y = sen x, donde - ∞ < x < ∞

Comenzamos por construir la tabla que se encuentra a la izquierda, para y = sen x, donde los valores de x están determinados por: $0 \le x \le 2\pi$, comenzando en el origen.

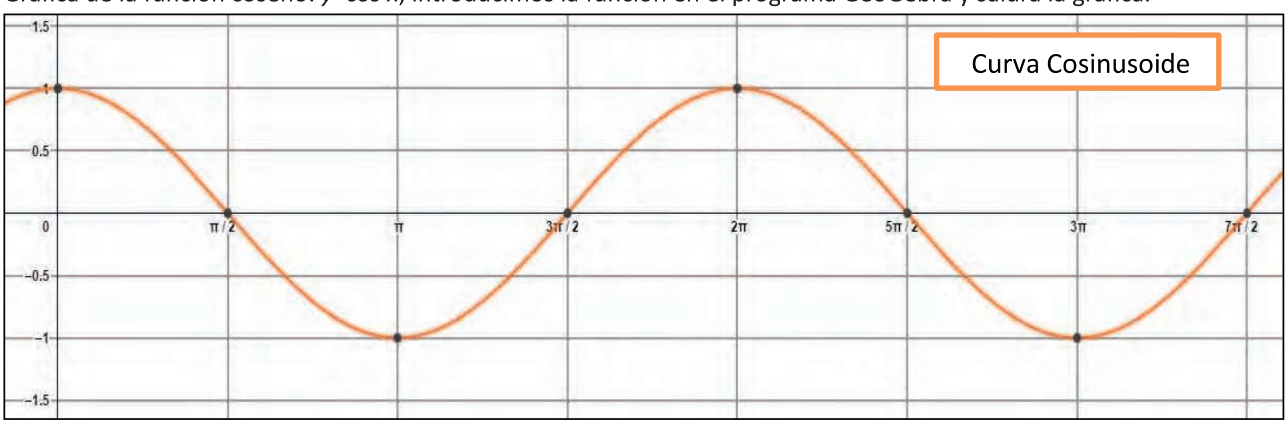
Conforme crece x desde 0 a $\frac{\pi}{2}$, el valor crece de 0 a -1. Así se va realizando un análisis de la gráfica, viendo si crece o decrece. Si trazamos los puntos obtenidos en la tabla y lo unimos por medio de una curva suave, se obtiene el siguiente gráfico, que se muestra a continuación:

x	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$y = \text{sen}\, x$	0	0,5	0,87	1	0,87	0,5	0	−0,5	−0,87	−1	−0,87	−0,5	0



Periodo. - Por sentido común ya se tiene una idea del concepto del periodo de una función. Por ejemplo, si un jueves se le pregunta ¿Qué día de la semana será dentro de 15 días? Su respuesta será "viernes" porque se comprende que los días de la semana se repiten cada 7 días y 15 días es 2 semanas más un día. Es decir, se repite el periodo de 7 días 2 veces.
Definición de función periódica: Una función f es periódica si existe un número real positivo k tal que: $f\ (t + k) = f\ (t)$
Para toda f en el dominio de f. Este número real positivo k mínimo si existe, es el periodo de f.

Gráfica de la función coseno: *y=cos x*, introducimos la función en el programa GeoGebra y saldrá la gráfica.

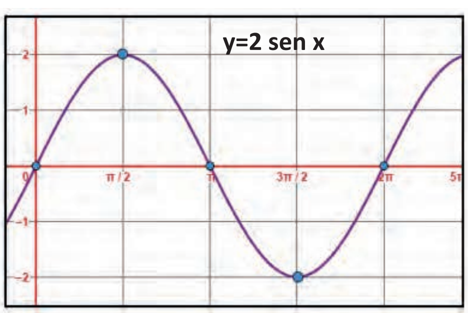


1.- Su dominio es $\mathbb{R}$.
2.- Rango de intervalo $[-1, 1]$.
3.- La función es continua en todo $\mathbb{R}$.
4.- La grafica corta al eje Y en $[0,1]$.
5.- La función es periódica $T = 2\pi$.
6.- La función es par.

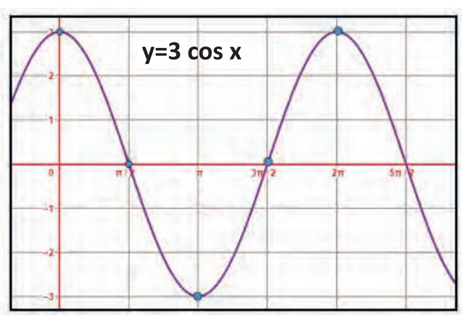
Las funciones seno y coseno son funciones periódicas de periodo 2π y se comportan en forma uniforme en cada cuadrante asumiendo valores entre -1 y +1.
(Introducimos la función en el programa GeoGebra y saldrá la gráfica)

Ejemplo: Utiliza el programa GeoGebra para graficar las funciones:

x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	1
π	2
$3\frac{\pi}{2}$	-2
2π	0

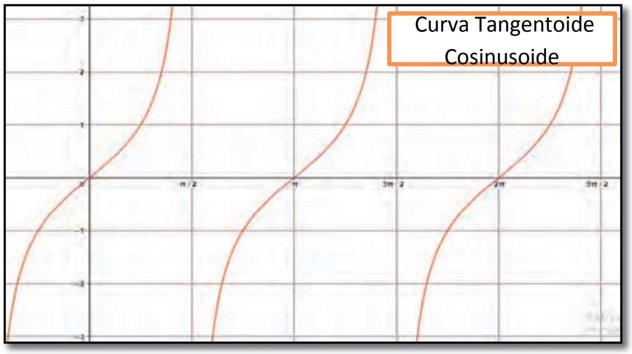


x	y
0	3
$\frac{\pi}{2}$	0
π	-3
$3\frac{\pi}{2}$	0
2π	3



Gráfica de la Función tangente: y=tan x

x	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$y = \tan x$	0,00	$-6{,}41$	0,32	$\nexists$	0,71	$-1{,}02$	1,34	$-0{,}53$	2,90	$\nexists$	45,24	0,13	$-3{,}38$



1) A diferencia de las gráficas anteriores esta función no es continua, esto se debe a las interrupciones que presenta en los valores excluidos de su dominio.
2) El dominio es $\mathbb{R} - \left\{\pm\frac{\pi}{2}, \pm\frac{3\pi}{2}, \pm\frac{5\pi}{2}, \ldots\right\}$.
3) La grafica corta al eje Y en (0,0).
4) Es una función periódica con periodo $T = \pi$.
5) La función es impar, la gráfica es simétrica con respecto al origen.

Función Cotangente: y=ctg (x)

x	0	30	60	90	120	150	180	210	240	270	300	330	360
$y = \text{ctg}\,(x)$	$\nexists$	$-0{,}16$	3,12	0	1,40	$-0{,}98$	$\nexists$	$-1{,}89$	0,34	0	0,02	7,49	$\nexists$

1.- No es continua.

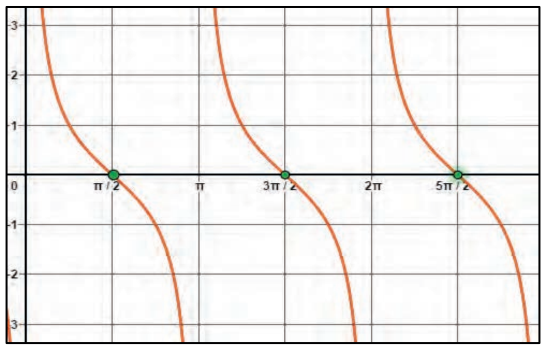
2.-Dominio=$\mathbb{R} - \{0, \pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots\}$.

3.- Es una función periódica $T = \pi$.

$ctg\ x = ctg\ (x + \pi)$.

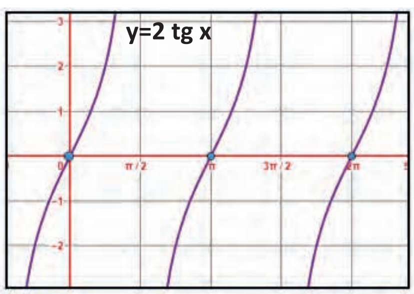
4.- No corta al eje Y.

5.- Es una función impar.

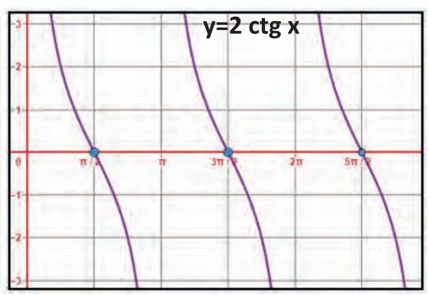


Ejemplo: Utiliza el programa GeoGebra para graficar las funciones:

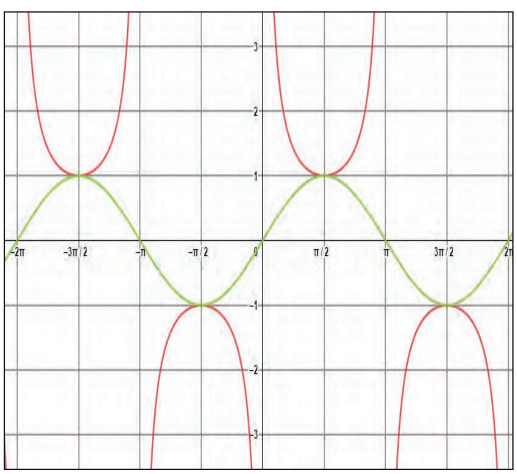
x	y
0	0
$\frac{\pi}{2}$	$\pm\infty$
π	0
$3\frac{\pi}{2}$	$\pm\infty$
2π	0

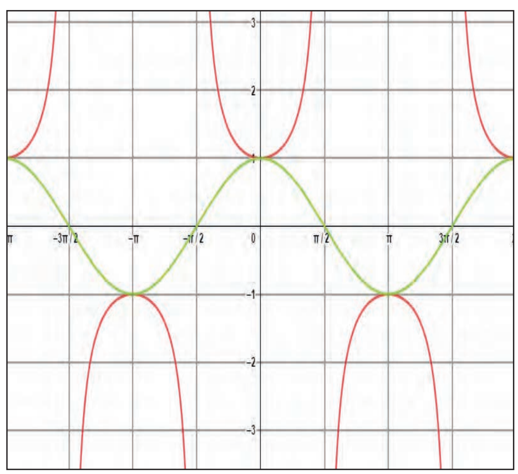


x	y
0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{2}$	0
π	$\pm\infty$
$3\frac{\pi}{2}$	0
2π	$\pm\infty$



Función Secante y función Cosecante



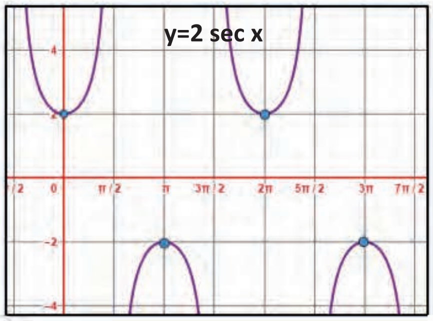


1. No es continua.
2. Dominio = $\mathbb{R}-\{0,\pm\pi,\pm2\pi,\ldots\}$.
3. Rango = $[-\infty,-1]\cup[1,\infty]$.
4. Es periódica $T=2\pi$.

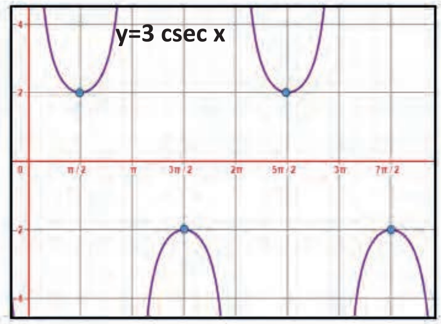
1. No es continua.
2. Dominio = $\mathbb{R}-\left\{\pm\frac{\pi}{2},\pm\frac{3\pi}{2},\pm\frac{5\pi}{2}\ldots\right\}$.
3. Rango = $[-\infty,-1]\cup[1,\infty]$.
4, Es periódica $T=2\pi$.

Ejemplo: Utiliza el programa GeoGebra para graficar las funciones:

x	y
0	2
$\frac{\pi}{2}$	$\pm\infty$
π	-2
$3\frac{\pi}{2}$	$\pm\infty$
2π	2



x	y
0	$\pm\infty$
$\frac{\pi}{2}$	2
π	$\pm\infty$
$3\frac{\pi}{2}$	-2
2π	$\pm\infty$



7. Problemas de Trigonometría aplicados al contexto y la tecnología

1. MODELACIÓN. Los cartógrafos usan una cuadrícula que contiene círculos que van de polo a polo, llamados meridianos o líneas de longitud.

Existen otros, paralelos al círculo ecuatorial, que reciben el nombre de paralelas o líneas de latitud. Ambas líneas, meridianos y paralelos, determinan la posición geográfica de una región.

Bolivia está situada en la zona central de América del Sur, entre los meridianos 57º 26´ y 69º 38´ de longitud oeste del meridiano de Greenwich y los paralelos 9º 38´ y 22º 53´ de latitud sud, expresar cada dato en términos de grados, minutos y segundos.

RELÁMPAGOS. La mayoría de los destellos producidos por los rayos va de nube a nube y sólo algunos van de nube a tierra. La causa de esta diferencia parece estar relacionada con la latitud. Algunos estudios empíricos de tormentas han mostrado que la razón de los destellos nube a nube Nc y los destellos nube a tierra Nt está dada aproximadamente por:

$$\frac{Nc}{Nt}=4{,}16+12{,}16\cdot\cos3\phi$$

Donde φ es la (limitada a regiones no polares 0° ≤ φ ≤ 60°).
Grafica esta función para el rango de las latitudes mencionadas.

¡Realicemos la valoración!

Actividad 35. Realicemos la siguiente investigación:
En nuestro cuaderno o carpeta de apuntes, investigamos sobre lo siguiente:

- ¿En qué se aplican los ángulos en nuestro contexto?
- ¿En qué se utilizan las funciones seno, coseno y tangente?
- Escribimos nuestro punto de vista frente a esta información.

Formamos un círculo de reflexión para debatir en función al análisis efectuado en cada grupo sociocomunitario.

¡Es hora de la producción!

Actividad 36. Ahora apliquemos nuestros conocimientos:

- En una hoja de papel milimétrico, trazamos las siguientes gráficas de funciones:

$$y=\sin x+\cos x \quad \text{para } x\in[0,2\pi]$$

- Elaboramos un papelógrafo con la representación gráfica del sonido de: la voz humana, los latidos del corazón y el sonido de un violín.

TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 37. Analicemos el siguiente caso

Muchos han sido los matemáticos que han ideado técnicas para medir alturas todas ellas ingeniosas y muy prácticas. Tales de Mileto fue un filósofo y matemático griego que vivió en el siglo VII a. C. se cuenta que en uno de sus viajes a Egipto fue requerido para determinar la altura de la famosa pirámide de Keops. El problema no era sencillo, ya que el punto de corte de la altura de la pirámide con el suelo era inaccesible. Existen varias versiones sobre cómo Tales resolvió el problema. En ambas, este matemático utilizó los triángulos.

Una versión afirma que Tales consideró el hecho de que, en dos días del año, al mediodía, a altura de una vara y su sombra tienen la misma longitud.

Tales esperó uno de esos días y, cuando llegó, midió la longitud de la sobra de la pirámide. A esa longitud le sumó la mitad del lado de la pirámide y así obtuvo el valor de la altura.

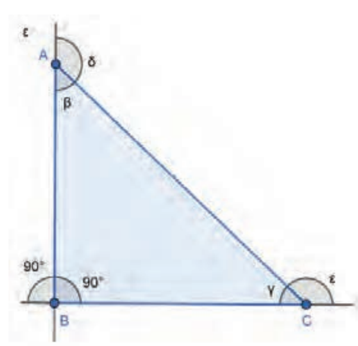
- ¿Cuál crees que fue el razonamiento hecho por Tales para determinar la altura de la pirámide de Keops?
- ¿Escribamos una lista de objetos o lugares donde se observan los triángulos rectángulos?
- Busquemos un árbol cercano en nuestro contexto y determinemos una forma de calcular su altura, realicemos los cálculos para dicho árbol y escribamos nuestro razonamiento.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición

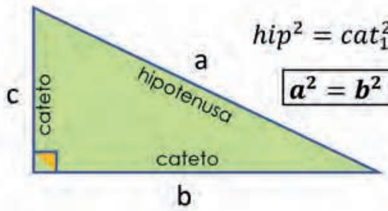
El triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo interior que es recto, es decir, mide 90°. La principal característica del triángulo es que, como ampliaremos más adelante, tiene un lado de mayor longitud (llamado hipotenusa) y otros dos denominados catetos cuya unión forma el ángulo recto.

- Vértices: A, B, C.
- Lados: AB, BC, AC, donde AC es la hipotenusa y AB y BC son los catetos.
- Ángulos interiores: 90°,β,γ. Los tres deben sumar 180°.
- Ángulos exteriores: 90°,δ,ε.



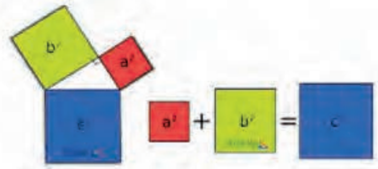
2. Teorema de Pitágoras

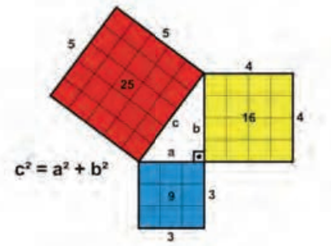
El teorema de Pitágoras indica que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotensa es igual a la suma de los cuadros de los catetos.



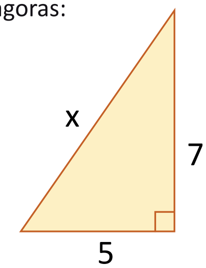
$$hip^2 = cat_1^2 + cat_2^2$$

$$\boxed{a^2 = b^2 + c^2}$$



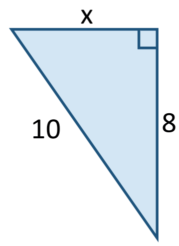


1. Calculamos el lado faltante: Establecemos el Teorema de Pitágoras:



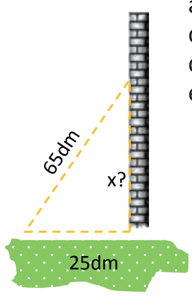
$$x^2 = 7^2 + 5^2$$
$$\sqrt{x^2} = \sqrt{49 + 25}$$
$$x = \sqrt{74}$$
$$\boxed{x = 8{,}602}$$

2. Calculamos el lado faltante: Establecemos el Teorema de Pitágoras:



$$10^2 = x^2 + 8^2$$
$$10^2 - 8^2 = x^2$$
$$\sqrt{100 - 64} = \sqrt{x^2}$$
$$\sqrt{36} = x$$
$$\boxed{x = 6}$$

3. Una escalera de 65 decímetros se apoya en una pared vertical de modo que el pie de la escalera está a 25 decímetros de la pared. ¿Qué altura, en decímetros alcanza la escalera?



Calculamos el cateto faltante:

$$cat_1^2 = hip^2 - cat_2^2$$
$$x^2 = 65^2 - 25^2 \quad ||\uparrow 2$$
$$x = \sqrt{3600}$$
$$\boxed{x = 60\ dm}$$

R. La altura que alcanza es de 60dm.

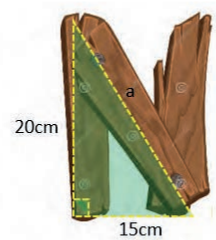
4. Una letra "N" se ha construido con tres listones de madera; los listones verticales son 20 cm y están separado 15 cm. ¿Cuánto mide el listón diagonal?

Calculamos la diagonal:

$a^2 =$

$a =$

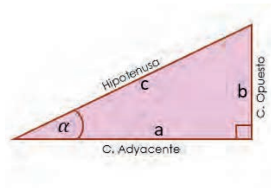
$a =$



R. El listón diagonal mide ....

3. Funciones trigonométricas (seno coseno y tangente)

Las razones trigonométricas de cualquier ángulo agudo en un triángulo rectángulo, se definen en relación a los catetos y la hipotenusa de la siguiente manera.



R. Directas	R. Inversas
$\text{sen}\,\alpha = \frac{C.O.}{Hip}$	$\csc\alpha = \frac{Hip}{C.O.}$
$\cos\alpha = \frac{C.A.}{Hip}$	$\sec\alpha = \frac{Hip}{C.A.}$
$\tan\alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$	$\cot\alpha = \frac{C.A.}{C.O.}$

Ejemplo 1: Dados el triángulo rectángulo, escribamos las razones trigonométricas de: seno, coseno, tangente, cosecante, secante y cotangente del ángulo α.

Calculamos el lado faltante:

$$x^2 = 12^2 + 5^2$$
$$x = \sqrt{144 + 25}$$
$$x = \sqrt{169}$$
$$\boxed{x = 13}$$

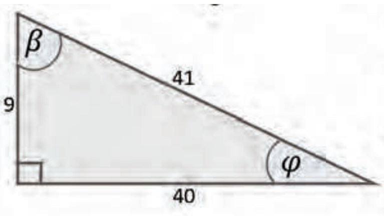
Escribamos las razones trigonométricas en el cuaderno de ejercicios:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{C.O.}{Hip} = \frac{12}{13} \qquad \csc\alpha = \frac{C.O.}{Hip} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\cos\alpha = \frac{C.A.}{Hip} = \frac{\quad}{\quad} \qquad \sec\alpha = \frac{C.A.}{Hip} = \frac{\quad}{\quad}$$

$$\tan\alpha = \frac{C.O.}{C.A.} = \frac{\quad}{\quad} \qquad \text{ctg}\,\alpha = \frac{C.O.}{C.A.} = \frac{\quad}{\quad}$$

Ejemplo 2: Dados el triángulo:



b) Escribamos el valor de las siguientes razones trigonométricas en el cuaderno de ejercicios:

$\operatorname{sen}\beta =$ —— $\sec\varphi =$ ——

$\tan\varphi =$ —— $\operatorname{ctg}\beta =$ ——

$\csc\varphi =$ —— $\cos\beta =$ ——

a) Hallar el valor de E:

$E = \sec\varphi - \cot\beta$

$E =$

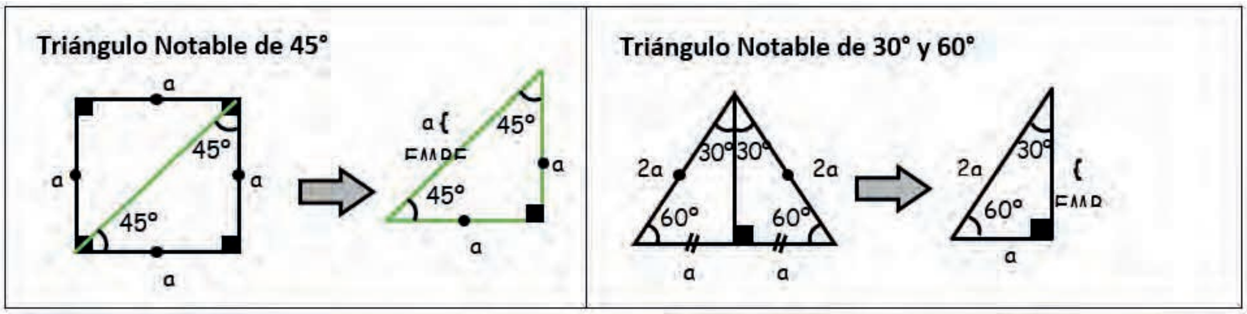
$E =$

Actividad 38 Si $\tan\alpha = \frac{3}{5}$, determinar el valor de: $A = \operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha$ (Te recomiendo hacer un dibujo guía)

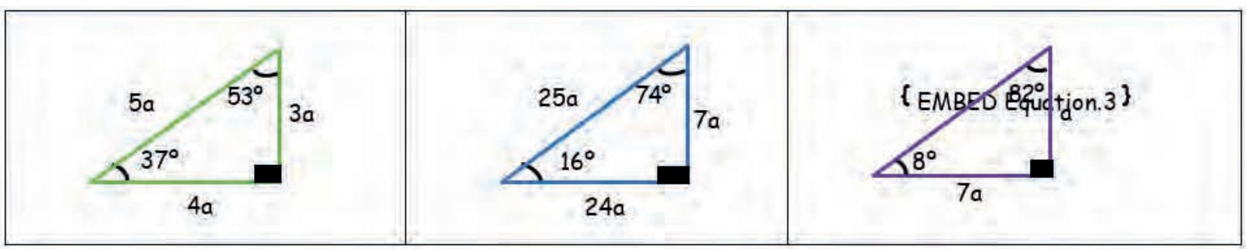
Relaciones de las funciones trigonométricas para ángulos notables de un triángulo rectángulo

Los ángulos notables son aquellos que guardan una relación directa con los triángulos rectángulos, cuyas funciones trigonométricas se pueden obtener de forma inmediata, es decir, sin tener que realizar ningún cálculo previo.

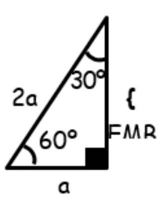
Partiendo de un cuadrado obtenemos los siguiente:



Triángulos aproximados



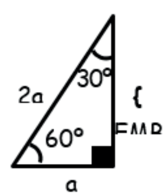
Hallamos las razones trigonométricas del ángulo de 60° y comprendemos como se forma la tabla de valores.



Datos:
Ángulo 60°
Co=$a\sqrt{3}$
H=a

Reemplazar los datos y simplificar

$$sen\ 60° = \frac{\cancel{a}\sqrt{3}}{2\cancel{a}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



Reemplazar los datos y simplificar

Datos:
Ángulo 30°
Co=a
H=2a

$$sen\ 30° = \frac{\cancel{a}}{2\cancel{a}} = \frac{1}{2}$$

Tabla de Las Razones Trigonométricas de Ángulos Notables

∠ / R.T	16°	30°	37°	45°	53°	60°	74°
Sen	7/25	1/2	3/5	$1/\sqrt{2}$	1/5	$\sqrt{3}/2$	24/25
Cos	24/25	$\sqrt{3}/2$	4/5	$1/\sqrt{2}$	3/5	½	7/25
Tg	7/24	$1/\sqrt{3}$	¾	1	4/3	$\sqrt{3}/1$	24/7
Ctg	24/7	$\sqrt{3}/1$	4/3	1	¾	$1/\sqrt{3}$	7/24
Sec	25/24	$2/\sqrt{3}$	5/4	$\sqrt{2}/1$	5/3	2/1	25/7
Csc	25/7	2/1	5/3	$\sqrt{2}/1$	5/4	$2/\sqrt{3}$	25/24

Ahora se puede comprender los valores que se observan en la tabla de ángulos notables. Para encontrar el valor en la tabla, se busca la función, en las filas y el ángulo en grados en las columnas y obtienes sus valores que también puedes encontrar con tu calculadora.

Resolvemos los siguientes ejercicios con ángulos notables, dónde reemplazaremos los valores de la tabla trigonométrica de ángulos notables:

1) Calculamos: $E = \text{sen}^2 30° + \text{tg}37°$ **Resolución** Reemplazando valores: $E = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Rightarrow \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \Rightarrow E = 1$	2) Evaluamos: $E = \frac{sen^2 45° + cos\ 60°}{csc\ 30°}$ **Resolución** Reemplazando:

Actividad 39: Resolvemos los ejercicios en el cuaderno de ejercicios:

I. Hallamos las razones trigonométricas de los ángulos de 45° y 30°, luego verifica las respuestas en la tabla de valores.

II. Calculamos los siguientes ejercicios utilizando la tabla de valores de ángulos notables.

1. Calculamos:

$$E = \frac{4 \cdot \text{sen } 30° + \sqrt{3} \cdot \tan 60°}{10 \cdot \cos 37° + \sqrt{2} \cdot \sec 45°}$$

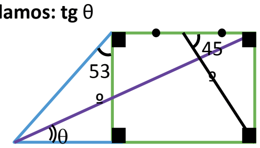
Resolución: ....

2. Hallamos el valor de E:

$$E = \frac{\text{sen } 3\theta \cdot \cos 6\theta \cdot \csc\left(\frac{90°}{2}\right)}{\tan 3\theta \cdot \sec 6\theta \cdot \cot\left(\frac{90°}{2}\right)}$$

Resolución: ....

III. Calculamos los siguientes ejercicios y marca la opción correcta.

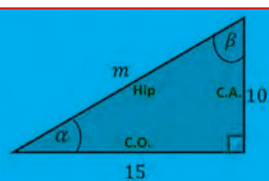
1. Calculamos: $E = (\sec^2 45° + \text{tg}45°)\text{ctg}37° - 2\cos 60°$ a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4 f) ninguno.	**4. Calculamos: "x"** $3x \sec 53° - \text{tg}45° = \sec 60°^{(\sec 45° + \text{sen}45°)^{\csc 30°}}$ a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5 f) ninguno.
5. Calculamos: E = (tg60° + sec30° - sen60°)$^{sec60°}$ a) 25/12 b) 25/24 c) 49/12 d) 49/24 e) 7/18 f) ninguno	**6) Calculamos:** $E = \frac{tg\,\theta° \sec\theta° - sen\,3° \cos\theta°}{sen^2 5°}$ $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ $\frac{2\sqrt{3}}{5}$ $\frac{\sqrt{3}}{5}$ $\frac{3\sqrt{3}}{5}$ f) ninguno
7. Calculamos: tg $\frac{45°}{2}$ a) $\sqrt{2}$ b) $\sqrt{2}+1$ c) $\sqrt{2}-1$ d) $1-\sqrt{2}$ e) $\sqrt{2}+2$ f) ninguno	**8) Del gráfico hallamos: tg θ** a) 0,1 b) 0,3 c) 0,4 d) 0,6 e) 0,8 f) ninguno 

4. Resolución gráfica y analítica de triángulos rectángulos

Resolver un triángulo rectángulo significa la longitud de cada lado y la medida de los tres ángulos: Para esto se requiere al menos:

Ejemplo 1:

La longitud de dos lados



Calculamos el lado faltante por el Teorema de Pitágoras:

$$m^2 = 10^2 + 15^2$$
$$x = \sqrt{100 + 225}$$
$$x = \sqrt{325}$$
$$\boxed{x = 5\sqrt{13}}$$
$$x \approx 18{,}03$$

Calculamos α con la tangente ya que contiene los datos que tenemos:

$$\tan\alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$$
$$\tan\alpha = \frac{10}{15}$$

Despejamos α:

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{10}{15}\right)$$
$$\boxed{\alpha = 33{,}69°}$$

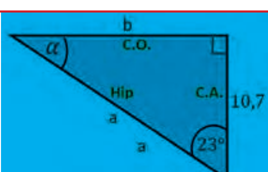
Calculamos β con la propiedad de ángulos complementarios:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Por tanto:

$$\beta = 90° - \alpha$$
$$\beta = 90° - 33{,}69°$$
$$\boxed{\beta = 56{,}31°}$$

La longitud de un lado y la medida de uno de sus ángulos agudos



Calculamos el lado **a** con la función coseno:

$$\cos\alpha = \frac{C.A.}{Hip}$$
$$\cos 23° = \frac{10{,}7}{a}$$

Despejamos a:

$$a = \frac{10{,}7}{\cos 23°}$$
$$\boxed{a = 11{,}62}$$

Calculamos el lado **b** con la función tangente:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$$
$$\text{tg}\,23° = \frac{b}{10{,}7}$$

Despejamos b:

$$b = 10{,}7 \cdot \text{tg}\,23°$$
$$\boxed{b = 4{,}54}$$

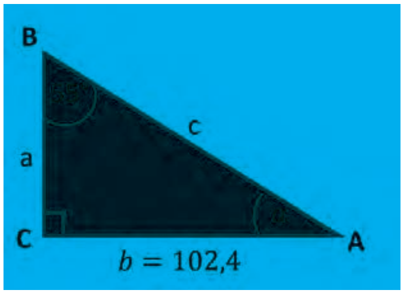
Calculamos α con la propiedad de ángulos complementarios:

$$\alpha + \beta = 90°$$

Por tanto:

$$\alpha = 90° - 23°$$
$$\boxed{\alpha = 67°}$$

Ejemplo 3: En un triángulo rectángulo ABC se conocen el lado b=102,4 metros y el ángulo B=55°. Resuelve el triángulo.



Por suma de ángulos interiores:

A = C- B

A = 90°-55°

A = 35°

Por relaciones trigonométricas

$$sen\ \hat{B} = \frac{b}{c} \quad Despejando\ el\ lado\ c \quad tenemos:$$

$$c = \frac{b}{sen\ \hat{B}} = \frac{102,4}{sen\ 55} = \boxed{125.007\ m}$$

$$\tan \hat{B} = \frac{b}{a}$$

$$Despejando\ el\ lado\ a\ \ tenemos:\ a = \frac{b}{tan\ \hat{B}} = \frac{102,4}{tan\ 55} = \boxed{71.701\ m}$$

Ejemplo 4: Una torre de 50 m de altura proyecta una sombra de 20 m a cierta hora del día. Calcula el ángulo con el que se verá el extremo superior de la torre desde el extremo de la sombra.

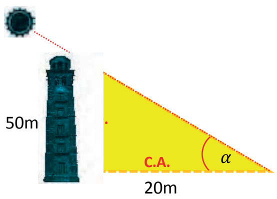
Calculamos el ángulo α:

$$\tan \alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$$

$$\tan \alpha = \frac{50}{20}$$

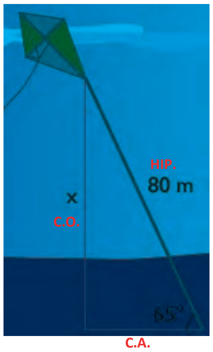
$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{50}{20}\right)$$

$$\boxed{\alpha = 68,20°}$$



R.- El ángulo de elevación es de 68,20°

Ejemplo 5: Una cometa está sujeta al suelo con una cuerda de 80 m de largo y ésta forma con el suelo un ángulo de 65°. Si la cuerda está recta, ¿a qué altura del suelo está la cometa?



Calculamos la altura x:

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{C.O.}{C.A.}$$

$$\operatorname{sen} 65° = \frac{x}{80}$$

$$x = 80 \cdot \operatorname{sen} 65°$$

$$\boxed{x = 72,5m}$$

R.- Está a 72,5m de altura.

Ejemplo 6: Un topógrafo observa con un teodolito la cúspide de un edificio con un ángulo de elevación de 32°. Si el teodolito mide 1,40 m de altura y la distancia desde el punto de observación hasta el pie del edificio es de 50 m, ¿Cuál es la altura del edificio?

Primero hacemos un esquema para entender el problema:

Calculamos la distancia BC:

$$\tan 32° = \frac{BC}{50}$$

$$50 \cdot \tan 32° = BC$$

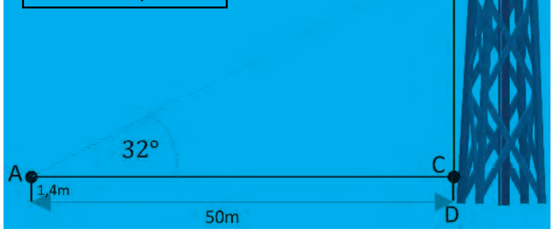
$$BC$$

Ahora la altura del edificio será:

$$BD = BC + CD$$

$$BD = 31,245m + 1,4m$$

$$\boxed{BD = 32,645m}$$



Ejemplo 7: Calcula el valor de "x" de la siguiente figura.

Vamos a calcular por separado los valores de a y b respectivamente:

Calculamos a:

$$\tan 60° = \frac{a}{5}$$

$$a = 5 \cdot \tan 60°$$

$$a = 8,66$$

Calculamos b:

$$\cos 45° = \frac{b}{20}$$

$$b = 20 \cdot$$

$$\cos 45°$$

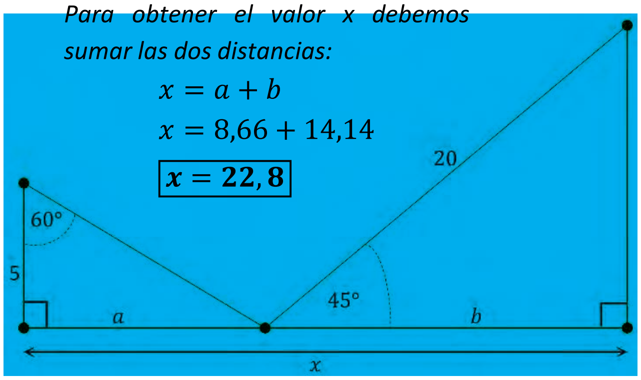
$$b = 14,14$$

Para obtener el valor x debemos sumar las dos distancias:

$$x = a + b$$

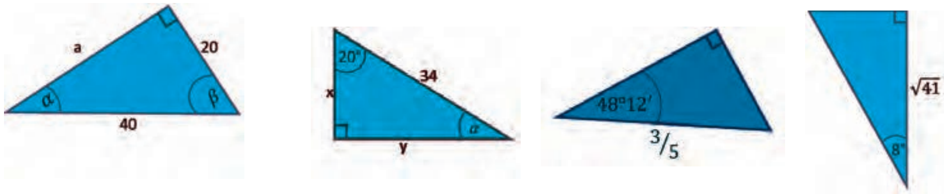
$$x = 8,66 + 14,14$$

$$\boxed{\boldsymbol{x = 22,8}}$$



Actividad 40. Calculamo los lados y ángulos de los siguientes triángulos rectángulos

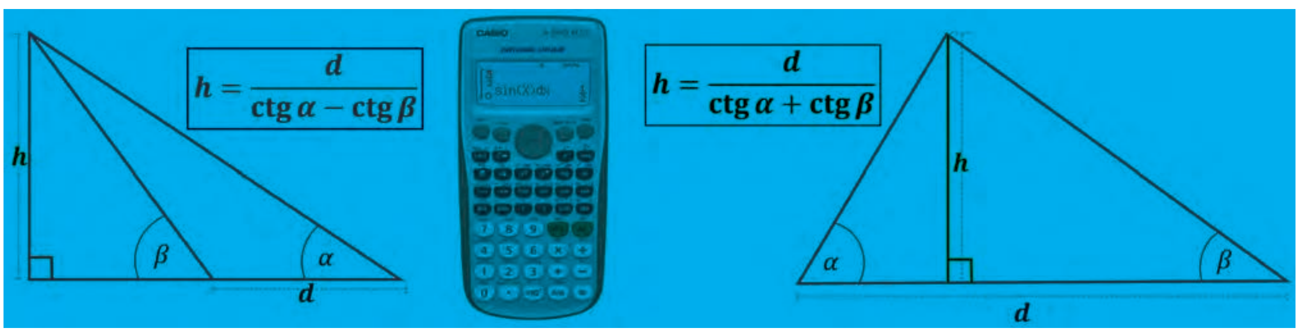
1.- Resolver los siguientes triángulos rectángulos:



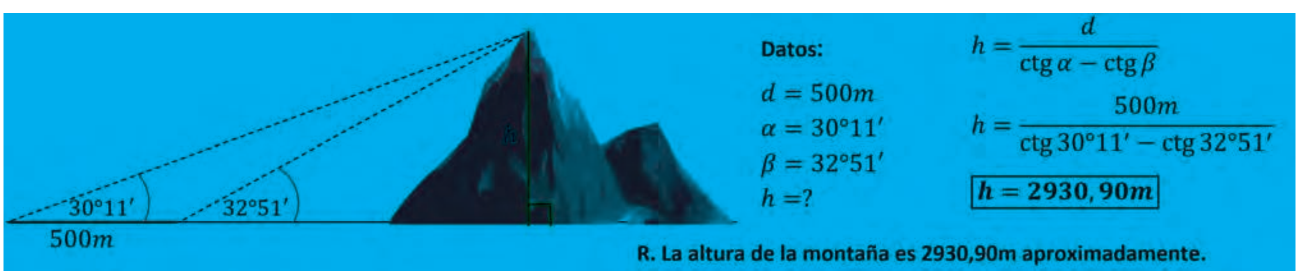
2.- Una persona que mide 1,72 cm proyecta una sombra de 2,25 cm. ¿Cuál es el ángulo de elevación del Sol en ese momento?
3.- Una cinta transportadora de sacos de cemento mide 350 m y se quiere que eleve el cemento a 75 m de altura. ¿Qué ángulo de elevación debe llevar la cinta?
4.- Un árbol quebrado por el viento forma un triángulo rectángulo con el suelo. ¿cuál era la altura del árbol si la parte que ha caído hacia el suelo forma con este ángulo de 50 grados si la parte del tronco que ha quedado en pie tiene una altura de 20 metros?
5.- El Monolito "Pachamama", descubierto por Wendell Benett en 1932, proyecta una sombra de 15,44m cuando el sol se encuentra a 25° sobre el horizonte. Halla la altura del monolito.
6.- Desde el punto más alto de una torre de electricidad de 25 m de altura se observa un camión en la llanura cuyo ángulo de depresión es de 3°. ¿A qué distancia está el camión?
7.- En un círculo de radio 13cm se traza una cuerda cuyo ángulo central mide 20°. Halla la longitud de la cuerda.

5. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

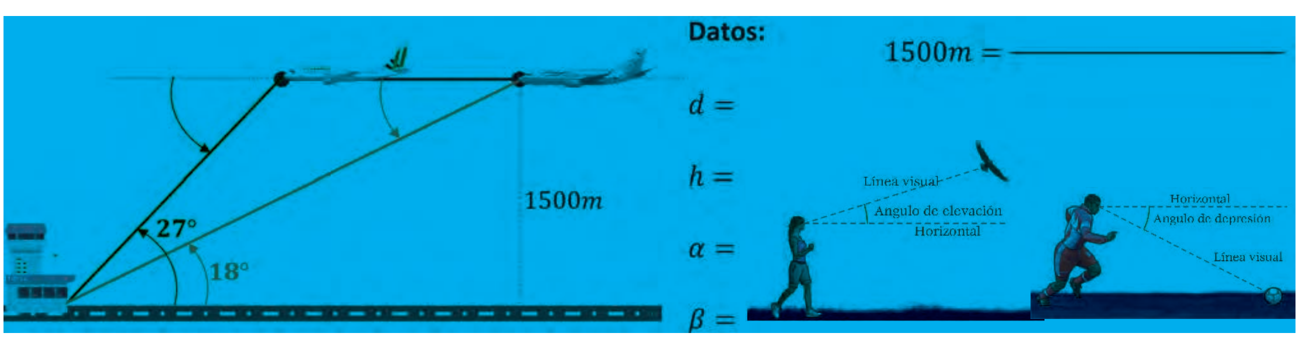
Muchas veces es imposible a la base de un árbol, de una edificación o de una montaña; en estos casos se usa otra técnica para calcular la altura del objeto.



Ejemplo 1: Jhazmín y Rafael son dos topógrafos que deben medir la altura de una montaña. Desde un primer punto observan la cima con un ángulo de elevación de 30°11'. Avanzan 500m en línea recta hacia la base de la montaña y desde este otro punto vuelven a medir el ángulo de elevación que es de 32°51'. ¿Qué altura tiene la montaña?



Ejemplo 2: Dos aviones vuelan alineados; desde la torre de control del aeropuerto se toman los ángulos de elevación de cada avión: 18° y 27°. Si los aviones están volando a una altura de 1500m, calcula la distancia entre ellos.



Actividad 41. Resolvamos los siguientes problemas:

1.- Juan y Marta están separados por una distancia de 32m entre sí en el mismo plano horizontal y ambos observan la cima del “Cristo de la Concordia” de la ciudad de Cochabamba con un ángulo de elevación de 26° y 39° respectivamente. Calcula la altura del 2do monumento de Cristo más grande del mundo.

2.- Juan y Pedro ven desde las puertas de sus casas un majestuoso cóndor, bajo ángulos de 45° y 60° respectivamente. La distancia entre sus casas es de 126 m y el cóndor vuela situado entre sus casas. Halla la altura que vuela este hermoso animal en peligro de extinción.

3.- Carla y René están separados por 30m y ambos observan, desde un mismo lado, la cima de un árbol con ángulos de elevación de 25° y 36°, respectivamente. ¿Cuál es la altura del árbol?

4.- Antonio y Simón están separados por 170m. cada uno divisa un volador situado entre ellos. Luis lo ve con un ángulo de elevación de 45° y Juan con uno de 30°. ¿A qué distancia está el volador?

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 42. En nuestro cuaderno o carpeta de apuntes, investigamos sobre lo siguiente:

- ¿Cuáles son los aportes más importantes hechos por el estudio de los triángulos rectángulos?
- ¿En qué situaciones concretas de tu propio contexto, se verifica el uso de los triángulos rectángulos?
- Escribimos nuestro punto de vista frente a esta información.

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 43. Realizamos las siguientes actividades:
Construye un teodolito casero. Sobre una base de madera de 30cm x 30cm, dibuja una circunferencia graduada cada 5°. Al centro coloca un soporte de madera que pueda girar sobre la base. En la parte superiore de soporte acomoda un transportador que pueda girar alrededor de su origen. Sobre el transportador coloca como mira un tubo de bolígrafo. Este instrumento te permitirá medir ángulos verticales y horizontales.

a) Forma equipo de 3 compañeros y, utilizando la fórmula deducida, calcula las alturas de los edificios más importantes de tu comunidad.
b) Necesitarás una cinta métrica; si no tienes una, te servirá un cordel que tenga un nudo cada metro.
c) Socializamos nuestras mediciones y cálculos con la clase.

TRIÁNGULOS OBLICUÁNGULOS EN EL DESARROLLO DE LA CIENCIA Y LA TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 44. Analicemos el siguiente problema:

Los problemas con triángulos no siempre se refieren a triángulos rectángulos, ni pueden reducirse a un problema sobre triángulos rectángulos. Es necesario entonces desarrollar técnicas y buscar formas de resolver triángulos en general.
Un topógrafo desea medir la longitud de una laguna, el técnico mide el ángulo A respecto a un punto C de la otra orilla y camina de A hacia B, también determina el ángulo B respecto de C. Conoce la longitud entre loa puntos AB ¿cómo calcula la longitud entre los puntos CB? ¿Qué fórmulas o razones trigonométricas aplica al triángulo que construye, si éste es diferente a un triángulo rectángulo?

Dibujamos la escena descrita, descubriendo el triángulo que describe la situación.

¿Qué tipos de triángulos conoces, además de los triángulos rectángulos?

¿El Teorema de Pitágoras es únicamente para triángulos rectángulos? Justifica tu respuesta.

¿Qué tipo de triángulo se formó en la situación descrita?

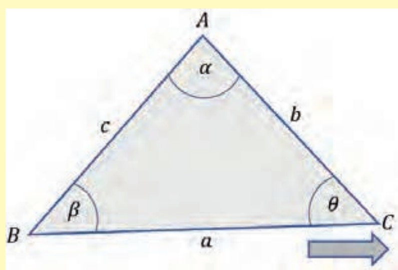
¿De qué manera crees que serán útil el estudio de este tipo de triángulos en esta situación?

¡Continuemos con la TEORÍA!

En la resolución de triángulos oblicuángulos debemos recordar que la suma de los ángulos interiores en cualquier triángulo es 180°.

1. Teorema de Seno

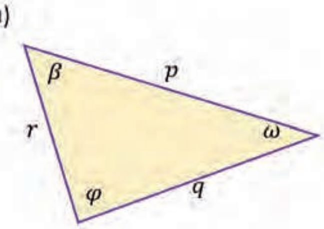
"En todo triángulo, las longitudes de los lados son directamente proporcionales a los senos de los ángulos opuestos a dichos lados"



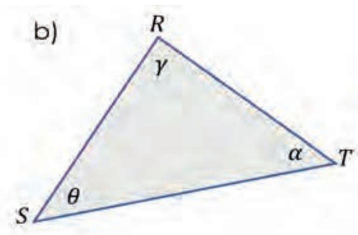
$$\boxed{\frac{a}{\operatorname{sen}\alpha}=\frac{b}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{c}{\operatorname{sen}\theta}}$$

Actividad 45. En el cuaderno de ejercicios establecemos la ley de senos en los siguientes triángulos:

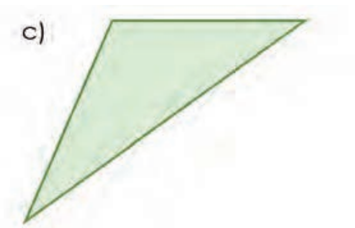
a)



b)



c)



Ejemplo 1: Resolvamos el siguiente triángulo por la Ley de Senos.

Establecemos la Ley de Senos:

$$\frac{8}{\operatorname{sen}\boldsymbol{\beta}}=\frac{27}{\operatorname{sen}15°}=\frac{\boldsymbol{a}}{\operatorname{sen}\boldsymbol{\alpha}}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

Con $\boxed{1}$ y $\boxed{2}$ calculamos β:

$$\frac{8}{\operatorname{sen}\beta}=\frac{27}{\operatorname{sen}15°}$$

$$\frac{\operatorname{sen}\beta}{8}=\frac{\operatorname{sen}15°}{27}$$

$$\operatorname{sen}\beta=\frac{8\times\operatorname{sen}15°}{27}$$

$$\beta=\operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{8\times\operatorname{sen}15°}{27}\right)$$

$$\boxed{\boldsymbol{\beta=4,40°}}$$

Calculamos α con la propiedad de los ángulos interiores del triángulo:

$$\alpha+\beta+15°=180°$$

$$\alpha=180°-15°-4,40°$$

$$\boxed{\boldsymbol{\alpha=160,60°}}$$

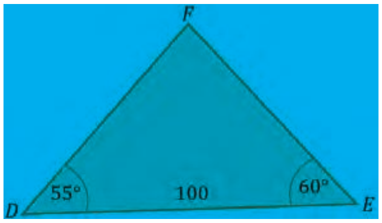
Con $\boxed{2}$ y $\boxed{3}$ calculamos a:

$$\frac{\boldsymbol{a}}{\operatorname{sen}160,60°}=\frac{27}{\operatorname{sen}15°}$$

$$a=\frac{27\times\operatorname{sen}160,60°}{\operatorname{sen}15°}$$

$$\boxed{\boldsymbol{a=34,65}}$$

Ejemplo 2: "Aura estito" -dijo el chapaco-: Sea el ΔDEF con $\overline{DE}=100$, $\widehat{DEF}=60°$, $\widehat{EDF}=55°$. Resolvamos el triángulo.



Establecemos la Ley de Senos:

$$\frac{100}{\operatorname{sen}\widehat{DFE}} = \frac{\overline{EF}}{\operatorname{sen}55°} = \frac{\overline{DF}}{\operatorname{sen}60°}$$

$\boxed{1}$ $\boxed{2}$ $\boxed{3}$

Calculamos α con la propiedad de los ángulos interiores del triángulo:

$$\widehat{DFE} + 55° + 60° = 180°$$

$$\widehat{DFE} = 180° - 55° - 60°$$

$$\boxed{\widehat{DFE} = 75°}$$

Con $\boxed{2}$ y $\boxed{1}$ calculamos $\overline{EF}$:

$$\frac{\overline{EF}}{\operatorname{sen}55°} = \frac{100}{\operatorname{sen}75°}$$

$$\overline{EF} = \frac{100 \times \operatorname{sen}55°}{\operatorname{sen}75°}$$

$$\boxed{\overline{EF} = 84,80}$$

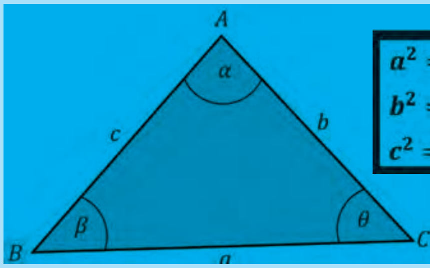
Con $\boxed{3}$ y $\boxed{1}$ calculamos $\overline{DF}$:

$$\frac{\overline{DF}}{\operatorname{sen}60°} = \frac{100}{\operatorname{sen}75°}$$

$$\overline{DF} = \frac{100 \times \operatorname{sen}60°}{\operatorname{sen}75°} \Longrightarrow \boxed{\overline{DF} = 89,66}$$

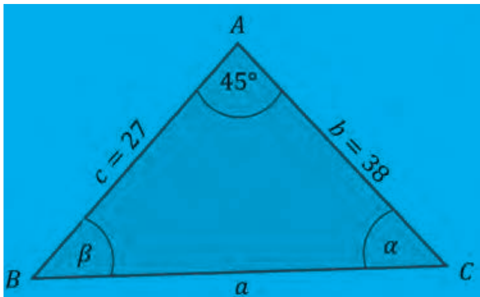
2. Teorema de Cosenos

"En todo triángulo, el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de las longitudes de los otros dos lados, menos el doble producto de estas longitudes, por el coseno del ángulo comprendido entre dichos lados"



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos\alpha$$
$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cdot \cos\beta$$
$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cdot \cos\theta$$

Ejemplo 3: Resolvamos el siguiente triángulo por la Ley de Cosenos.



Calculamos el lado a:

$$a^2 = 27^2 + 38^2 - 2 \cdot 27 \cdot 38 \cdot \cos 45°$$

$$a = \sqrt{27^2 + 38^2 - 2 \cdot 27 \cdot 38 \cdot \cos 45°}$$

$$\boxed{a = 26,87}$$

Calculamos el ángulo β:

$$\beta = \cos^{-1}\left(\frac{27^2 + 26,87^2 - 38^2}{2 \cdot 27 \cdot 26,87}\right)$$

$$\boxed{\beta = 89,72°}$$

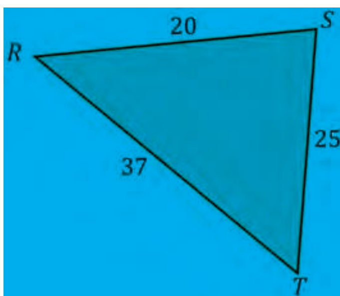
Calculamos el ángulo α:

$$\alpha = 180° - 45° - 89,72°$$

$$\boxed{\alpha = 45,28°}$$

3. Resolucion de triangulos oblicuangulos

Ejemplo 4: Sea el triángulo ΔRST con $\overline{RS}=20$, $\overline{ST}=25$ y $\overline{RT}=37$. Resolver el triángulo.



Calculamos el ángulo $\widehat{RST}$:

$$\widehat{RST} = \cos^{-1}\left(\frac{25^2 + 20^2 - 37^2}{2 \cdot 25 \cdot 20}\right)$$

$$\boxed{\widehat{RST} = 110,12°}$$

Calculamos el ángulo $\widehat{RTS}$:

$$\widehat{RTS} = \cos^{-1}\left(\frac{25^2 + 37^2 - 20^2}{2 \cdot 25 \cdot 37}\right)$$

$$\boxed{\widehat{RTS} = 30,50°}$$

Calculamos el ángulo $\widehat{SRT}$:

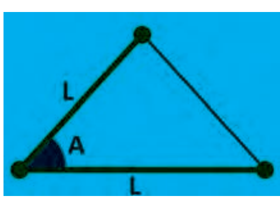
$$\widehat{SRT} = \cos^{-1}\left(\frac{37^2 + 20^2 - 25^2}{2 \cdot 37 \cdot 20}\right)$$

$$\boxed{\widehat{SRT} = 39,38°}$$

Si quieres, puedes verificar si la suma de los ángulos encontrados cumple con la propiedad de los ángulos internos:

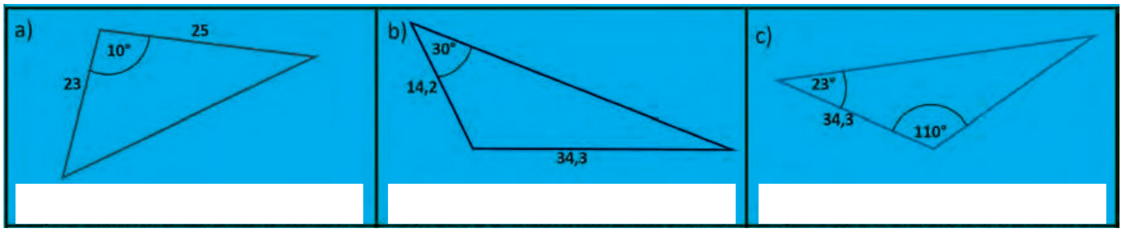
$$110,12° + 39,38° + 30,5° = \boxed{180°}$$

¿Cómo saber cuándo utilizar la Ley de Senos y cuándo la Ley de Cosenos?



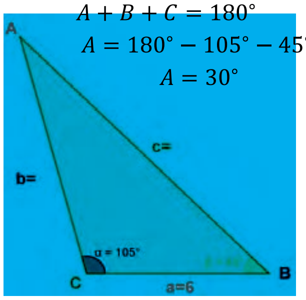
En estos casos se aplica la Ley de Cosenos para resolver los triángulos. En todos los demás casos se aplica la Ley de Senos.

Actividad 46. Indicamos en el cuaderno de ejercicios por cuál de las leyes estudiadas se deben resolver los siguientes triángulos:



Ejemplo 5: En el triángulo ABC si C=105˚ ;B=45˚ ;a=6 encontramos los datos faltantes

Cálculo del ángulo "A"



$$A + B + C = 180°$$
$$A = 180° - 105° - 45°$$
$$A = 30°$$

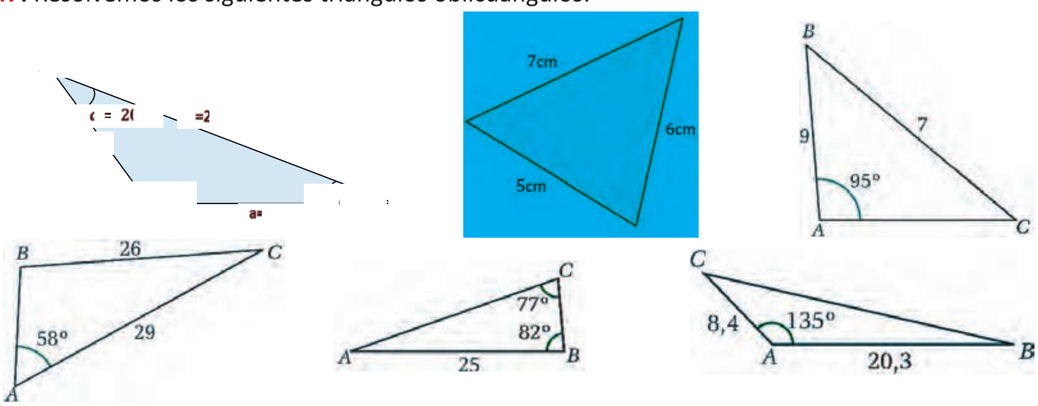
Cálculo del ángulo "B"

$$\frac{b}{senB} = \frac{a}{senA}$$
$$b = \frac{a \cdot senB}{senA}$$
$$b = \frac{6 \cdot sen\,45}{sen\,30}$$
$$b = 8{,}5$$

Cálculo del ángulo "C"

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$$
$$c^2 = 6^2 + (8{,}5)^2 - 2 \cdot 6 \cdot 8{,}5\cos 105°$$
$$c^2 = 36 + 42{,}25 - (-26)$$
$$c^2 = 108{,}25 + 26$$
$$c^2 = 134{,}25$$
$$\sqrt{c^2} = \sqrt{134{,}25}$$
$$c = 11{,}6$$

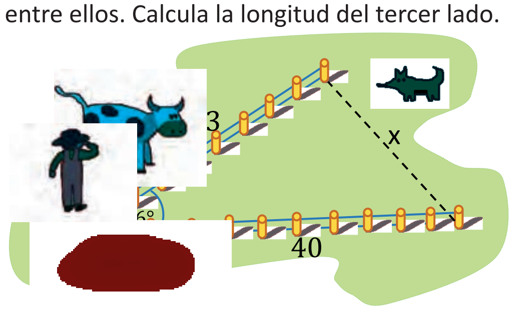
Actividad 47: Resolvemos los siguientes triángulos oblicuángulos:



4. Resolucion de problemas aplicados al contexto y la tecnologia

Ejemplo 6: Se ha medido dos lados de un terreno triangular y el ángulo entre ellos. Calcula la longitud del tercer lado.

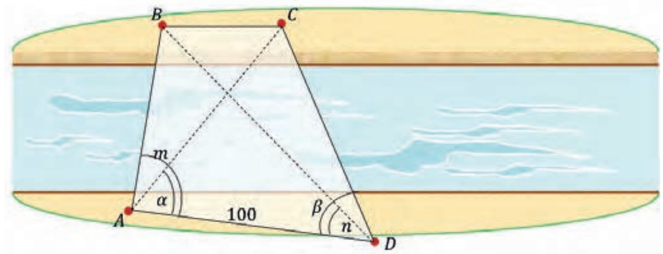
$$x^2 = 33^2 + 40^2 - 2 \cdot 33 \cdot 40 \cdot \cos 26°$$
$$x^2 = 1089 + 1600 - 2372{,}82$$
$$x^2 = 316{,}18$$
$$x = \sqrt{316{,}18}$$
$$x \simeq \boxed{17{,}78m}$$

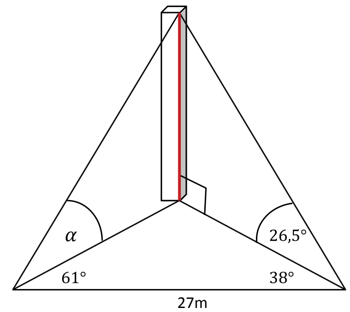


Actividad 48

1.- Los lados de un triángulo miden 6,8 cm, 8,4 cm y 4,9 cm. Encontrar la medida del ángulo menor.
2.- Dos de los lados de un triángulo miden 400 m y 600 m respectivamente si el ángulo entre ellos mide 46,3°, hallar el área y el perímetro del triángulo.
3.- Una persona sostiene dos volantines (cometas) que están volando. A uno de los cometas le ha soltado 1 00 m de pita (hilo) y al otro 80 m. Si el ángulo que forman ambos hilos es aproximadamente 30°, ¿A qué distancia está un volantín de la otro?
4.- Un triángulo está inscrito en una circunferencia de radio 5cm y determina sobre ella tres arcos de 80°,140° y 140°. Halla los lados del triángulo.
5.- Las diagonales de un paralelogramo miden 36m y 46m respectivamente y forman un ángulo de 108°30`, calcular los lados del paralelogramo.
6.- ¿Qué ángulo forman dos fuerzas de 30kp y 22kp respectivamente cuya resultante es de 40kp?
7.- Calcula la altura del monumento; además calcula el valor de α.

8.- Halla la distancia BC, si $m = 60°$, $\alpha = 50°, n = 51°, \beta = 74°$ y $AD = 100m$





¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 49. Reflexionamos y respondemos las siguientes preguntas

Responde reflexivamente las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es importante aprender a resolver triángulos oblicuángulos?
- ¿Qué elementos de la trigonometría nos puede ayudar a resolver problemas de nuestra Comunidad Educativa?

¿Cómo la Trigonometría podría ayudarte a resolver algunos problemas de tu vida diaria?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 50. Utilicemos nuestro teodolito casero

- En equipo de 3 integrantes, realizamos cálculos de distancias inaccesibles con la ayuda de nuestros teodolitos construidos en la unidad anterior y las leyes de seno y coseno.
- Anotamos en nuestro cuaderno los cálculos y objetos medidos para socializar en una plenaria en clase.
- Elaboramos nuestros carteles con las leyes aprendidas y los apuntes más importantes para textuar el aula.

IDENTIDADES Y ECUACIONES TRIGONOMÉTRICAS Y SU VALOR EN LA PRODUCTIVIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 51. Analicemos la siguiente historia de Palmar Chico:

En la comunidad de "Palmar Chico" del municipio de Yacuiba, Región Autónoma del Gran Chaco de Tarija, en el mes de septiembre se lleva adelante uno de los eventos etnológicos más importantes del Chaco sudamericano, donde se comparten las tradiciones y se hacen diferentes demostraciones sobre las prácticas e identidad culturales de la región como, corrida de toros, carreras cuadreras de caballos, doma de potros, el juego de la sortija, la marcada, la taba, ambrosía y la mejor gastronomía del Chaco boliviano.

Responde las siguientes preguntas:

1. ¿Qué significa la palabra "identidad"?
2. ¿Qué es la identidad cultural?
3. ¿Cuál es tu identidad cultural?
4. Menciona tres ejemplos de identidad

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Identidades y ecuaciones

Ecuación: Igualdad que se verifica sólo para algunos valores de sus variables.
Identidad: Igualdad que se verifica para todos los posibles valores de sus variables.

1. Identidades trigonométricas fundamentales

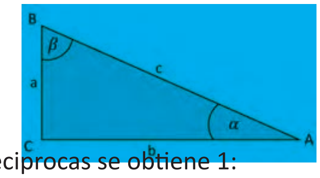
Es una igualdad establecida entre dos expresiones que involucran funciones trigonométricas de una o más variables (o ángulos), las cuales se verifican para todo valor admisible de dichas variables.
Las identidades que indicaremos a continuación son fundamentales:

Relaciones Inversas

Para obtener las identidades inversas, haremos uso de las definiciones de las funciones trigonométricas.
En el triángulo rectángulo las funciones del ángulo α son:

$$\textbf{sen}\ \alpha = \frac{a}{c} \qquad \textbf{tan}\ \alpha = \frac{a}{b} \qquad csc\ \alpha = \frac{c}{a}$$

$$\textbf{cos}\ \alpha = \frac{b}{c} \qquad \textbf{cot}\ \alpha = \frac{b}{a} \qquad \textbf{sec}\ \alpha = \frac{c}{b}$$



Multiplicando una función directa por cada una de sus recíprocas se obtiene 1:

$$\textbf{sen}\ \alpha * \textbf{csc}\ \alpha = \frac{a}{c} * \frac{c}{a} = \boxed{1} \qquad \textbf{cos}\ \alpha * \textbf{sec}\ \alpha = \frac{b}{c} * \frac{c}{b} = \boxed{1} \qquad \textbf{tan}\ \alpha * \textbf{cot}\ \alpha = \frac{a}{b} * \frac{b}{a} = \boxed{1}$$

De esta manera se tiene las identidades Inversas o recíprocas:

$$\csc\theta = \frac{1}{\text{sen}\ \theta} \qquad \sec\theta = \frac{1}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{1}{\tan\theta}$$

Identidades del cociente

Las identidades trigonométricas de cociente son dos: tangente y cotangente y tienen la propiedad de relacionar, por medio de un cociente, las funciones trigonométricas seno y coseno.

Si realizamos el cociente de la función seno por la función coseno, se tiene la función tangente:

$$\frac{\text{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{\frac{a}{c}}{\frac{b}{c}} = \frac{a * c}{b * c} = \frac{a}{b} = \tan\alpha \qquad \frac{\cos\alpha}{\text{sen}\alpha} = \frac{\frac{b}{c}}{\frac{a}{c}} = \frac{b * c}{a * c} = \frac{b}{a} = \cot\alpha$$

Por tanto:

$$\tan\theta = \frac{\text{sen}\ \theta}{\cos\theta} \qquad \cot\theta = \frac{\cos\theta}{\text{sen}\ \theta}$$

Relaciones Pitagóricas

Si aplicamos el Teorema de Pitágoras en el triángulo se tiene:

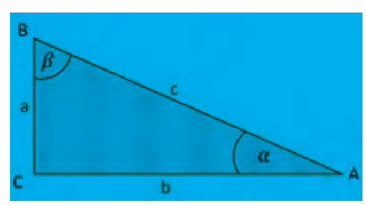
$$a^2 + b^2 = c^2$$

Dividimos ambos miembros entre c^2

$$\frac{a^2}{c^2} + \frac{b^2}{c^2} = 1$$

Aplicamos la propiedad de los exponentes

$$\left(\frac{a}{c}\right)^2 + \left(\frac{b}{c}\right)^2 = 1$$



Los cocientes son equivalentes a las funciones sen α y cos α

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1$$

Las demás identidades pitagóricas se obtienen de forma similar:

$$\text{sen}^2\theta + \cos^2\theta = 1 \qquad 1 + \tan^2\theta = \sec^2\theta \qquad 1 + \cot^2\theta = \csc^2\theta$$

Actividad 52

Construcción del seno de la suma de dos ángulos con GeoGebra

1) Dibuja un punto de origen demostración y renómbralo con "punto O".
2) Traza tres semirrectas con el punto de origen, considerando que el segmento $\overline{OA} = 1$.
3) Dibuja tres ángulos, como se muestran en la figura 1.
4) Traza un segmento perpendicular con el punto A y la semirrecta $\overrightarrow{OB}$, como se muestra en la figura 2.
5) Traza otra perpendicular del punto A al segmento $\overrightarrow{OC}$, como se muestra en la figura 2.
6) Luego, traza otras dos líneas perpendiculares con $\overrightarrow{OA}$ y $\overrightarrow{OC}$, hasta obtener dos triángulos (señalados con color café), como se muestra en la figura 2.

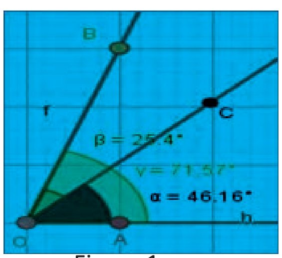


Figura 1

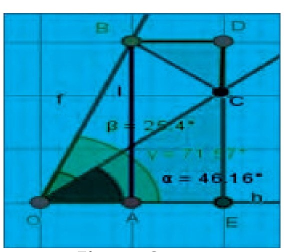


Figura 2

Demostración de identidades

Demostrar o verificar una identidad significa mostrar que es posible transformar un miembro de la identidad en el otro, mediante procesos justificados. Algunas pautas útiles son las siguientes:

- Transformar el miembro más complicado.
- Expresar las funciones en términos de seno y coseno y simplificar.
- Efectuar operaciones algebraicas y factorizaciones convenientes.

Ejemplo 1: Demostramos la siguiente identidad

$$\boldsymbol{\csc\alpha - \operatorname{sen}\alpha = \cot\alpha \cdot \cos\alpha}$$

$$\frac{1}{\operatorname{sen}\alpha} - \operatorname{sen}\alpha =$$
$$\frac{1-\operatorname{sen}^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} =$$
$$\frac{\cos^2\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} =$$
$$\cos\alpha \cdot \frac{\cos\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} =$$
$$\boxed{\cot\alpha \cdot \cos\alpha =}$$

- Anotamos en términos de seno y coseno.
- Sumando con común denominador.
- Identidad pitagórica.
- Separamos el coseno

Ejemplo 2: Demostramos la siguiente identidad

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}x + \cos x \cdot \cot x = \csc x}$$

$$\operatorname{sen}x + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} =$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x}{\operatorname{sen}x} =$$
$$\frac{1}{\operatorname{sen}x} =$$
$$\boxed{\csc x =}$$

- Anotamos en términos de seno y coseno.
- Sumando con común denominador.
- Identidad pitagórica.
- Identidad recíproca.

Ejemplo 3: Demostramos la siguiente identidad

$$\boldsymbol{\tan t + 2\cos t \cdot \csc t = \sec t \cdot \csc t + \cot t}$$

$$\frac{\operatorname{sen}t}{\cos t} + 2\cos t \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}t} =$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2 t + 2\cos^2 t}{\cos t \cdot \operatorname{sen}t} =$$
$$\frac{\operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t + \cos^2 t}{\cos t \cdot \operatorname{sen}t} =$$
$$\frac{1+\cos^2 t}{[illegible]\text{n } t} =$$
$$\frac{[illegible]}{[illegible]\text{n } t} =$$
$$\boxed{\sec t \cdot \csc t + \cot t =}$$

- Anotamos en términos de seno y coseno.
- Sumando con común denominador.
- Disgregamos el término 2 $\cos^2 t$.
- Identidad pitagórica.
- Separamos los términos del numerador.
- Identidades recíprocas y del cociente.

Sugerencias para demostrar identidades

- Simplifica el miembro más complicado.
- Realiza las transformaciones utilizando las identidades básicas.
- A menudo es útil reescribir una expresión en términos de seno y coseno.
- Realiza las operaciones algebraicas que consideres necesarias.
- Si no te va bien desarrollando un miembro, desarrolla el otro, te puede dar algunas ideas.

Variaciones de las identidades fundamentales

$$\sin\theta \cdot \cos\theta = 1$$
$$\cos\theta \cdot \sec\theta = 1$$
$$\tan\theta \cdot \cot\theta = 1$$

$$1 - \sin^2\theta = \cos^2\theta$$
$$1 - \cos^2\theta = \cos^2\theta$$

$$\tan^2\theta = \sec^2\theta - 1$$
$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\cot^2\theta = \csc^2\theta - 1$$
$$\csc^2\theta - \cot^2\theta = 1$$

Actividad 53

Demostramos las siguientes identidades

1) $\tan^2\alpha - \operatorname{sen}^2\alpha = \tan^2\alpha \cdot \operatorname{sen}^2\alpha$

2) $\frac{\sec^2 u - 1}{\sec^2 u} = \operatorname{sen}^2 u$

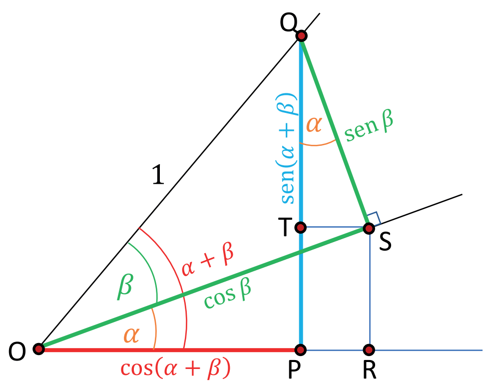
3) $\frac{\csc^2\theta}{1+\tan^2\theta} = \cot^2\theta$

4) $\frac{1+\csc\beta}{\sec\beta} - \cot\beta = \cos\beta$

5) $\frac{\cos\beta}{1-\operatorname{sen}\beta} = \sec\beta + \tan\beta$

2. Identidades de la suma y de la resta de dos ángulos

En esta sección deduciremos identidades para la suma y la diferencia de dos ángulos que reducen



$$\operatorname{sen}\beta = \overline{SQ}$$
$$\cos\beta = \overline{OS}$$
$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \overline{PQ} = \overline{PT} + \overline{TQ}$$
$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{RS}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{PT}}{\cos\beta}; \text{luego } \overline{PT} = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta$$
$$\cos\alpha = \frac{\overline{TQ}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{TQ}}{\operatorname{sen}\beta}; \text{luego } \overline{TQ} = \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot \operatorname{sen}\beta}$$

Del mismo modo:

$$\cos(\alpha+\beta) = \overline{OP} = \overline{OR} - \overline{PR}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{OR}}{\overline{OS}} = \frac{\overline{OR}}{\cos\beta};\ \text{luego } \overline{OR} = \cos\alpha\cdot\cos\beta$$

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{\overline{TS}}{\overline{SQ}} = \frac{\overline{PR}}{\operatorname{sen}\beta};\ \text{luego } \overline{PR} = \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

En base a estas deducciones y de similar modo, podemos establecer las identidades para la diferencia de ángulos:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta - \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

$$\boldsymbol{\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

Para la tangente:

$$\tan(\alpha+\beta) = \frac{\operatorname{sen}(\alpha+\beta)}{\cos(\alpha+\beta)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \cos\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}$$

$$= \frac{\frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cos\alpha\cdot\cancel{\cos\beta}} + \frac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cos\beta}}{\frac{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cancel{\cos\beta}}{\cancel{\cos\alpha}\cdot\cancel{\cos\beta}} - \frac{\operatorname{sen}\alpha\cdot\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}}$$

Por tanto:

$$\boldsymbol{\tan(\alpha+\beta) = \frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

$$\boldsymbol{\tan(\alpha-\beta) = \frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\cdot\tan\beta}}$$

Ejemplo 1: Calculemos el valor exacto de sen 105°.
No tenemos forma de calcular sen 105° directamente, pero podemos escribir el ángulo de 105° como la suma (o resta) de ángulos notables:

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}105^\circ &= \operatorname{sen}(60^\circ+45^\circ)\\ &= \operatorname{sen}60^\circ\cdot\cos45^\circ + \cos60^\circ\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\\ &= \frac{\sqrt{6}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4}\\ &= \boxed{\boldsymbol{\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}}}\end{aligned}$$

Ejemplo 2:

Demostramos que: $\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}(-\operatorname{sen}x+\cos x)$

$$\cos x\cdot\cos\frac{\pi}{4} - \operatorname{sen}x\cdot\operatorname{sen}\frac{\pi}{4} =$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}\cos x - \frac{\sqrt{2}}{2}\operatorname{sen}x =$$

$$\boxed{\frac{\sqrt{2}}{2}(-\operatorname{sen}x+\cos x)} =$$

Ejemplo 3: Demostramos:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}(x+60) = \frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x}{2}}$$

$$\operatorname{sen}x\cdot\cos60 + \cos x\cdot\operatorname{sen}60 =$$

$$\operatorname{sen}x\cdot\frac{1}{2} + \cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} =$$

$$\boxed{\frac{\operatorname{sen}x+\sqrt{3}\cos x}{2}} =$$

Actividad 54

Demostramos:

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$

$\cos(90-\theta) = \operatorname{sen}\theta$

$\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$\tan\alpha - \tan\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cdot\cos\beta}$

$\tan(\pi-\beta) = -\tan\beta$

$\tan(270+\beta) = -\cot\beta$

3. Identidades trigonométricas de ángulos dobles

Para: sen 2α partiremos de la identidad:

$$\operatorname{sen}(\alpha+\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cdot\cos\alpha$$

Reemplazamos $\beta = \alpha$

$$\operatorname{sen}(\alpha+\alpha) = \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha + \operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha$$

Reducimos términos semejantes y tendremos:

$$\boldsymbol{\operatorname{sen}2\alpha = 2\operatorname{sen}\alpha\cdot\cos\alpha}$$

Se realiza el mismo procedimiento para coseno y tangente:

$$\boldsymbol{\cos(2\alpha) = \cos^2\alpha + \operatorname{sen}^2\alpha}$$

$$\boldsymbol{\tan(2\alpha) = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}}$$

Ejemplo 1:

Demostramos que: $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$\cos^2\theta - \sin^2\theta =$

$1 - \sin^2\theta - \sin^2\theta =$

$\boxed{1 - 2\sin^2\theta} =$

Ejemplo 2:

Demostramos que: $\frac{\operatorname{sen} 2\theta}{\operatorname{sen}\theta} - \frac{\cos 2\theta}{\cos\theta} = \sec\theta$

$$\frac{2\,\cancel{\operatorname{sen}\theta}\cdot\cos\theta}{\cancel{\operatorname{sen}\theta}} - \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} =$$

$$2\cos\theta - \frac{\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} =$$

$$\frac{2\cos^2\theta - \cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} =$$

$$\frac{\cos^2\theta + \operatorname{sen}^2\theta}{\cos\theta} =$$

$$\frac{1}{\cos\theta} =$$

$$\boxed{\sec\theta} =$$

Ejemplo 3:

Demostramos que: $\frac{1+\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = \cot x$

$$\frac{1 + \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x} =$$

$$\frac{\cos^2 x + \cos^2 x}{2\operatorname{sen} x\cdot\cos x} =$$

$$\frac{\cancel{2}\cos^{\cancel{2}} x}{\cancel{2}\operatorname{sen} x\cdot\cancel{\cos x}} =$$

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} =$$

$$\boxed{\cot x} =$$

Actividad 55

Demostramos las siguientes identidades:

a) $\operatorname{sen}^2\theta = \frac{1-\cos 2\theta}{2}$

b) $\frac{1+\tan^2\beta}{1-\tan^2\beta} = \sec 2\beta$

c) $\csc 2\gamma = \frac{1}{2}\sec\gamma\csc\gamma$

4. Identidades trigonométricas de ángulos medios

Las identidades de ángulos medios son las siguientes:

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\sin\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}$$

	IC	IIC	IIIC	IVC
Sen	+	+	−	−
Cos	+	−	−	+
Tan	+	−	+	−

El doble signo dependerá del cuadrante al que pertenezca.

Otras identidades de la tangente del ángulo medio son:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} \qquad \tan\frac{\alpha}{2} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}$$

Ejemplo 1: Si β=22°30' calcula sin β,cos β en forma exacta.
Como β pertenece al primer cuadrante el signo de ambas funciones es positivo.

$$\sin 22°30' = \sin\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2-\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}}$$

$$\cos 22°30' = \sin\frac{45°}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos 45°}{2}} = \sqrt{\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{\frac{2+\sqrt{2}}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{2+\sqrt{2}}{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$$

Actividad 56

Demostrar:

1) $\cos x = \frac{1-\tan^2\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

2) $\cos\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$

3) $\tan\frac{\alpha}{2} = \csc\alpha - \cot\alpha$

4) $\sin x = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}}$

Ejemplo 2: Si $\cos\beta = \frac{3}{5}$ y β pertenece al IV cuadrante, calcula $\tan\frac{\beta}{2}$:

$$\tan\frac{\beta}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{1+\cos\beta}} = -\sqrt{\frac{1-\frac{3}{5}}{1+\frac{3}{5}}} = -\sqrt{\frac{\frac{5-3}{5}}{\frac{5+3}{5}}} = -\sqrt{\frac{2}{8}} = -\sqrt{\frac{1}{4}} = \boxed{-\frac{1}{2}}$$

Ejemplo 3: Hallamos el valor de E: $E = \sqrt{\frac{1}{\csc^2\left(\frac{M+N}{2}\right)} + \frac{1}{\sec^2\left(\frac{M+N}{2}\right)} + 3}$

$$E = \sqrt{\sin^2\left(\frac{M+N}{2}\right) + \cos^2\left(\frac{M+N}{2}\right) + 3} = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = \boxed{2}$$

Ejemplo 4: Demuestra la identidad:

$$\tan\frac{\alpha}{2} = \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}\cdot\frac{1+\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} =$$

$$\sqrt{\frac{1-\cos^2\alpha}{(1+\cos\alpha)^2}} =$$

$$\frac{\sqrt{\sin^2\alpha}}{1+\cos\alpha} =$$

$$\boxed{\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha}} =$$

5. Transformacion de suma a producto y de producto a suma

De Productos a sumas

$$\sin\alpha\cdot\cos\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)]$$

$$\cos\alpha\cdot\sin\beta = \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta)]$$

De Sumas a Productos

$$\sin u + \sin v = 2\sin\frac{u+v}{2}\cdot\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\sin u - \sin v = 2\cos\frac{u+v}{2}\cdot\sin\frac{u-v}{2}$$

$$\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$$

$$\sin\alpha\cdot\sin\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)]$$

$$\cos u+\cos v=2\cos\frac{u+v}{2}\cdot\cos\frac{u-v}{2}$$

$$\cos u-\cos v=-2\sin\frac{u+v}{2}\cdot\sin\frac{u-v}{2}$$

Ejemplo 1: Expresamos las sumas y diferencias como productos.

$a)\ \sin 7\theta-\sin 3\theta=2\cos\frac{7\theta+3\theta}{2}\cdot\sin\frac{7\theta-3\theta}{2}$

$=\boxed{2\cos 5\theta\cdot\sin 2\theta}$

$a)\ \cos 4\theta-\cos 2\theta=-2\sin\frac{4\theta+2\theta}{2}\cdot\sin\frac{4\theta-2\theta}{2}$

$=\boxed{-2\sin 3\theta\cdot\sin\theta}$

Ejemplo 2: Demostramos:

$$\frac{\sin\theta+\sin 3\theta}{\cos\theta+\cos 3\theta}=\tan 2\theta$$

$$\frac{2\sin 2\theta\cdot\cos\theta}{2\cos 2\theta\cdot\cos\theta}=$$

$$\frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta}=$$

$$\boxed{\tan 2\theta}=$$

Actividad 57

Demostramos:

$$\frac{\cos 8x+\cos 6x}{\sin 8x-\sin 6x}=\tan x$$

$$\cos(x+y)\cdot\cos(x-y)=\cos^2 x-\sin^2 y$$

$$\sin(x+y)\cdot\sin(x-y)=\cos^2 x-\cos^2 y$$

Ejemplo 3: Expresamos los productos como sumas o diferencias.

$a)\ \cos 6x\cdot\cos 2x=\frac{1}{2}[\cos(6x+2x)+\cos(6x-2x)]$

$=\frac{1}{2}(\cos 8x+\cos 4x)=\boxed{\frac{\cos 8x}{2}+\frac{\cos 4x}{2}}$

$a)\ \sin 5\theta\cdot\cos 3\theta=\frac{1}{2}[\sin(5\theta+3\theta)+\sin(5\theta-3\theta)]$

$=\frac{1}{2}[\sin 8\theta+\sin 2\theta]=\boxed{\frac{\sin 8\theta}{2}+\frac{\sin 2\theta}{2}}$

6. Ecuaciones trigonométricas

Las ecuaciones trigonométricas son ciertas ecuaciones que están afectadas de funciones trigonométricas. Las soluciones (ángulo), se puede dar en uno y dos cuadrantes (soluciones principales) y además se repite en todas las vueltas (soluciones generales).

Para resolver una ecuación trigonométrica no existe un método general, pero podemos clasificar los métodos de resolución de acuerdo a las principales ecuaciones trigonométricas.

Método 1. Ecuación básica

Este tipo de ecuaciones trigonométricas se pueden resolver directamente despejando la función trigonométrica. Son las más sencillas que podemos ver dentro de las ecuaciones trigonométricas.

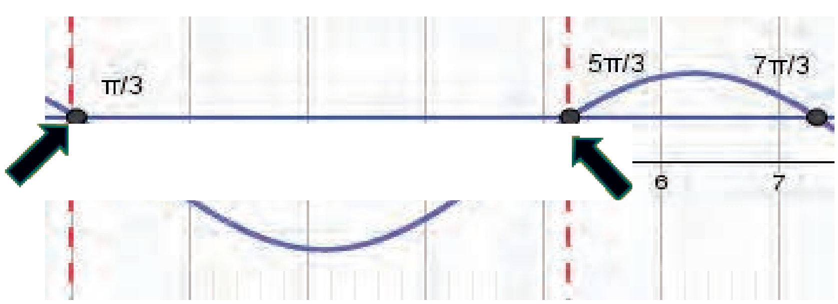
Ejemplo 1: Resuelve la ecuación: 1=2 cos x

Despejamos cos x
Cos x =12
x= cos-112
x1=60°
Solución principal:
x= 360°-x1
x= 360°-60°
x= *300°*
Solución general: $\boxed{x_G=360°\boldsymbol{k}\pm 60}$

Recordemos que para convertir 60° a radianes debemos utilizar la fórmula:

$$\frac{S}{360°}=\frac{R}{2\pi Rad}$$

$60°\ equivale\ a\ \frac{\pi}{3}\ y\ 300°\ equivale\ a\ \frac{5\pi}{3}$



Actividad 58

Resolvemos las ecuaciones:

1) $\tan\beta=\frac{1}{2}$

2) $\cos 2\alpha=\frac{1}{2}$

3) $\text{sen}(\beta)=\frac{5}{6}$

4) $\tan\alpha=\frac{2}{7}$

5) $\frac{1}{\cos x}=3$

Ejemplo 2: Resolvemos la ecuación: $\operatorname{sen}\alpha = \frac{1}{2}$

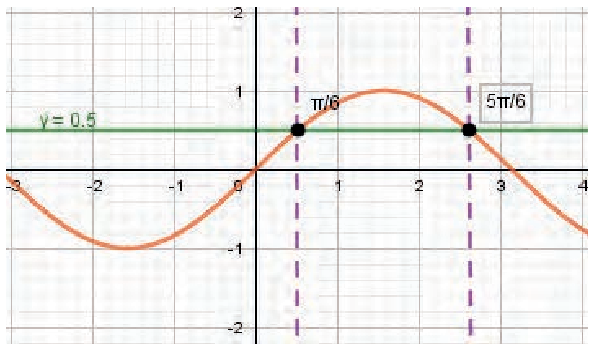
$$x = \operatorname{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$x_1 = 30°$$

Solución principal:

$$x = (180° - x_1)$$
$$x = (180° - 30°)$$
$$x = 150°$$

Solución general:

$$\boxed{x_G = 180°k \pm 30°}$$



Método 2. Ecuación de la forma m·sin x = n · cos x

Las ecuaciones trigonométricas que tiene la forma m · sen x = n · cos x, se debe realizar las operaciones adecuadas para expresar en forma de cociente:

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{n}{m}$$

Ejemplo 1: Resuelve la ecuación: $4 \cdot \operatorname{sen}\alpha - 3 \cdot \cos\alpha = 0$

Solución:

$$4 * \operatorname{sen}\alpha = 3 * \cos\alpha$$

Al expresar la ecuación a la forma $\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = \frac{n}{m}$

$$\frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha} = \frac{3}{4}$$

Aplicamos la identidad trigonométrica: $\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

$$\tan\alpha = \frac{3}{4}$$

Luego se procede a despejar la función.

$$\alpha = \tan^{-1}\left(\frac{3}{4}\right)$$
$$\alpha_1 = 3.87$$

Solución principal:

$$\alpha = (180° + \alpha_1)$$
$$\alpha = (180° + 3.87°)$$
$$\alpha = 183.87°$$

Solución general: $\boxed{x_G = 180°k + 183.87°}$

Ejemplo 2: Resuelve la ecuación: $10 * \operatorname{sen} 4x - 5 * \cos 4x = 0$

Solución:

$$10 * \operatorname{sen} 4x = 5 * \cos 4x$$
$$\frac{sen\ 4x}{cos\ 4x} = \frac{5}{10}$$
$$tan\ 4x = \frac{5}{10}$$
$$4x = \tan^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$
$$4x = 26.565°$$
$$x_1 = 6.64°$$

Solución principal:

$$4x = (180° + x_1)$$
$$4x = (180° + 26.565°)$$
$$x = \frac{206.565}{4}$$
$$x = 51.164°$$

Solución general:

$$4x_G = 180°k + 26.565°$$
$$x_G = \frac{180°k + 26.565°}{4}$$
$$\boxed{x_G = 45°k + 6.641°}$$

Ejemplo 3:

Resuelve la ecuación **$2\cos x \tan x - 1 = 0$**

$$2 \cdot \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} - 1 = 0$$
$$2 \cdot \cos x \cdot \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 1$$
$$2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x = \cos x \ 2 \cdot \cos x \cdot \operatorname{sen} x - \cos x = 0$$
$$\cos x \cdot (2\operatorname{sen} x - 1) = 0$$
$$\cos x = 0 \quad ; \quad 2\operatorname{sen} x - 1 = 0$$
$$x_1 = \cos^{-1}(0) \ ; \ x_2 = \operatorname{sen}^{-1}\left(\tfrac{1}{2}\right)$$
$$x_1 = 90° \quad ; \quad x_2 = 30°$$

Solución principal:

$$x = (360° - x_1) \quad ; \quad x = (180 - x_2)$$
$$x_3 = (360° - 90°) \ ; \ x_4 = (180° - 30°)$$
$$x_3 = 270° \quad ; \quad x_4 = 150°$$

Solución general:

$$x_G = 360°k \pm x_1 \quad ; x_G = 180°k + (-1)^k x_2$$
$$x_{G1} = 360°k \pm 90° \ ; x_{G2} = 180°k + (-1)^k 30$$

Ejemplo 4:

$$\operatorname{sen} 2x\,(3\cos x - 2) = 0$$
$$\operatorname{sen} 2x = 0 \quad ; \quad 3\cos x - 2 = 0$$
$$2x_1 = \operatorname{sen}^{-1}(0) \ ; \ x_2 = \cos^{-1}\left(\tfrac{2}{3}\right)$$
$$2x_1 = 0° \quad ; \quad x_2 = 48.19°$$

Solución principal:

$$x = (180° - x_1) \quad ; \quad x = (360° - x_2)$$
$$2x_3 = (180° - 0°) \ ; \ x_4 = (360° - 48.19°)$$
$$2x_3 = 180° \quad ; \quad x_4 = 311.81°$$
$$x_3 = 90°$$

Solución general:

$$x_G = 180°k + (-1)^k x_1 \ ; \ x_G = 360°k \pm x_1$$
$$2x_{G1} = 180°k + (-1)^k 0° \ ; \ x_{G2} = 360°k \pm 48.19°$$
$$2x_{G1} = 180°k \quad ; \quad x_{G1} = 90°k$$

No olvides que se debe tener una solución principal y otra solución general.

¡No lo olvides!

Para resolver este tipo de ejercicios se debe reemplazar 2x = 0 tanto en la solución principal como en la solución general y luego recién despejar y simplificar.

Actividad 59

Un avión que va de La paz a Santa Cruz tarda 1 hora a una velocidad de 920Km/h
¿Cuánto tardara si se dirige a una velocidad de 1500Km/h?

Método 3. Ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = 0$

Este método consiste en transformar de manera que sea factorizada, usualmente se convierte en una ecuación trigonométrica de segundo grado que se puede factorizar por aspa simple o por fórmula general, teniendo en cuenta que la incógnita es la función trigonométrica.

Ejemplo 1:

Resolvemos la ecuación: $sen^2x = \frac{3(1-cosx)}{2}$

El ejercicio también se puede resolver por aspa simple:

$$2sen^2x - 3\sin x + 1 = 0$$

$$\begin{array}{lcr} 2\,\text{sen}\,x & & -1 = -senx \\ \text{sen}\,x & & 1 = -2senxx \end{array}$$

Factorizando:

$$(2\,\text{sen}\,x - 1)(\text{sen}\,x - 1) = 0$$

$$2(1 - cos^2x) = 3(1 - cosx)$$

$$2 - 2cos^2x = 3 - 3cosx$$

$$2 - 3 - 2cos^2x + 3cosx = 0$$

$$2cos^2x - 3cosx + 1 = 0$$

$$(2cosx - 1)(cosx - 1) = 0$$

$$2cosx - 1 = 0 \quad ; \quad cosx - 1 = 0$$

$$cosx = \frac{1}{2} \quad ; \quad cosx = 1$$

$$x_1 = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) \quad ; \quad x_2 = \cos^{-1}(1)$$

$$x_1 = 60° \quad ; \quad x_2 = 0°$$

Solución principal:

$x = (360° - x_1) \quad ; \quad x = (360° - x_2)$

$2x_3 = (360° - 60°) \; ; \quad x_4 = (360° - 0°)$

$2x_3 = 300° \quad ; \quad x_4 = 360°$

Solución general:

$x_G = K360° \pm x_1 \quad ; \quad x_G = K360° \pm x_1$

$x_{G1} = K360° \pm 60° \; ; \; x_{G2} = K360° \pm 0$

$x_{G2} = K360°$

Ejemplo 2:

Resolvamos la ecuación: $\mathbf{2 * sen\,x + csc\,x = 3}$

$$2\,\text{sen}\,x + \frac{1}{\text{sen}\,x} = 3$$

$$\frac{2sen^2x + 1}{\text{sen}\,x} = 3$$

$$2 * sen^2x + 1 = 3 * \text{sen}\,x$$

$$2 * sen^2\,x - 3\,\text{sen}\,x + 1 = 0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado por fórmula:

$$\text{sen}\,x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$\text{sen}\,x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{3^2 - 4(2)(1)}}{2(2)}$$

$\text{sen}\,x = \frac{3+1}{4} \quad ; \quad \text{sen}\,x = \frac{3-1}{4}$

$\text{sen}\,x = 1 \quad ; \quad \text{sen}\,x = \frac{1}{2}$

$x_1 = \text{sen}^{-1}(1) \; ; \quad x_2 = \text{sen}^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$

$x_1 = 90° \quad ; \quad x_2 = 30°$

Ejemplo 3:

Determinamos las soluciones de cada ecuación en el intervalo $[0, 2\pi)$ y $[0°, 360°]$

a) $\sin x - \cos x = \sqrt{2}$

$$(\sin x - \cos x)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$\sin^2 x - \sin 2x + \cos^2 x = 2$$

$$\sin 2x = -1$$

$$2x = 270° \quad \boxed{x = 135°}$$

b) $\sqrt{3}\cos\theta\tan\theta - \cos\theta = 0$

$$\cos\theta\,(\sqrt{3}\tan\theta - 1) = 0$$

$$\cos\theta = 0 \qquad\qquad \sqrt{3}\tan\theta = 1$$

$$\boxed{\theta = 90° \text{ ó } 270°} \qquad \boxed{\theta = 30° \text{ ó } 210°}$$

Actividad 60

Resolvemos las ecuaciones trigonométricas:

1) $sen^2\,\beta + \text{sen}\,\beta = -6$
2) $8sen^2\,\beta - 11\,\text{sen}\,\beta + 3 = 0$
3) $3cos^2\,\alpha - \cos\alpha - 2 = 0$
4) $2\cos x = 1 - \text{sen}\,x$
5) $4\,tan^2\,\beta + 12\,\tan\beta - 27 = 0$
6) $8 + \text{sen}\,x = 10\,cos^2x$
7) $2\cos^2 x = \text{sen}\,x - 1$
8) $8\,tan^2\,\beta - 14\,\tan\beta = -3$
9) $2\,tan\,x - 3tan\,x = 1$

Movimiento Parabólico. - En el movimiento de un proyectil en el vacío, la distancia máxima se calcula mediante la relación:

$$\boldsymbol{D_{max}} = \frac{2 \cdot \boldsymbol{v_0^2} \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{\alpha} \cdot \mathbf{cos}\,\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{g}}$$

v_0 *es la velocidad inicial*

α *es el ángulo de salida*

$g = 9{,}8\,m/s^2$ es la constante de la gravedad

Expresa la fórmula de la distancia máxima en términos de una sola función trigonométrica:

$$D_{max} = \frac{2 \cdot v_0^2 \cdot \sin\alpha \cdot \cos\alpha}{g} \xrightarrow{\text{IDENTIDAD DE ÁNGULO DOBLE}} \boxed{\frac{\boldsymbol{v_0^2} \cdot \mathbf{sin}\,\boldsymbol{2\alpha}}{\boldsymbol{g}}}$$

Aeronáutica. - Cuando un avión se mueve más rápido que el sonido, sus ondas sonoras forman un cono. La fórmula que relaciona la velocidad del avión, en unidades Mach (1Mach=1368km/h), con el ángulo α del vértice del cono de ondas es $\frac{1}{M} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Si la velocidad de un avión es Mach 2, determina el valor de α.

DATOS:

$M = 2$

$\alpha = ?$

FÓRMULA:

$$\frac{1}{M} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

OPERACIONES:

$$\frac{1}{2} = \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$\frac{\alpha}{2} = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\alpha = 30° \cdot 2 \quad \boxed{\alpha = 60°}$$

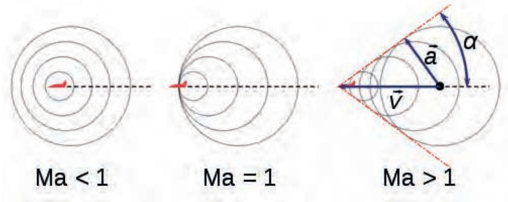
¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 61. Realizamos la valoración, analizando y respondiendo a las siguientes preguntas:

1)¿Cuál es el objetivo de una ecuación trigonométrica?
2)¿Dónde se aplican las ecuaciones trigonométricas?
3)¿Por qué es importante el conocer identidades trigonométricas?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 62. Trabajemos con nuestros materiales



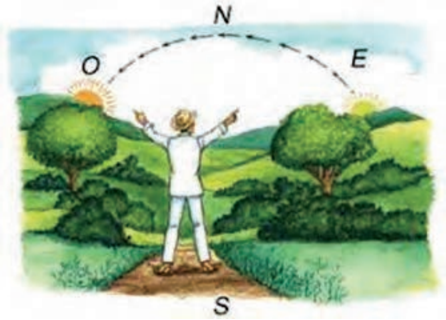
- Realiza un formulario con todas las identidades trigonométricas.
- Realiza un mapa conceptual del tema y compártelo en tu clase.

INTRODUCCIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA
APLICADA AL CONTEXTO Y/O A LA TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

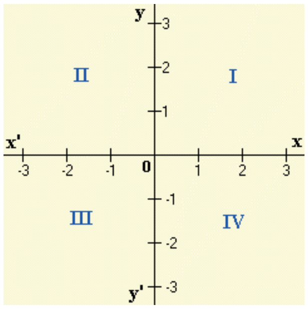
Actividad 63. Analicemos la historia de algunos agricultores del área rural que tienen diferentes estrategias para ubicar puntos estratégicos:
En la comunidad de Vera Cruz, ubicado en la provincia Linares a 90 km de la ciudad de Potosí, una gran parte de la población se dedica a la agricultura y a la crianza de animales como ser: vacas, chivos, chanchos, ovejas y otros.

En relación al cuidado de los bueyes en esa región, los comunarios tienen la costumbre de mantener durante varios meses a los bueyes en los cerros, cada año en la temporada de cosecha los bueyes retornan a la comunidad hasta que pase la misma, posteriormente los dueños trasladan a los animales rumbo al cerro lugar donde viven la mayor parte del año y ahí es donde los pobladores buscan una señal como un árbol o una roca visible que no sea fácil de modificarse por las inclemencias de la naturaleza, ese punto es el punto de origen, que les sirve como referencia para ubicar los puntos cardinales considerando la orientación del sol, desde el punto de origen cuentan un numero de pasos determinados hacia el Este, lo necesario, en la dirección de donde sale el sol (para nosotros el eje x positivo). Posteriormente, continúan contando pasos con dirección al norte que representa al eje y; de esa manera encuentran diferentes puntos de ubicación o las coordenadas que les sirve para orientarse y retornar al mismo lugar donde dejaron a los bueyes.



Actividad 64

Realiza la comparación entre un sistema de coordenadas rectangulares y los puntos cardinales.



Es muy interesante la práctica de los pobladores de las comunidades del área rural, analicemos la historia para responder las siguientes preguntas:

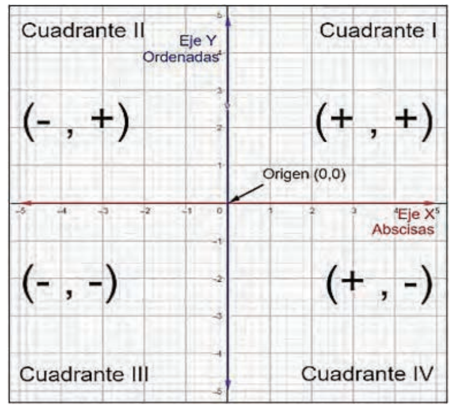
- ¿Utilizas los cuatro puntos cardinales para orientarte?
- ¿Qué comparación puedes hacer entre los puntos cardinales con un sistema de coordenadas rectangulares?
- ¿Qué sistemas de referencia conoces?

Historia de la geometría analítica

El nacimiento de la geometría analítica se atribuye a Descartes, por el apéndice La Geometría incluido en su Discurso del método, publicado en 1637, si bien se sabe que Pierre de Fermat conocía y utilizaba el método antes de su publicación por Descartes.

1. Sistemas de coordenadas rectangulares y su relación con los saberes ancestrales

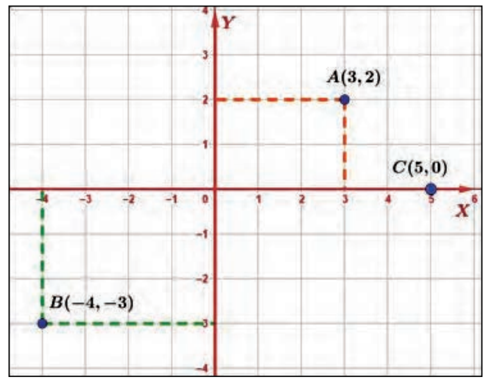
Un sistema de coordenadas rectangulares también se denomina cartesiano en honor a René Descartes. Consta de dos rectas llamadas ejes que se cortan perpendicularmente en un punto llamado origen formando cuatro cuadrantes. La recta horizontal se llama eje de las abscisas o de las x, y la recta vertical se llama eje de las ordenadas o eje de las y.



Está formado por dos ejes en el plano, siendo estos perpendiculares que se cortan en el origen. Las coordenadas de un punto cualquiera serán dadas por las proyecciones en el eje de las “x” así como en el eje de las “y”, como de la distancia entre el punto y el origen sobre cada uno de los ejes.

Par ordenado

En matemáticas, un par ordenado es una pareja de elementos, donde se distingue un elemento de otro. El par ordenado cuyo primer elemento es “x” y el segundo elemento es “y” se denota por (x, y).



El Primer valor “x” pertenece al eje horizontal x o eje de las abscisas; y el segundo elemento “y” pertenece al eje vertical y o eje de las ordenadas; (x, y).

Ejemplo 1.

Graficamos los puntos en el plano cartesiano a través de los siguientes pares ordenados A (3, 2); B (-4, -3) y C (5, 0). (Figura 1).

Ejemplo 2.

Graficamos las siguientes figuras geométricas en el plano cartesiano a través de los siguientes pares ordenados: A (3, 2); B (3, -2); C (-1, -2) y D (-1, 2). (Figura 2).

Figura 1	Pares ordenados
Triángulo	A=(3,2);B=(5,0);C=(1,-1)

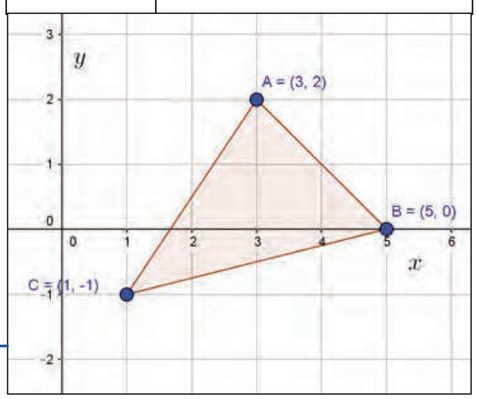
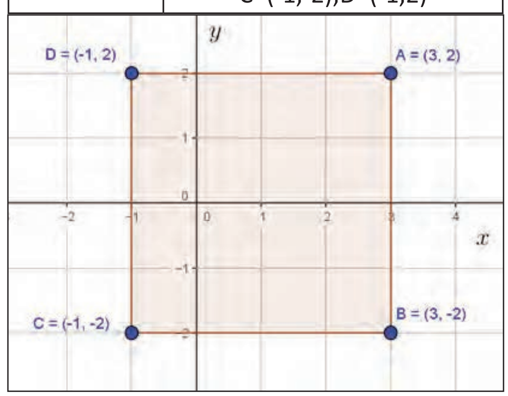


Figura 1	Pares ordenados
Cuadrado	A=(3,2);B=(3,-2); C=(-1,-2);D=(-1,2)



Actividad 65

Graficamos las figuras geométricas mediante los siguientes pares ordenados.

1) $A = (3,3); B = (3,-5);$
$C = (-1,-1); D = (-1,3)$
2) $A = (2,2); B = (4,-2);$
$C = (-2,-2); D = (-2,2)$
3) $A = (5,5); B = (3,-2);$
$C = (-2,-3); D = (0,2)$
4) $A = (5,3); B = (3,-4);$
$C = (-3,-5); D = (-2,2)$

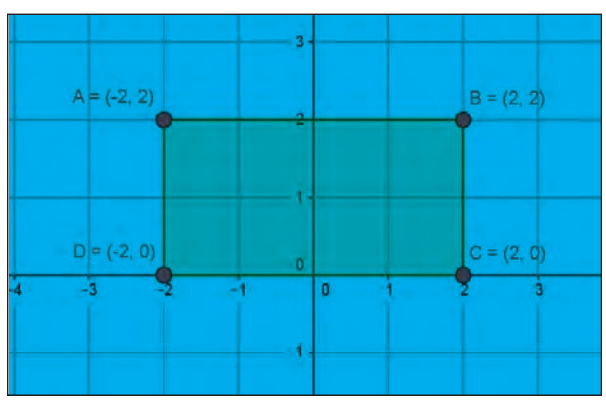
Pares ordenados:

$A = (3, 2)$

$B = (3, -2)$

$C = (-1, -2)$

$D = (-1, 2)$



Actividad 66: graficamos las siguientes figuras geométricas en el plano cartesiano a través de los siguientes pares ordenados:

figura	Pares Ordenados
Triángulo	A=(2,2); B=(4,0); C=(0,-1)
Cuadrado	A=(0,2); B=(2,2); C=(2,0); D=(0,0)
Rectángulo	A=(-1,2); B=(2,2); C=(2,0); D=(-1,0)
Rombo	A=(0,3); B=(1,0); C=(0,-3); D=(-1,0)

Geometría analítica, problemas fundamentales

Las dos cuestiones fundamentales de la geometría analítica son: Dado el lugar geométrico de un sistema de coordenadas, para obtener su ecuación y dada la ecuación en un sistema de coordenadas, determinar la gráfica o lugar geométrico de los puntos que verifican dicha ecuación.

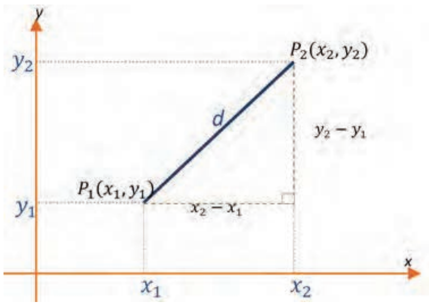
2. Distancia entre dos puntos

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje x o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus abscisas.

$$|x_2 - x_1| = d$$

Cuando los puntos se encuentran ubicados sobre el eje "**y**" o en una recta paralela a este eje, la distancia entre los puntos corresponde al valor absoluto de la diferencia de sus ordenadas.

$$|y_2 - y_1| = d$$



Ahora, si los puntos se encuentran en cualquier lugar del sistema de coordenadas, la distancia queda determinada por la siguiente relación:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Dados dos puntos cualesquiera P_1 (x_1, y_1), P_2 (x_2, y_2), definimos la distancia entre ellos, d(P_1, P_2) como la longitud del segmento de recta que los separa.

Teniendo los puntos: P_1 (x_1, y_1) y P_2 (x_2, y_2)

Trazamos por P_1 y P_2 paralelas a ambos ejes se forma el triángulo rectángulo. Donde la hipotenusa es la distancia y los catetos las rectas P_1D y P_2D

$$\mathbf{P_1D = x_2 - x_1 \quad y \quad P_2D = y_2 - y_1}$$

Por el teorema de Pitágoras:

$$d^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$\boldsymbol{d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

Ejemplo 1.
Calculamos la distancia entre los siguientes pares de puntos.
A(-3,2) y B(2,3)

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

$$d = \sqrt{(2+3)^2 + (3-2)^2} = \sqrt{26} = \boxed{5{,}17}$$

Ejemplo 2.
Determinemos el perímetro del triángulo cuyos vértices son: A (-3,1), B(1,4) y C(5,0)

Cálculo de la distancia AC:

$$\overline{AC} = \sqrt{1 + 64} = \sqrt{65}$$

Cálculo de la distancia AB:

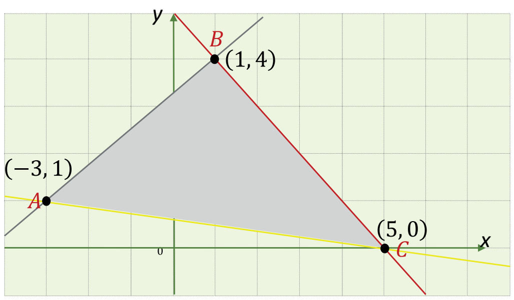
$$\overline{AB} = \sqrt{9 + 16} = 5$$

Cálculo de la distancia BC:

$$\overline{BC} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32}$$

Calculamos el perímetro sumando los lados:

$$P = \sqrt{65} + 5 + \sqrt{32} = \boxed{\mathbf{18{,}72}}$$



Actividad 67

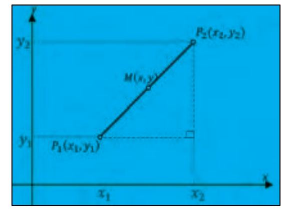
1. Calculamos la distancia entre los puntos $A(2,3)$ y $B\ (0,-10)$
2. Calculamos la distancia entre los puntos $A\ (-6,1)$ y $B\ (-1,2)$
3. Calculamos la distancia entre los puntos $A\ \left(\frac{1}{2},-3\right)$ y $B\ \left(-5,\frac{1}{6}\right)$
4. Calculamos la distancia entre los puntos $A\ (-8,0)$ y $B\ (0,4)$

Actividad que debes realizar para fortalecer tus conocimientos.

1) Calcula la distancia entre los puntos A(- 5,0) y B (0,-12)
2) Calcula la distancia entre los puntos A (-7,1) y B (-1,-2)
3) Calcula la distancia entre los puntos $A\left(\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)$ y $B\left(-3,\frac{1}{6}\right)$
4) Calcula la distancia entre los puntos A (- 6,0) y B (0,-11)

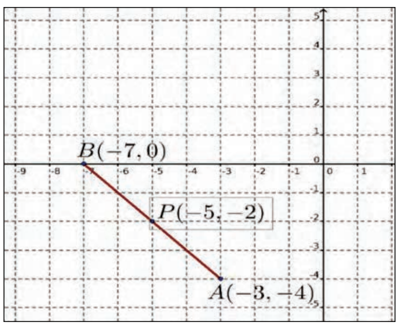
Punto Medio de un segmento

Las coordenadas del punto medio de un segmento están dadas por las semisumas de las coordenadas de sus puntos extremos.



Dados los puntos $P_1\ (x_1, y_1)$ y $P_2\ (x_2, y_2)$, las coordenadas del punto medio están dadas por las siguientes expresiones:

$$x=\frac{x_1+x_2}{2} \quad ; \quad y=\frac{y_1+y_2}{2}$$



Ejemplo 1:

Determina el punto medio del segmento AB delimitado por los puntos: $A(-3,-4)$ y $B(-7,0)$.

Punto A: $x_1=-3,\ \ y_1=-4$ Punto B: $x_2=-7,\ \ y_2=0$

Calculamos la coordenada en "x":

$$x=\frac{-7-3}{2}=-\frac{10}{2}=-5$$

Calculamos la coordenada en "y":

$$y=\frac{-4+0}{2}=-\frac{4}{2}=-2$$

El punto medio es: $\boldsymbol{P(-5,-2)}$

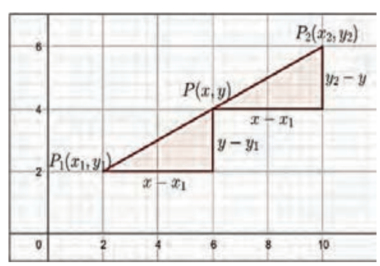
Actividad 68

1. Calculamos el punto medio del segmento $\boldsymbol{AB}$ delimitado por los puntos: $\boldsymbol{A(-2,-6)}$ y $\boldsymbol{B(4,-2)}$
2. Calculamos el punto medio del segmento $\boldsymbol{AB}$ delimitado por los puntos: $\boldsymbol{A(4,-3)}$ y $\boldsymbol{B(1,4)}$
3. Calculamos el punto medio del segmento $\boldsymbol{AB}$ delimitado por los puntos: $\boldsymbol{A\left(-\frac{1}{2},-\frac{1}{3}\right)}$ y $\boldsymbol{B\left(-\frac{2}{3},\frac{5}{6}\right)}$
4. Calculamos el punto medio del segmento $\boldsymbol{AB}$ delimitado por los puntos: $\boldsymbol{A(-2,-6)}$ y $\boldsymbol{B(4,-2)}$

3. División de un segmento en una razón dada

Dividir un segmento $P_1\ P_2$ en una relación dada "r" es determinar un punto P de la recta que contiene al segmento $P_1\ P_2$, de modo que las dos partes, P_1 y P_2, están en la relación r:

$$r=\frac{P_1P}{P\ P_2}$$



Donde P(x,y) es el punto P

$$\boldsymbol{x=\frac{x_1+rx_2}{1+r}} \qquad \boldsymbol{y=\frac{y_1+ry_2}{1+r}}$$

Ejemplo 2:

¿Qué puntos intermedios P_1 y P_2 dividen al segmento de extremos A (-1,-3) y B (5,6) en tres partes iguales?

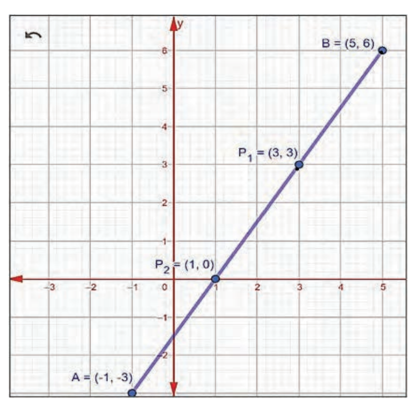
Como el segmento se divide en tres partes iguales ubicaremos dos puntos:

Para P_1 la razón es r = 2:

$$x_1=\frac{-1+2(5)}{1+2} \qquad y_1=\frac{-3+2(6)}{1+2}$$

$$x_1=\frac{9}{3} \qquad y_1=\frac{9}{3}$$

$$\boldsymbol{x_1=3} \qquad \boldsymbol{y_1=3}$$



Con la razón r = 2 tenemos el punto P_1 (3,3)

Para P_2 la razón es $\boldsymbol{r} = \frac{1}{2}$

$$x_2 = \frac{-1+\frac{1}{2}(5)}{1+\frac{1}{2}} \qquad y_2 = \frac{-3+\frac{1}{2}(6)}{1+\frac{1}{2}}$$

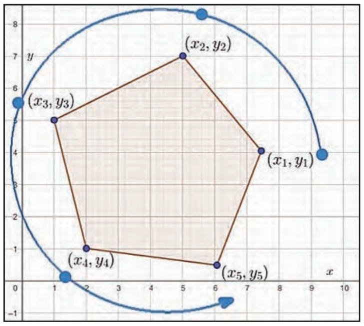
$$x_2 = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}} = \mathbf{1} \qquad y_2 = \frac{0}{\frac{3}{2}} = \mathbf{0}$$

Con la razón $r = \frac{1}{2}$ tenemos el punto $\boldsymbol{P_2(1,0)}$

4. Área de un polígono

El área de un polígono de vértices: $A(x_1,y_1)$; $B(x_2, y_2)$...$N(x_n, y_n)$ está dado por:

$$A = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_3 \\ x_3 & y_3 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{vmatrix} u^2$$



Actividad 69

1) Demostramos que los puntos $A(7,5)$ y $B\ (2,3)\ C\ (6,-7)$ son los vértices de un triángulo rectángulo.
2) Demostramos que los puntos $A(3,8)$ y $B\ (-11,3)\ C\ (-8,-2)$ son los vértices de un triángulo isósceles.
3) Demostramos que los puntos tres puntos siguientes son colineales $A(-3,-2)$ y $B\ (5,2)\ C\ (9,4)$

Glosario

Figura geométrica plana que está limitada por tres o más rectas y tiene tres o más ángulos y vértices.

Ejemplo 3

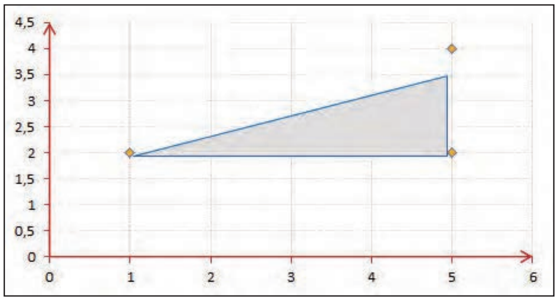
Calculamos el área del triángulo delimitado por los puntos: A = (1,2), B = (5,2), y C = (5,4)

$$A = \frac{1}{2} * \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 2 \\ 5 & 4 \\ \color{red}{1} & \color{red}{2} \end{vmatrix} \boldsymbol{u^2}$$

Las diagonales primarias llevan signo positivo.

Las diagonales secundarias llevan signo negativo.

$$A = \frac{1}{2}|2+20+10-10-10-4| = \frac{1}{2} * 8 = \boxed{\boldsymbol{4u^2}}$$



Ejemplo 4

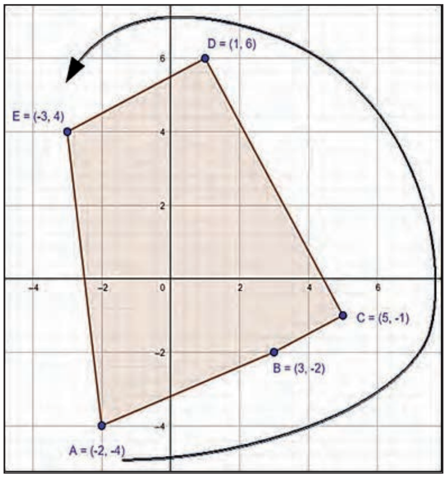
Calculamos el área del polígono delimitado por los puntos: A(-2,-4); B(3,-2); C(5,-1); D(1,6) y E(-3,4)

$$A = \frac{1}{2} * \begin{vmatrix} -2 & -4 \\ 3 & -2 \\ 5 & -1 \\ 1 & 6 \\ -3 & 4 \\ -2 & -4 \end{vmatrix} u^2$$

$$A = \frac{1}{2} * |4-3+30+4+12+12+10+1+18+8|$$

$$A = \frac{1}{2} * |96\boldsymbol{u^2}|$$

$$A = \boxed{\mathbf{48u^2}}$$



Actividad 70: Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno:

1. Calcular el área del polígono delimitado por los puntos: $\boldsymbol{A(2,5)}$; $\boldsymbol{B(7,1)}$; $\boldsymbol{C(3,-4)}$ y $\boldsymbol{D(-2,3)}$
2. Calcular el área del polígono delimitado por los puntos: $\boldsymbol{A(0,4)}$; $\boldsymbol{B(1,-6)}$; $\boldsymbol{C(-2,-3)}$ y $\boldsymbol{D(-4,2)}$
3. Calcular el área del polígono delimitado por los puntos: $\boldsymbol{A(1,5)}$; $\boldsymbol{B(-2,4)}$; $\boldsymbol{C(-3,-1)}$; $\boldsymbol{D(2,-3)}$ y $\boldsymbol{D(5,1)}$

Actividad 71. Resolvamos los siguientes ejercicios

Actividad para que lo realices en tu casa y fortalecer tus conocimientos.

1. Calculamos el área del polígono delimitado por los puntos: $A(2,3); B(5,7); C(-3,4)$
2. Hallamos el área del pentágono cuyos vértices son los puntos de coordenadas $A(-3,-2)$; $B\ (-2,5)$; $C\ (2,7)$ $D\ (5,1)$; $E\ (2,-4)$
3. Hallamos el área del triángulo cuyas coordenadas de los vértices son: $A(2,-3)$; $B\ (4,2); C(-5,-2)$.

Actividad 72

Hallamos las pendientes de las rectas que pasan por los puntos:

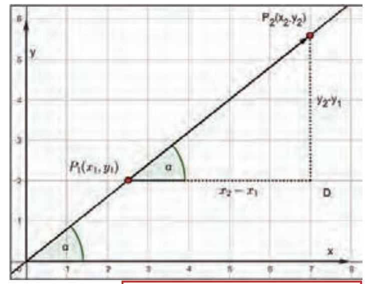
1) $A(3,4)\ B\ (1,-2)$
2) $A(2,4)\ B\ (2,-4)$
3) $A(1,3)\ B\ (7,1)$
4) $A(3,-2)\ B\ (3,5)$
5) $A(6,0)\ B\ (6,\sqrt{3})$

5. Pendiente de una recta

La pendiente es la inclinación de la recta con respecto al eje de abscisas. Se denota con la letra m.

Si m > 0, la función es creciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es agudo.

Si m < 0, la función es decreciente y el ángulo que forma la recta con la parte positiva del eje OX es obtuso.



La pendiente de una recta es la tangente del ángulo que forma la recta con el semi eje positivo de las abscisas. Deducimos la fórmula de la pendiente:
Teniendo $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ en la misma recta y el ángulo α de inclinación. Se trazan paralelas desde ambos puntos hacia los ejes y queda expreso el triángulo P_1DP_2
Posteriormente deducimos:

$$\boxed{\mathbf{m = tg\alpha = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}}$$

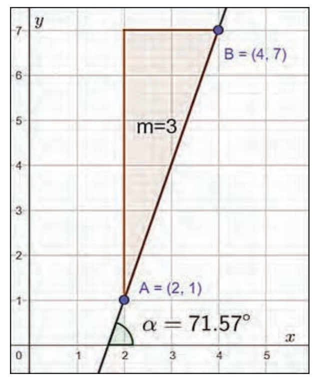
$$m = tg\ \alpha = \frac{DP_2}{P_1D} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

Ejemplo 5
La pendiente de la recta que pasa por los puntos A (2,1) y B (4,7) es:

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$
$$m = \frac{7-1}{4-2}$$
$$m = \frac{6}{2}$$
$$m = 3$$

Inclinación:

$$\tan\alpha = m$$
$$\tan\alpha = 3$$
$$\alpha = \tan^{-1}(3)$$
$$\alpha = 71.57°$$



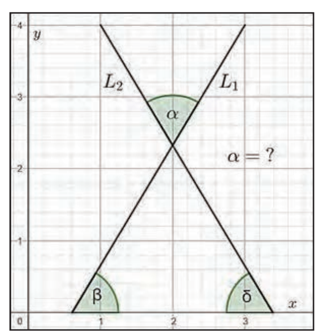
Actividad que debes realizar para fortalecer tus conocimientos.

1) Calcular la pendiente y la inclinación de la recta que pasa por los puntos.
2) Calcular si la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{A(1,-1)}$ y $\boldsymbol{B(-1,4)}$es paralela o perpendicular, a la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{C\left(\frac{1}{2},1\right)}$ y $\boldsymbol{D\left(0,\frac{1}{4}\right)}$
3) Determina si la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{A(-2,-11)}$ y $\boldsymbol{B(0,-3)}$ es paralela o perpendicular, a la recta que pasa por los puntos $\boldsymbol{C(8,-3)}$ y $\boldsymbol{D\left(2,-\frac{3}{2}\right)}$

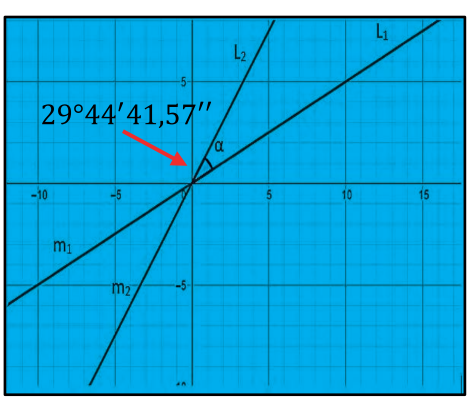
Ángulo entre dos rectas

El ángulo α medida entre las rectas L_1 y L_2 en sentido contrario a las manecillas del reloj desde la recta L_1 con pendiente m_1 hacia la recta L_2 con pendiente m_2 es:

$$\mathbf{\tan\alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1} \implies \alpha = \tan^{-1}\left(\frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}\right)}$$



Ejemplo 6: Calculamos el ángulo comprendido entre las rectas L1 y L2 de pendientes



$$m_1 = \frac{1}{2}\ \ y\ \ m_2 = \frac{3}{2}$$

Aplicando la fórmula:

$$tan\ \alpha = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_2 m_1}$$

Reemplazando los valores:

$$\alpha = arctan\left(\frac{\frac{3}{2} - \frac{1}{2}}{1 + \left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$\alpha = arctan\left(\frac{1}{1 + \frac{3}{4}}\right)$$

$$\alpha = arctan\left(\frac{1}{\frac{7}{4}}\right)$$

$$\alpha = arctan\left(\frac{4}{7}\right)$$

$$\boldsymbol{\alpha} = 29^{\mathbf{o}}44'41{,}57''$$

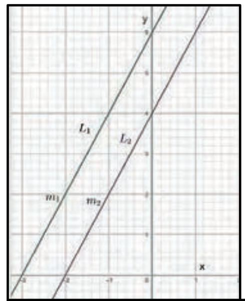
- Calculamos el ángulo comprendido entre las rectas L_1 y L_2, de pendientes $m_1 = 1$ y $m_2 = 3$.
- Calculamos el ángulo comprendido entre las rectas L_1 y L_2, de pendientes $m_1 = -\frac{2}{3}$ y $m_2 = 5$
- Calculamos el ángulo comprendido entre las rectas L_1 y L_2, de pendientes $m_1 = \frac{3}{2}$ y $m_2 = \frac{7}{2}$

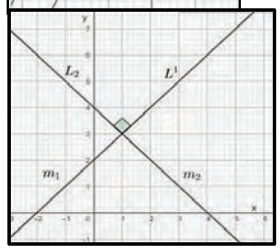
Condiciones de paralelismo y perpendicularidad

Paralelismo

Dos rectas L_1 y L_2 son paralelas si sus pendientes son iguales.

$$m_1 = m_2$$





Paralelismo

Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si el producto de sus pendientes es igual a 1 ósea

$$m_1 * m_2 = -1 \quad \text{ó} \quad m_1 = -\frac{1}{m_2}$$

Actividad 73

1) Demostramos que las rectas que pasan por los puntos son paralelos:
   $L1 = A(2,3); B(5,7)$
   $L2 = A(2,2); B(5,6)$
2) Demostramos que las rectas que pasan por los puntos son perpendiculares: $L1 = A(-1,1); B(1,1)$
   $L2 = A(1,0); B(1,4)$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 74. Valoremos la utilidad de la geometría analítica en actividades como la distribución de parcelas, cálculo de áreas de terrenos e inclinación de la pendiente de un techo u otras aplicaciones de la misma.

Para que reflexionemos y analicemos la necesidad e importancia de la geometría analítica en nuestra cotidianidad, respondemos las siguientes preguntas:

- ¿Por qué es importante aprender a resolver problemas relacionados a geometría analítica?
- ¿Cómo podemos aplicar las coordenadas rectangulares para la ubicación de puntos determinados?
- ¿Cómo aplicamos la distancia entre dos puntos para realizar cálculos de distancias inaccesibles?
- En tu cotidianidad ¿aplicas la geometría analítica? Si no lo realizas ¿crees ahora que puedes resolver algunos problemas de la comunidad a través de la aplicación de la geometría analítica?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 75. Construimos con un GEOPLANO que nos ayudara a demostrar de manera gráfica y física la aplicabilidad de la geometría analítica. Para la construcción requerimos el siguiente material. En función a tu creatividad puede aplicar otros materiales para la construcción del geoplano.

Material

- Plastoformo de 1m por 1m de 1cm de grosor.
- Cartón prensado de 1m por 1m.
- Papel lustre de color claro par forrar el cartón prensado.
- Pegamento.
- Chinches con cabeza de colores.
- Marcador grueso de color negro.

Construcción

- Forramos el cartón prensado con el papel lustre.
- Pegamos el cartón prensado con el plastoformo.
- Trazamos el sistema de coordenadas rectangulares en la cara forrada del cartón prensado.
- Insertamos los chinches de color en todos los puntos del cuadriculado.

LABORATORIO MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 76. Identifiquemos conocimientos previos sobre la aplicación y uso de las tecnologías en educación, específicamente el celular y la computadora.

Los estudiantes actualmente conocen el uso del celular, pero en varios casos lo utilizan de manera inadecuada, por lo tanto, es importante responder las siguientes preguntas problematizadoras:

- ¿Por qué es importante el uso de las tecnologías en el proceso de enseñanza y aprendizaje?
- ¿Qué aplicación conoces, que sean útiles para fortalecer tus conocimientos en el área de matemática?
- ¿Qué tecnologías de información y comunicación utilizas diariamente?
- ¿Qué conocimientos tienes sobre el computador?
- ¿Qué aplicaciones o softwares relacionados al área de las matemáticas conoces? Menciona.

Descarga las siguientes aplicaciones en tu equipo celular y tu pc:

Microsoft® Mathematics

GeoGebra

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Gráfica de funciones trigonométricas con software especializado (GeoGebra, Microsoft Mathematics, Wolfram Mathematica, Matlab).

Sabias qué...

El creador de GeoGebra Markus Hohenwarter, comenzó el proyecto en el año 2001, como parte de su tesis de maestría, en la Universidad de Salzburgo, lo continuó en la Universidad Atlántica de Florida (2006-2008) y en la actualidad, en la Johannes Kepler Universität, Austria.

Es la representación gráfica a través de un software educativo

GeoGebra

GeoGebra es un software de matemáticas dinámicas libre para todas las áreas de las matemáticas escolares, desde prebásica hasta educación superior. Su interfaz es bastante intuitiva.

Para la representación gráfica en el software GeoGebra, inicialmente es importante y necesario conocer las herramientas de interfaz de GeoGebra que está organizado por vistas, componentes, menús y cuadro de diálogos.

Vistas

Son los espacios donde se va creando la gráfica. Esta organizado por las siguientes vistas: algebraicas, CAS gráfica, gráfica 3D y hoja de cálculo.

Componentes

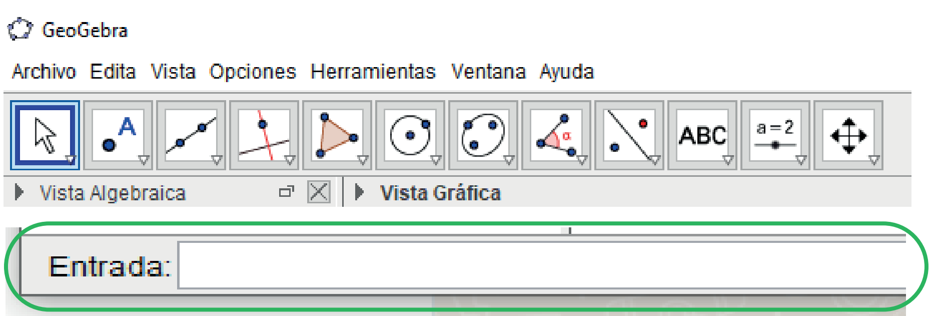
Está compuesto por la barra de menú, barra de herramientas, barra de entrada, menú contextual, barra de navegación y teclado virtual.

Barra de menú

La Barra Lateral que permite seleccionar una de las Perspectivas, puede homologarse a un menú más que, incluso, puede denominarse Menú Apariencias

Barra de herramientas

Este compuesto por todas las herramientas que son más usuales y en cada uno de los iconos hay otros sub iconos.

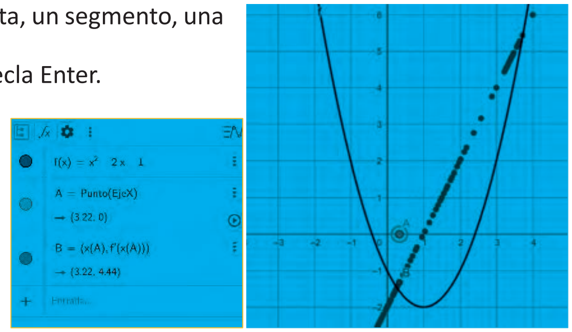


Gráficas de geometría analítica

Ejercicio 1: Lugar geométrico

Seleccionar el punto B que depende de otro punto A cuyo lugar geométrico va a trazarse y sobre el cual debe hacerse clic luego de B. El punto B debe pertenecer a un objeto –ej.: una recta, un segmento, una circunferencia-.

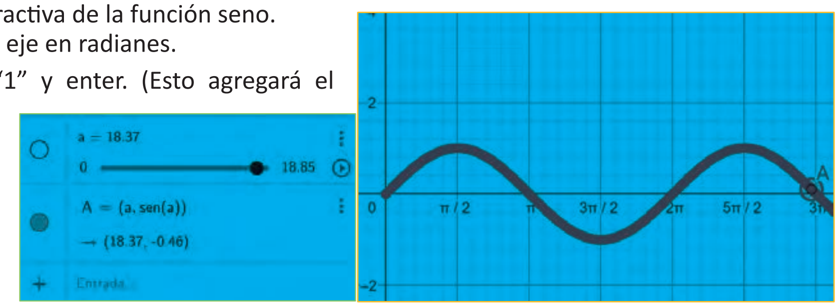
1. Anotar $f(x) = x^2 - 2x - 1$ en el Campo de entrada y pulsar la tecla Enter.
2. Ubicar un nuevo punto A en el eje x.
3. Crear un punto B = (x(A), f'(x(A))) que dependerá del punto A.
4. Clic derecho sobre el punto B, habilitar "mostrar rastro".
5. Arrastrar con el mouse el punto A sobre el eje x para ver a B desplazarse por el lugar geométrico.



Gráficas trigonométricas

Ejercicio 2: Construcción de la gráfica interactiva de la función seno.

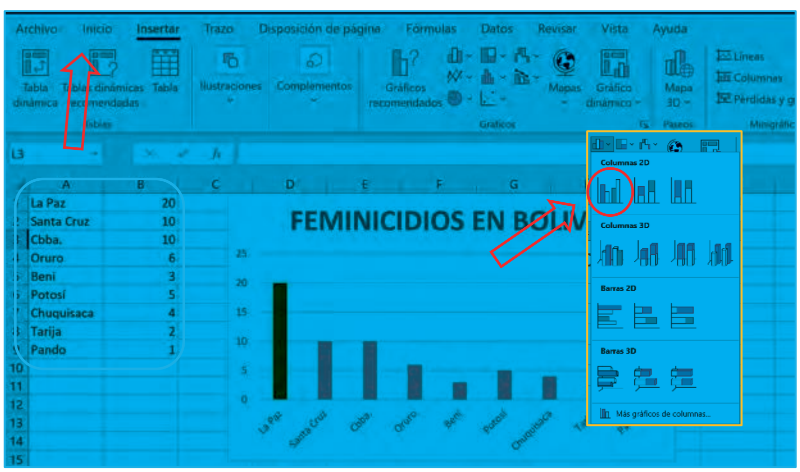
1. Clic derecho sobre el eje x, graduar el eje en radianes.
2. En la barra de entrada presionar "1" y enter. (Esto agregará el deslizador a).
3. Abrimos las propiedades del deslizador para establecer sus parámetros: Mín: 0, Máx: 6*pi, Incremento: 0.01
4. Insertar un punto dependiente de a: A=(a, sin(a)).
5. Clic derecho sobre el punto A y activar "mostrar rastro".
6. Clic en el botón del deslizador para iniciar la animación.



Gráficas de estadística

Ejercicio 3: Según datos del Ministerio Público, durante el primer semestre del 2021, se registraron 61 feminicidios. La gráfica muestra los datos por departamento.

- Insertamos los nombres de cada departamento en la columna A.
- En la columna B, insertamos las cantidades según departamento de acuerdo al gráfico.
- Seleccionamos los datos de ambas columnas. Con los datos seleccionados, vamos a la pestaña INSERTAR.
- Seleccionamos insertar gráfico de barras.



Taller del pensamiento lógico matemático

El pensamiento lógico matemático es una de las habilidades más relevantes en la educación, pues ha venido adquiriendo interés en relación con el crecimiento exponencial de la tecnología.

Hoy queremos compartir contigo las razones más importantes por las que debemos fortalecer el desarrollo del pensamiento lógico matemático, así como algunas estrategias que podrás aplicar en el aula.

La vida es matemática, considera que todas nuestras acciones y decisiones diarias consisten en una “sutil configuración de patrones matemáticos”, los cuales nos permiten explicar cómo se conduce el mundo a través de cálculos estadísticos, probabilidades o leyes de la lógica que, sin que darnos cuenta, rigen nuestras decisiones diarias.
Técnicamente, utilizamos el razonamiento lógico matemático todo el día: cuando calculamos el tiempo para llegar al colegio, o cuando hacemos cálculos para comprar algo; todo el día estamos razonando situaciones que requieren aplicar las matemáticas.

Ajedrez V

El Ajedrez es sin duda el deporte ciencia que puede practicarse desde cualquier edad, con las experiencias cotidianas que suceden, a veces es necesario realizar un análisis de cada situación para tomar las mejores decisiones, seguramente encontraras un sin fin de opciones para practicar este deporte, te presentamos una página en la que podrás encontrar todos los detalles para que seas un ajedrecista destacado.

Ejercicios de razonamiento (combinaciones y mates)

En ajedrez es importante la resolución de ejercicios y problemas de razonamiento , empezaremos resolviendo los siguientes mates:

Mate en 1

Escanea el QR

Ingresa al Qr para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades

Escanea el QR

Ingresa al Qr para aprender las nociones básicas de ajedrez

Escanea el QR

Ingresa al Qr para resolver problemas de razonamiento

¡Realicemos la valoración!

Actividad 77. Momento de reflexionar.

Es importante valorar la aplicabilidad de los programas de GeoGebra y Excel, para realizar la representación gráfica de las funciones trigonométricas y la demostración gráfica de problemas matemáticos, como así también debemos realizar un análisis y reflexión de la importancia del uso correcto de los celulares y computadoras para fortalecer la formación integral y holística.
Por tanto, responsamos reflexivamente las siguientes interrogantes:

- ¿Cómo podemos aplicar GeoGebra y Excel, en otras áreas de saberes y conocimiento?
- ¿Qué gráficas te parecen más importantes e interesantes para crearlos en GeoGebra?
- ¿Consideras que es importante la aplicación y uso de los teléfonos inteligentes como los ordenadores en la educación? ¿Por qué?
- ¿Cuánto tiempo por día utilizas tu celular para interactuar con otras personas a través de las redes sociales? ¿consideras que favorece a tu formación integral el tiempo exagerado en las redes sociales?

¡Es hora de la producción!

Actividad 78

- A través de GeoGebra graficamos el campo deportivo de la comunidad, con las medidas reglamentarias, posteriormente analizamos la representación matemática o ecuaciones de cada uno de las figuras trazadas.
- En una hoja de cálculo, elabora un diagrama de barras con la cantidad de personas por domicilio de tu manzano, zona o comunidad.

6

SECUNDARIA

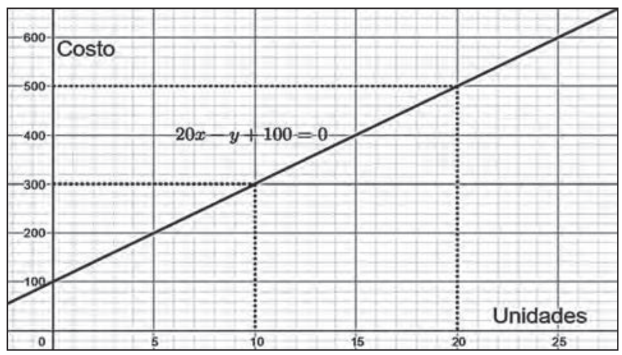
ÁREA
MATEMÁTICA

CIENCIA TECNOLOGÍA Y PRODUCCIÓN
Matemática

LA LÍNEA RECTA APLICADA A PROCESOS PRODUCTIVOS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Lee atentamente la siguiente historia:
Rodrigo necesita saber si el costo de la producción de chompas puede expresarse a través de un modelo matemático que le ayude en su trabajo diario, para lo cometido, solicita a su hija que cursa el 6to. de secundaria a expresarlo matematicamente de manera exacta.
El costo de fabricar 10 unidades de chompas de lana para el invierno tiene un costo de Bs 300, mientras que el costo de fabricar 20 unidades de chompas polares tendría un valor de Bs 500.



Actividad 1. Respondemos las siguientes preguntas en el cuaderno de ejercicios:

1. ¿Cuál es el modelo matemático de costo lineal que ayude a Rodrigo, conocer el costo de producción?

2. Si el eje de la “y” representa los costos y el eje de las “x” a la cantidad de productos vendidos, ¿cómo obtenemos una ecuación que represente el costo de producción a gran escala?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición y antecedentes

Comenzaremos en este capítulo con el estudio detallado de la línea recta, debido a que su ecuación es la más simple. Nuestra finalidad inmediata es poder escribir la ecuación de una recta, para este fin, el concepto de pendientes es fundamental, pues si de los puntos de una recta se elige un conjunto de puntos, podemos esperar que las coordenadas asignadas a estos puntos nos indiquen por medio de pendientes, que son colineales. Esta propiedad permite definir a una recta como un lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta constante.

En el año 1637 el filósofo y matemático francés René Descartes, en su libro: “El discurso del método”, realizó una conexión entre la geometría y el álgebra, fue el primero en demostrar las relaciones entre las líneas rectas y las curvas, fue así como nació la geometría analítica que se define como la rama de la geometría que representa curvas y figuras mediante expresiones algebraicas en un sistema de coordenadas cartesianas.

Noticiencia

Es el año 1637 y se publica en Leiden (Holanda) un texto que se convertiría en uno de los libros fundacionales de la filosofía: *Discurso del método. Es un libro raro. Para empezar, no está firmado, y eso que tiene un marcado punto autobiográfico.* ***René Descartes.***

2. Ecuaciones de la recta

Las rectas que tienen cualquier propiedad geométrica especial, se pueden asociar con ecuaciones que tienen algunas propiedades algebraicas especiales. Si una recta es paralela al eje Y, su abscisa es constante y la ecuación tiene la forma: $L_1 = \{(x ; y) / x = a\}$. Donde a da la distancia y la dirección desde el eje Y.

En la Figura 1 obsérvamos que cuando $\alpha = 0$, la recta L_1 coincide con el eje Y, esto es, la ecuación del eje Y es x = 0. Si una recta es paralela al eje X, su ordenada es constante y su ecuación tiene la forma:

$L_2 = \{(x, y) / y = b\}$. Donde b da la distancia y dirección desde el eje X. Cuando b = 0, la recta L_2 coincide el eje X, esto es, la ecuación del eje X es y = 0.

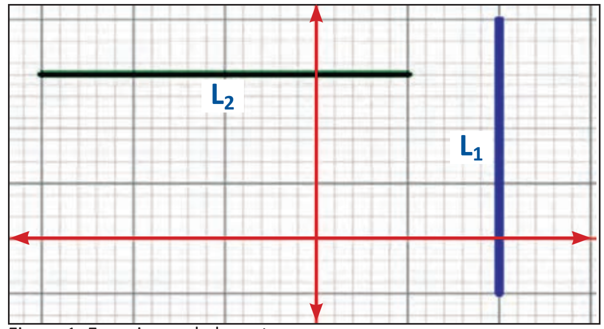


Figura 1: Ecuaciones de la recta

2.1. Ecuación punto pendiente

La ecuación de la recta punto pendiente se aplica cuando se conoce un punto y la pendiente.

Teorema 1. La ecuación punto – pendiente.

La ecuación de una recta no vertical L que pasa por el punto fijo P_1 $(x_1; y_1)$ y de pendiente dada m, es:

$y - y_1 = m(x - x_1)$ Demostración. Figura 2

a) Sea P (x; y), un punto cualquiera del lugar geométrico, diferente del punto fijo P_1 $(x_1; y_1)$.

b) Por definición de recta, para cualquier posición de P.

c) Se debe verificar que: $m = \dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

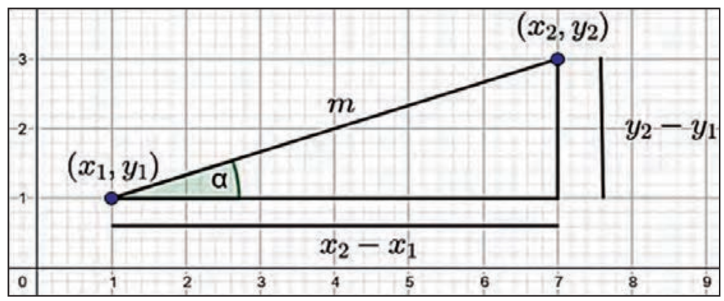


Figura 2: Ecuación punto-pendiente

d) De donde obtenemos: $y_2 - y_1 = m(x_2 - x_1)$

Ejemplo 1. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta conociendo su pendiente m = 3 y pasa por el punto P(3; 2).

Apliquemos la siguiente ecuación punto pendiente y reemplazamos los datos respectivos:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
$$y - 2 = 3 \cdot (x - 3)$$
$$y = 3x - 9 + 2$$
$$y = 3x - 7$$
$$y = 3x - 7$$
$$L:\ 3x - y - 7 = 0$$

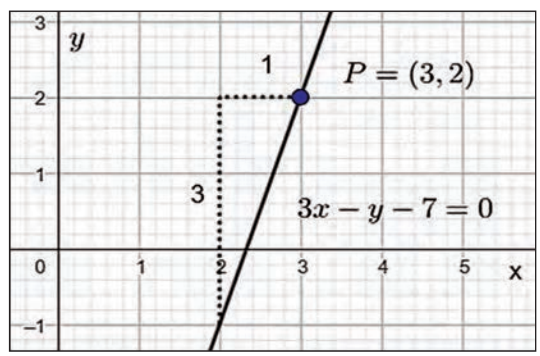


Figura 3: Ejemplo 1

Ejemplo 2. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta conociendo su pendiente m = 2 y pasa por el punto P(1; -5).

Apliquemos la ecuación punto -pendiente y reemplazamos los datos respectivos:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
$$y - (-5) = 2 \cdot (x - 1)$$
$$y + 5 = 2x - 2$$
$$y = 2x - 2 - 5$$
$$y = 2x - 7$$
$$0 = 2x - 7 - y$$
$$\therefore\ L:\ 2x - y - 7 = 0$$

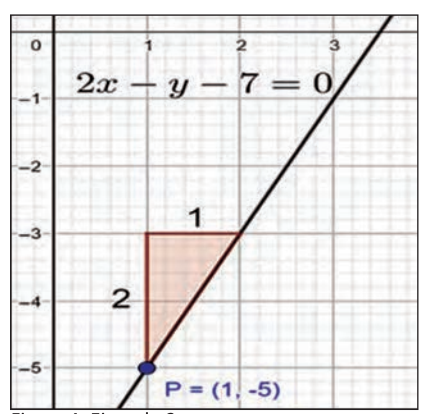


Figura 4: Ejemplo 2

Ejemplo 3. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta conociendo su pendiente m = 2/3 y pasa por el punto P(-3;-2).

Apliquemos la siguiente ecuación punto pendiente y reemplazamos los datos respectivos:

$$y - y_1 = m \cdot (x - x_1)$$
$$y - (-2) = \tfrac{3}{2} \cdot [x - (-3)]$$
$$y + 2 = \tfrac{3}{2}(x + 3)$$
$$y + 2 = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{2}$$
$$y = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{9}{2} - 2$$

$$y = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{2}$$
$$0 = \tfrac{3}{2}x + \tfrac{5}{2} - y$$
$$\tfrac{3}{2}x - y + \tfrac{5}{2} = 0 \quad //*\,2$$
$$L:\ 3x - 2y + 5 = 0$$

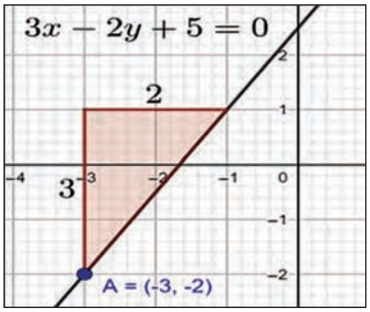


Figura 5: Ejemplo 3

Actividad 2. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

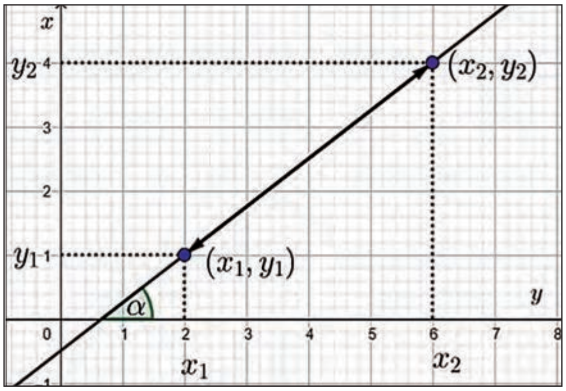
1) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta de pendiente $m = 4$ y pasa por el punto $(1; -2)$
2) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta de pendiente $m = -\frac{1}{2}$ y pasa por el punto $\left(-\frac{2}{3}; -4\right)$
3) Calculemos la ecuación de la recta, si su pendiente $m = \sqrt{2}$ y pasa por el punto $A\left(\sqrt{2}; \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.
Grafiquemos con el software Geogebra (opcional).

2.2. Ecuación de la recta que pasa por dos puntos

O también llamada ecuación cartesiana de la recta, es una ecuación útil cuando la recta pasa por dos puntos.

Para realiza la gráfica, ubicamos los dos puntos en el plano cartesiano y trazamos una recta que pase por estos puntos. Es así que podemos tener la gráfica de la recta en el plano cartesiano.

Figura 6: punto- punto



Teorema 2. La ecuación punto punto es la recta que pasa por dos puntos fijos $P_1(x_1; y_1)$ y $P_2(x_2; y_2)$ tiene por ecuación:

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \quad , \qquad x_1 \neq x_2$$

Ejemplo 4. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta, si se conocen los siguientes puntos: A(0; 1) y B(3; 2).

Aplicamos la siguiente ecuación punto punto y reemplazamos los datos respectivos:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-1}{x-0} = \frac{2-1}{3-0}$$
$$\frac{y-1}{x} = \frac{1}{3}$$

$$y - 1 = \tfrac{1}{3}x$$
$$y = \tfrac{1}{3}x + 1$$
$$0 = \tfrac{1}{3}x + 1 - y$$
$$\tfrac{1}{3}x - y + 1 = 0 \ //*\,3$$
$$L:\ x - 3y + 3 = 0$$

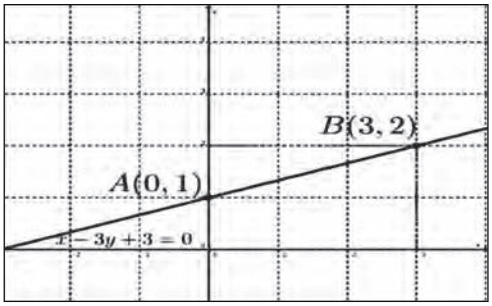


Figura 7: Ejemplo 4

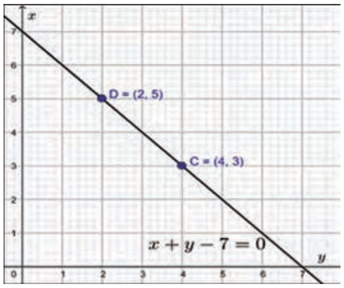
Ejemplo 5. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta, si se conocen los siguientes puntos: C(4 ; 3) y D(2 ; 5)

Apliquemos la ecuación punto punto y reemplazamos los datos respectivos:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1} = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$
$$\frac{y-3}{x-4} = \frac{5-3}{2-4}$$
$$\frac{y-3}{x-4} = \frac{2}{-2}$$

$$\frac{y-3}{x-4} = -1$$
$$y - 3 = -1(x - 4)$$
$$y = -x + 4 + 3$$
$$y = -x + 7$$
$$\therefore\ L:\ x + y - 7 = 0$$

Figura 7: Ejemplo 4



Ejemplo 6. Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta, si se conocen los siguientes puntos: A(2 ; 1) y B(- 5; - 3)

Aplicamos la ecuación punto punto y reemplazamos los datos respectivos

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-3-1}{-5-2}$$

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{-4}{-7}$$

$$\frac{y-1}{x-2}=\frac{4}{7}$$

$$y-1=\frac{4}{7}(x-2)$$

$$y=\frac{4}{7}x-\frac{8}{7}+1$$

$$y=\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}$$

$$0=\frac{4}{7}x-\frac{1}{7}-y$$

$$\frac{4}{7}x-y-\frac{1}{7}=0\ //*\,7$$

$$L\!: 4x-7y-1=0$$

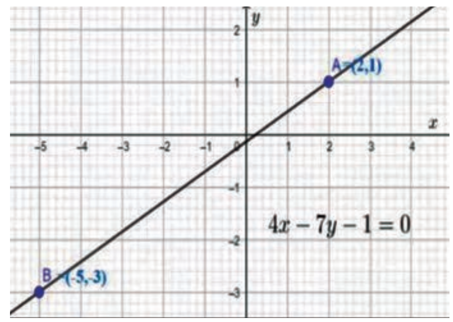


Figura 9: Ejemplo 6

Actividad 3. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A(1;2)$ y $B(3;4).2)$
2) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A\left(-\frac{1}{2};-2\right)$ y $B\left(\frac{2}{3};\frac{1}{4}\right)$
3) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que pasa por los puntos: $A\left(\frac{\sqrt{2}}{4};\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$ y $B\left(\frac{\sqrt{2}}{2};\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)$

Ecuación de la recta ordenada en el origen y pendiente

Teorema 3. La recta cuya pendiente es m y cuya ordenada en el origen es b, tiene por ecuación: y = mx + b

m es la pendiente

b es la ordenada en el origen

Entonces teniendo el $P_1(0;b)$

$$y-y_1=m(x-x_1)$$
$$y-b=m(x-0)$$
$$y-b=mx$$
$$y=mx+b$$

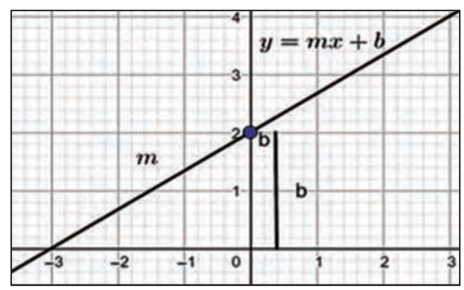


Figura 10: ordenada en el origen

Ejemplo 7. Grafiquemos y calculemos la ecuación de la recta que tiene pendiente m = 2 y la ordenada en el origen b = 2

Aplicamos la siguiente ecuación pendiente ordenada en el origen y reemplazamos los datos respectivos:

$$y=mx+b$$
$$y=2x+2$$
$$y=2x+2$$
$$0=2x+2-y$$
$$\therefore L:\ 2x-y+2=0$$

Esta ecuación es fácil para graficar la línea recta, de la siguiente forma:
Ubicar la ordenada en el origen.
A partir de este punto, determinar el recorrido de la pendiente, m=$\frac{\Delta y}{\Delta x}$,
el cociente del cambio de "y" y "x"

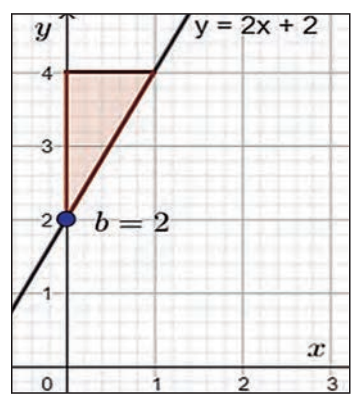


Figura 11: Ejemplo 7

Actividad 4. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que tiene pendiente m = 7 y ordenada en el origen 14.
2. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que tiene pendiente m = -3 y ordenada en el origen -5.
3. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta que tiene pendiente m = -1/2 y ordenada en el origen 3/4.

2.3. Ecuación de la recta abscisa y ordenada en el origen

Teorema 4. La recta cuyas intersecciones con los ejes X e Y son a ≠ 0 y b ≠ 0, respectivamente, tiene por ecuación:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

Donde: ***a*** es la abscisa y b la ordenada ambas en el origen, es decir que "***a***" y "b" se encuentran sobre el eje "x" y eje "y" respectivamente.
En la ecuación:

$$\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

Remplazamos los puntos P_1 (0;b) y P_2 (a;0)

$$\frac{y-b}{x}=\frac{-b}{a}$$

$$a(y-b)=-bx$$

$$ay-ab=-bx$$

$$bx+ay=ab$$

Dividir ambos miembros entre ab:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

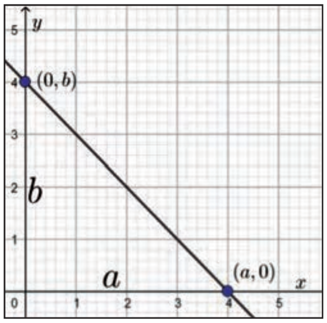


Figura 12: abscisa y ordenada en el origen

Ejemplo 8: Grafiquemos y encontremos la ecuación de la recta que pasa por los puntos: A(1;0) y B(0;-3)

Reemplazamos los valores tenemos:

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$$

$$\frac{x}{1}+\frac{y}{-3}=1$$

$$x-\frac{y}{3}=1 \quad //*\,3$$

$$3x-y=3$$

$$\therefore L:\ 3x-y-3=0$$

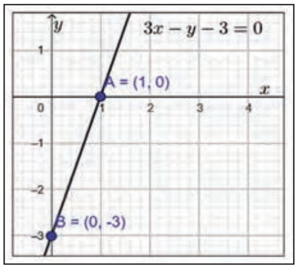


Figura 13: Ejemplo 8

Actividad 5

1) Calcula y grafica la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen suman 9 y cuya pendiente es $-\frac{4}{3}$.
2) Calcula y grafica la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen suman 5, y cuya pendiente es $\frac{7}{5}$.

2.4. Forma general de la ecuación de una recta

Una ecuación de primer grado es un conjunto infinito de puntos colineales en el plano cartesiano. De la ecuación general se determinará los elementos de recta, la pendiente y la ordenada en el origen. $\boldsymbol{Ax+By+C=0}$

Despejando $\boldsymbol{y}$ para tener la ecuación en su primera forma tendremos: $\boldsymbol{y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}}$.

Donde podemos determinar la pendiente y la ordenada en el origen, comparando con la ecuación $\boldsymbol{y=mx+b}$, entonces se tiene: $\boldsymbol{m=-\frac{A}{B}}$; $\boldsymbol{b=-\frac{C}{B}}$

Ejemplo 9. Determinamos la pendiente y ordenada en el origen de la recta: $3x+4y-12=0$

$$3x+4y-12=0$$

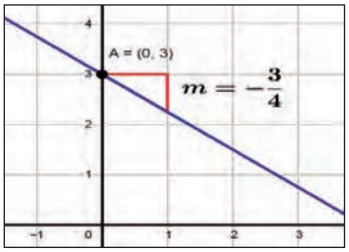
$$Ax+By+C=0$$

Identificando los coeficientes:

$$\underbrace{3}_{A}x+\underbrace{4}_{B}y\underbrace{-12}_{C}=0,\text{luego:}$$

$$m=-\frac{A}{B}=-\frac{3}{4}=-0{,}75$$

$$b=-\frac{C}{B}=-\frac{-12}{4}=3$$



2.5. Forma normal de la ecuación de la recta

Tenemos la ecuación de la recta en su forma normal, la misma que se dio con los datos de la imagen y su reducción de la forma general.

L: xcosα + ysenα = p

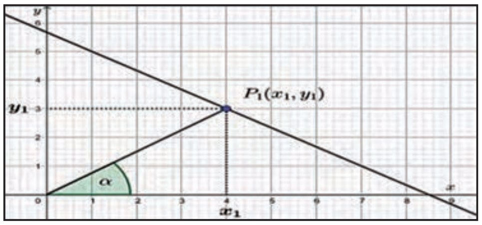


Figura 15: Formal normal

3. Aplicaciones de la forma normal

Ejemplo 10. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta a 4 unidades del origen, si su normal tiene un ángulo de inclinación de 120º. L: xcosα + ysenα - p = 0

$$Como: p=4 \ \ y \ \ w=120^\circ$$

$$x\cos 120^\circ+y\,sen\,120^\circ-4=0$$

$$x\left(-\frac{1}{2}\right)+y\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-4=0 \quad //(-2)$$

$$L: x-\sqrt{3}\,y+8=0$$

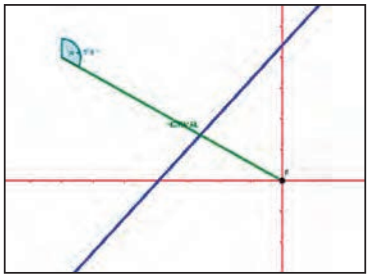


Figura 16: Ejemplo 10

Actividad 6. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta $p = 3\sqrt{2}$, unidades del origen si su normal tiene un ángulo de inclinación de 315^0.
2) Calculemos y grafiquemos la ecuación de la recta $p = 9$, unidades del origen si su normal tiene un ángulo de inclinación de 45^0.

4. Distancia de un punto a una recta

La distancia más corta entre la recta y un punto en el plano, es la longitud del segmento perpendicular a la recta trazado a partir del punto.

La distancia del punto $P(x_1; y_1)$ a la recta.$L: Ax_1 + By_1 + C = 0$ está determinado por la fórmula: $d = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$

El valor absoluto garantiza que la distancia sea positiva.

Ejemplo 11. Determinamos y graficamos la distancia del punto $A(6;\ 5)$, a la recta $L:\ 7x + 4y = 17$.

Expresamos la ecuación $7x + 4y = 17$ en la forma $Ax_1 + By_1 + C = 0$.

Así $\underbrace{7}_{A}x + \underbrace{4}_{B}y\underbrace{-17}_{C} = 0$ donde $A = 7,\ \ B = 4$ y $C = -17$

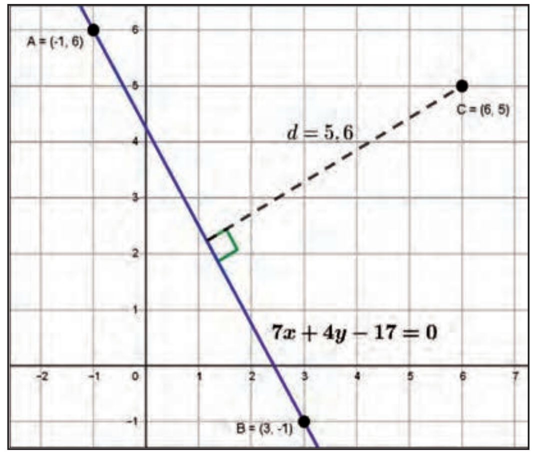


Figura 17: Ejemplo 11

Remplazando en la ecuación de distancia de un punto a una recta:

$$d = \left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| = \left|\frac{7(6)+4(5)+(-17)}{\sqrt{7^2+4^2}}\right|$$

$$d = \left|\frac{45}{\sqrt{65}}\right| = |5{,}6| = 5{,}6\ \boldsymbol{unidades}$$

Actividad 7. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la distancia dirigida que separa al punto P_1 (-2; - 3), de la recta cuya pendiente es – 2/3, y que pasa por A (1; 0).
2) Calculemos los valores de k para que la recta L: 2x + 3y – k = 0 y el punto P (- 2; - 3), disten 4 unidades.

5. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

La línea recta en la vida cotidiana se puede observar en los objetos, figuras con lados rectos o planos. De igual manera, la recta más determinante es el horizonte o vista horizontal que refleja una recta entre dos paisajes. Analicemos las siguientes preguntas y encontramos su respuesta aplicando ecuaciones de la linea recta:

1) ¿Cuántos árboles existían en Santa Cruz de la Sierra el año 2017?
2) ¿Al ritmo que vamos en la tala de árboles en el departamento de Santa Cruz, en qué año ya no se tendrá árboles?
3) ¿Cada año cuántos árboles pierde el departamento de Santa Cruz?
4) ¿Qué ecuaciones de la línea recta ocuparemos para representar esta problemática?

Respuestas:

200000 árboles
2017 +100 = 2117
El año 2117

$m = \frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

$P_1(0; 200000\ árboles)$
$P_2(100\ años; 0)$

$m = \frac{0-200000}{100-0} = \frac{-200000}{100}$

$m = -\frac{2000\ árboles}{1\ años}$

$\therefore$ *El departamento de Santa Cruz cada año pierde 2000 árboles*

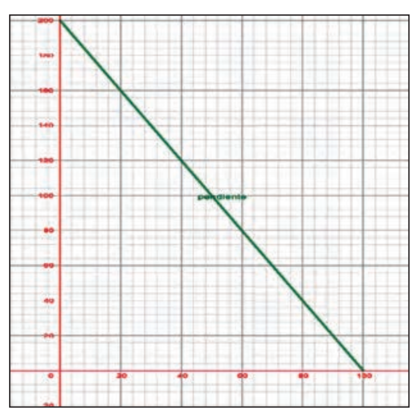
d) $m = -2000$
$P_1(0; 200000\ árboles)$
<u>punto – pendiente</u>

$y - y_1 = m(x - x_1)$
$y - 200000 = -2000(x - 0)$
$y - 200000 = -2000x$
$\therefore L: 2000x + y - 200000 = 0$

<u>*modelo matemático como aplicación tecnológica*</u>

$y = -2000x + 200000$
<u>Donde</u>
$y = árboles$ y
$x = tiempos\ (años)$

$a = -2000\ t + 200000$


La gráfica representa un reporte sobre la tala indiscriminada de árboles en el departamento de Santa Cruz.

En el informe de la ABT, también resalta que en el departamento donde más se deforestó fue Santa Cruz con 91.369 hectáreas, seguido por Beni, con 8.437 y La Paz 4.032; la mayor parte de las tierras afectadas se destina a la ganadería y a la actividad forestal y minera.

Bolivia, 06 de Marzo 2017
Fuente: El Diario Noticias

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 8. Reflexionemos y analicemos, para responder las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo se aplica las propiedades de la recta en proyecciones financieras que favorezcan los emprendimientos productivos?
2) ¿Por qué es importante conocer y aprender la ecuación de la recta para su aplicación en modelos matemáticos?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 9. Realicemos las siguientes actividades:

1) Solicitamos permiso al Director/a de la Unidad Educativa para pintar las líneas laterales, centrales y de fondo de la cancha de básquet.
2) Con la ayuda de los compañeros realizamos las operaciones para calcular las ecuaciones de todas las rectas.
3) Para ello consideramos como origen del plano cartesiano el centro de la cancha.

LA CIRCUNFERENCIA Y LOS SABERES CULTURALES

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

En tu comunidad o barrio donde vives, observa e identifica objetos o figuras que representan a la circunferencia.
Por ejemplo, el aro del tablero de baloncesto y el centro de campo de la cancha de fútbol de salón tienen la forma de circunferencia.

Actividad 10. Respondemos la siguiente pregunta en el cuaderno:
¿Qué características en común tienen esas figuras u objetos?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición

Una circunferencia es el conjunto de puntos del plano cuyas distancias (no dirigidas), a un punto fijo son iguales (distancia constante). El punto fijo se llama centro y la distancia constante no dirigida es el radio.

2. Elementos de la circunferencia

Centro de la circunferencia	C
Radio de la circunferencia	CD
Diámetro de la circunferencia	AB
Cuerda de la circunferencia	FG
Recta tangente a la circunferencia	L_T
Recta normal a la circunferencia	L_N

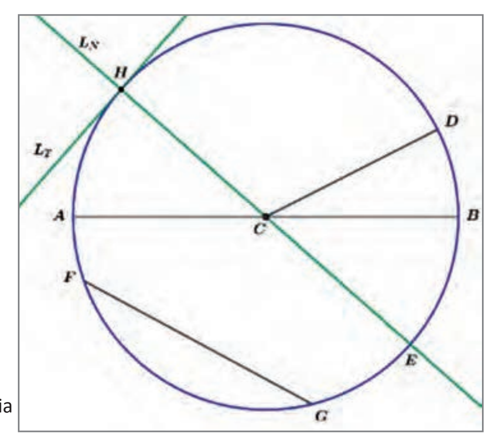


Figura 1: Elementos de la circunferencia

3. Ecuaciones de la circunferencia

3.1. Ecuación canónica

Si el centro de la circunferencia coincide con el origen de coordenadas rectangulares, entonces la ecuación de la circunferencia queda reducida a:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

La cual se denomina **ecuación canónica** de la circunferencia.

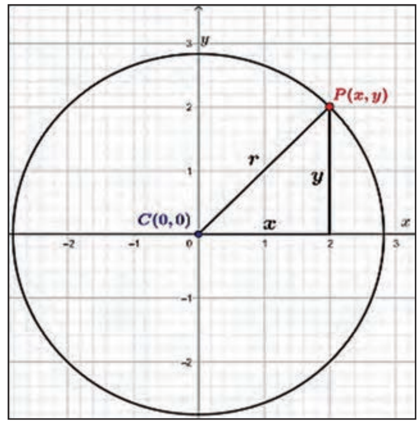


Figura 2: Ecuación canónica

Ejemplo 1. Determinamos y graficamos la ecuación canónica de la circunferencia de centro C(0;0) y radio r = 5

Aplicamos la siguiente ecuación y reemplazamos los datos respectivos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2 + (y-0)^2 = 5^2$$

$\therefore$ *la ecuación canónica es*:

$$\boldsymbol{x^2 + y^2 = 25}$$

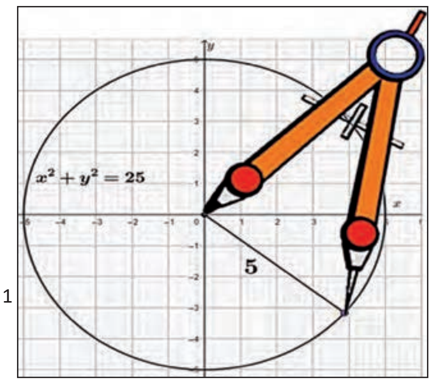


Figura 3: Ejemplo 1

Actividad 11. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Calculemos y grafiquemos la ecuación canónica de la circunferencia de centro C(0;0) y radio r = 4 .
2) Calculemos y grafiquemos la ecuación canónica de la circunferencia de centro C(0;0) y radio r = 6 .
3) Calculemos y grafiquemos la ecuación canónica de la circunferencia de centro C(0;0) y radio r = 7 .

3.2. Ecuación ordinaria de la circunferencia

La circunferencia cuyo centro es el punto C (h; k) y cuyo radio es la constante r > 0, es la gráfica de la ecuación.

$$\varepsilon: (x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

Que recibe el nombre de forma ordinaria o reducida de la ecuación de la circunferencia.

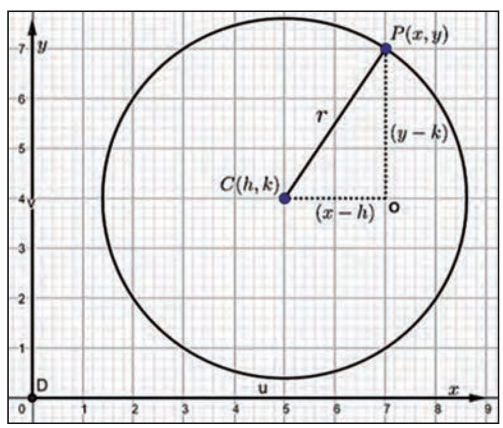


Figura 4: Ecuación ordinaria

Ejemplo 2. Determinamos y graficamos la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro C(-3;-5) y radio r = 7

Aplicamos la siguiente ecuación ordinaria y reemplazamos los datos respectivos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

$$[x-(-3)]^2 + [y-(-5)]^2 = 7^2$$

$\therefore$ *la ecuación ordinaria o reducida es*:

$$\boldsymbol{(x+3)^2 + (y+5)^2 = 49}$$

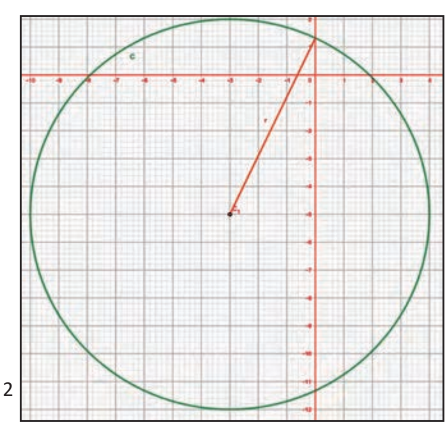


Figura 5: Ejemplo 2

Actividad 12. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Calculemos y grafiquemos la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro C(-2; -3) y radio r = 4
2. Calculemos y grafiquemos la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro C(2; 3) y radio r = 5
3. Calculemos y grafiquemos la ecuación ordinaria de la circunferencia de centro C(-1; 4) y radio r = 6

3.3. Ecuación general de la circunferencia

Se obtiene al desarrollar los cuadrados de la ecuación ordinaria e igualar a cero. $\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$

Se tiene la siguiente relación: $h = -\frac{D}{2}$; $k = -\frac{E}{2}$; $r = \frac{\sqrt{D^2+E^2-4F}}{2}$

Vemos que tiene la forma de la ecuación y podemos afirmar que:

a) Si *r>0,* la gráfica es una circunferencia de centro $\mathrm{C}\left(-\frac{\mathrm{D}}{2}; -\frac{\mathrm{E}}{2}\right)$ y radio $\sqrt{r}$.

b) Si r = 0, la gráfica es punto $\left(-\frac{\mathrm{D}}{2}; -\frac{\mathrm{E}}{2}\right)$.

c) Si r<*0,* la gráfica de es el conjunto vacío o representa un círculo imaginario (no representa un lugar geométrico).

Ejemplo 3. Determinamos y graficamos la ecuación general de la circunferencia de centro C(3;-1) y radio r = 4

Aplicamos la siguiente ecuación ordinaria y reemplazamos los datos respectivos:

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$
$$x^2 - 6x + 9 + y^2 + 2y + 1 = 16$$
$$x^2 + y^2 - 6x + 2y + 10 - 16 = 0$$
$$\therefore \boldsymbol{\varepsilon}: \boldsymbol{x^2 + y^2 - 6x + 2y - 6 = 0}$$

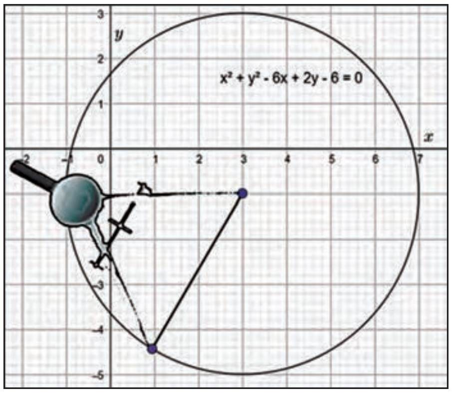


Figura 6: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Determinamos la ecuación dada si es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío.
Si lo es graficaremos y hallaremos su centro y su radio.

$$\boldsymbol{a)}\ \boldsymbol{x^2 + y^2 - \frac{3}{2}x - \frac{5}{2}y + \frac{17}{8} = 0}$$

$$\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 - \frac{5}{2}y + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2\right] = -\frac{17}{8} + \left(\frac{\frac{3}{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{\frac{5}{2}}{2}\right)^2$$

$$\left[x^2 - \frac{3}{2}x + \frac{9}{16}\right] + \left[y^2 - \frac{5}{2}y + \frac{25}{16}\right] = -\frac{17}{8} + \frac{9}{16} + \frac{25}{16}$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)\left(x - \frac{3}{4}\right) + \left(y - \frac{5}{4}\right)\left(y - \frac{5}{4}\right) = \frac{34}{16} - \frac{17}{8}$$

$$\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 + \left(y - \frac{5}{4}\right)^2 = 0 \therefore \boldsymbol{es\ un\ punto}$$

Actividad 13. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Determinamos y gráficamos la ecuación general de la circunferencia de centro C(-2; -3) y radio r = 3

2) Determinamos la ecuación dada si es una circunferencia, un punto o el conjunto vacío. Si lo es gráfica y halla su centro y su radio.
a) $4x^2+4y^2-12x+8y+77=0$
b) $x^2+y^2-4x+14y+37=0$
c) $x^2+y^2-8x+6y+29=0$
d) $9x^2+9y^2-144x+12y+580=0$

4. Circunferencia que pasa por tres puntos

La ecuación de una circunferencia puede ser determinada a partir de tres puntos ubicados en la circunferencia.
Se tiene los puntos A(x_1; y_1), B(x_2; y_2) y C(x_3; y_3).
Consideramos la siguiente ecuación:

$$\mathbf{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

Reemplazamos los puntos A,B y C en la ecuación Así:

$$x_1{}^2 + y_1{}^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \qquad (1)$$
$$x_2{}^2 + y_2{}^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \qquad (2)$$
$$x_3{}^2 + y_3{}^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \qquad (3)$$

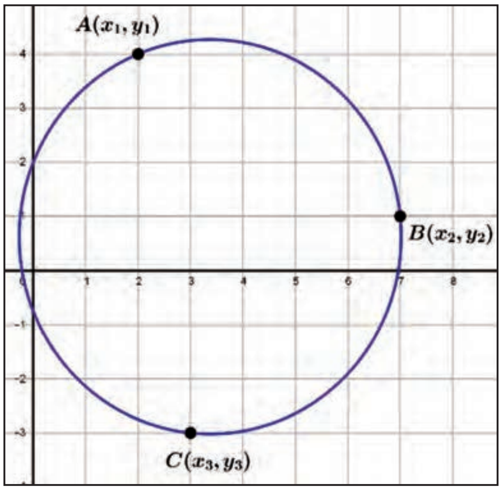


Figura 7: Circunferencia por tres puntos

Ejemplo 5. Determinemos y grafiquemos la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos: A (5; 4), B (4; - 3) y C (- 2; 5).

Datos: Sea la circunferencia

$\varepsilon: x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$ *Si:*

$A(5;4) \quad \rightarrow \quad 5^2 + 4^2 + 5D + 4E + F = 0$

$5D + 4E + F = -41$

$B(4;-3) \rightarrow 4^2 + (-3)^2 + 4D - 3E + F = 0$

$4D - 3E + F = -25$

$C(-2;5) \rightarrow (-2)^2 + 5^2 - 2D + 5E + F = 0$

$-2D + 5E + F = -29$

$$\begin{cases} 5D + 4E + F = -41 & ❶ \\ 4D - 3E + F = -25 & ❷ \\ -2D + 5E + F = -29 & ❸ \end{cases}$$

(-1) ① y ② ② y (-1) ③

$$\begin{cases} -5D - 4E - \cancel{F} = +41 \\ 4D - 3E + \cancel{F} = -25 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4D - 3E + \cancel{F} = -25 \\ 2D - 5E - \cancel{F} = +29 \end{cases}$$

$-D - 7E \quad = 16 \qquad 6D - 8E \quad = 4$

$(\times 3)$ ④ y $(\div 2)$ ⑤

$$\begin{cases} -\cancel{3D} - 21E = 48 \\ \cancel{3D} - \quad 4E = 2 \end{cases}$$

$-25E = 50$

$E = -\frac{50}{25}$

$E = -2$

Sustituimos E en 5

$3D - 4E = 2$

$3D - 4(-2) = 2$

$3D + 8 = 2$

$3D = 2 - 8$

$3D = -6$

$D = -2$

Sustituimos E, D y F encontradas en la ecuación general

$\boldsymbol{\varepsilon: x^2 + y^2 - 2x - 2y - 23 = 0}$ *Completando cuadrados:*

$\left[x^2 - 2x + \left(\frac{-2}{2}\right)^2\right] + \left[y^2 - 2y + \left(\frac{-2}{2}\right)^2\right] = 23 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2 + \left(\frac{-2}{2}\right)^2$

$[x^2 - 2x + 1] + [y^2 - 2y + 1] = 23 + 1 + 1$

$(x-1)^2 + (y-1)^2 = 25$

$C(1;1) \quad r = 5$

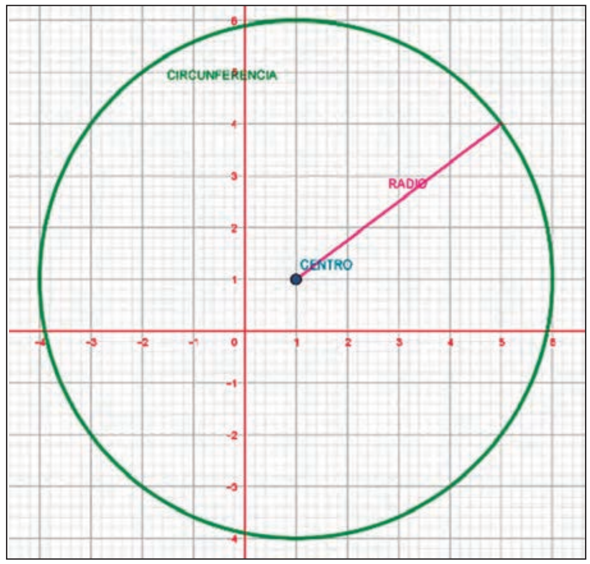


Figura 8: Ejemplo 5

Actividad 14. Determinemos y grafiquemos la ecuación, centro y radio de la circunferencia que pasa por los tres puntos: A (-1; 1), B (3; 5) y C (5; -3).

5. Familia de circunferencias

Se ha señalado que hay tres constantes esenciales en la ecuación de una circunferencia; por tanto, si se dan condiciones que determinan dos de ellas, la tercera puede elegirse arbitrariamente. Por consiguiente, tenemos un sistema en el que aparece una constante arbitraria de que disponemos corresponde una circunferencia.

$\varepsilon: (x-h)^2 + (y-k)^2 = t^2$

$t = (\text{números positivos})$

$\varepsilon: (x-h)^2 + (y-t)^2 = r^2$

$t = (\text{números reales})$

$\varepsilon: (x-t)^2 + (y-k)^2 = r^2$

$t = (\text{números reales})$

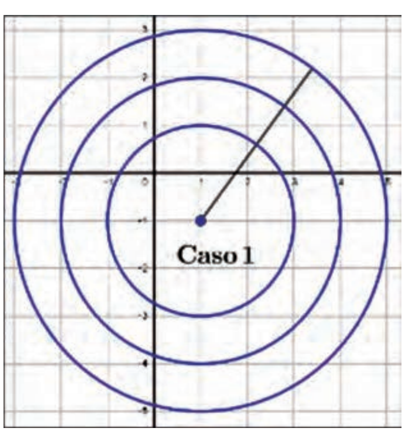
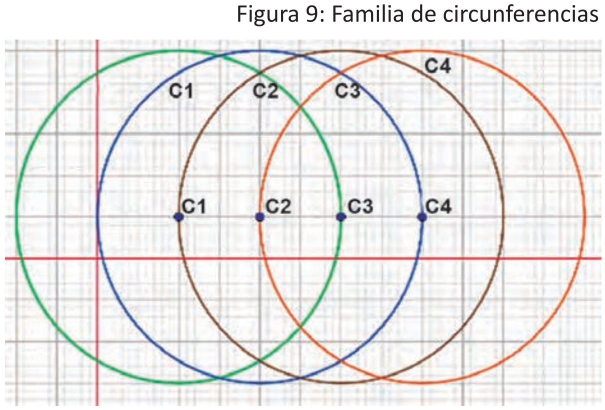
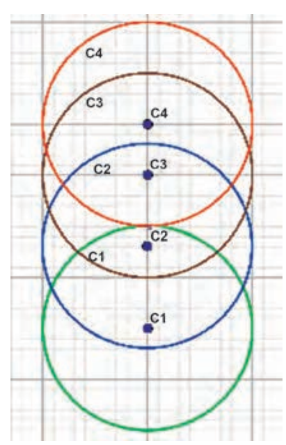


Figura 9: Familia de circunferencias





Ejemplo 6. Determinemos y grafiquemos la ecuación de la familia de circunferencia con centro C(3; -1) y radio r = 4

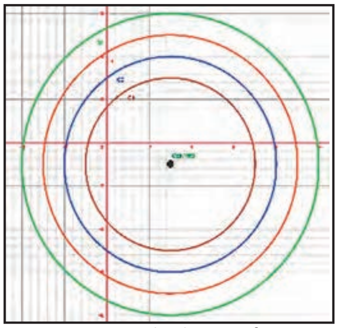


Figura 10: Familia de circunferencias

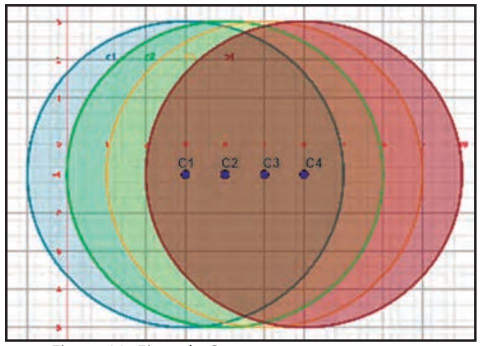


Figura 11: Ejemplo 6

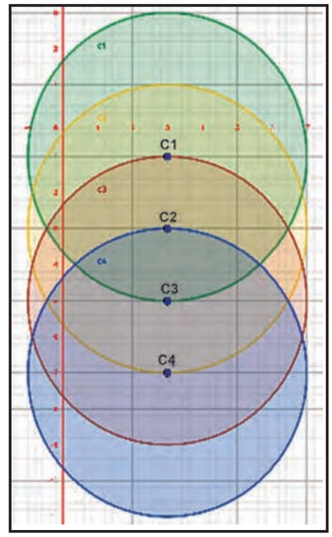


Figura 12: Familia de circunferencias

Aplicamos la siguiente ecuación ordinaria y reemplazamos los datos respectivos:

$$\varepsilon: (x-h)^2 + (y-k)^2 = t^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 5^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 6^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 7^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+1)^2 = \cdots$$

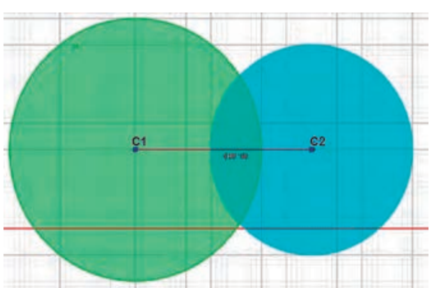
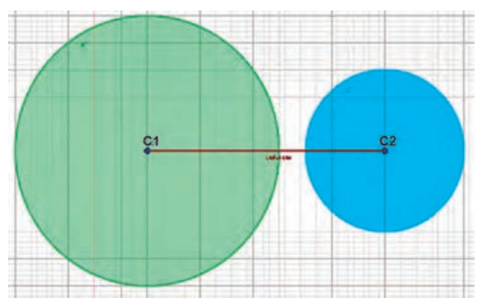
$$\varepsilon: (x-t)^2 + (y-k)^2 = r^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-4)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-5)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-6)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-\cdots)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$

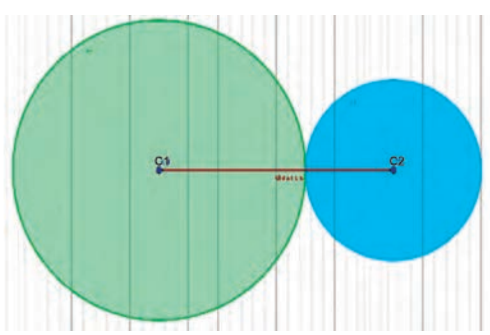
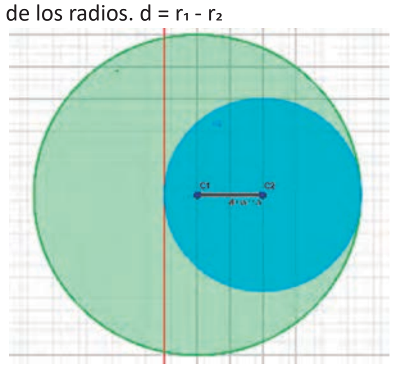
$$\varepsilon: (x-h)^2 + (y-t)^2 = r^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+1)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+3)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+5)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+7)^2 = 4^2$$
$$\varepsilon: (x-3)^2 + (y+\cdots)^2 = 4^2$$

Actividad 15. Determinemos y grafiquemos la ecuación de la familia de circunferencia con centro C(-2; -3) y radio r = 3.

6. Eje radial entre circunferencias

Es el lugar geométrico de los puntos de igual potencia con relación a dos circunferencias L_1 y L_2; o bien, es el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se pueden trazar tangentes iguales a dos circunferencias del sistema.

Circunferencia secantes	Circunferencia exteriores
El eje radical pasa por los puntos de intersección de L_1 y L_2 y ocurre que la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios. $d < r_1 + r_2$	El eje radical pasa por los puntos de intersección de L_1 y L_2 y ocurre que la distancia entre los centros es mayor que la suma de los radios. $d > r_1 + r_2$
	

Circunferencias tangentes exteriores	Circunferencias tangentes interiores
El eje radical es la tangente común a ambas circunferencias y ocurre que la distancia entre los centros es igual a la suma de los radios. $d = r_1 + r_2$	El eje radical es la tangente común a ambas circunferencias y ocurre que la distancia entre los centros es igual a la diferencia de los radios. $d = r_1 - r_2$
	

Ejemplo 7. Determinemos y grafiquemos la naturaleza de la familia de circunferencia. x²+y²-2x-6y-6+k(x²+y²+4x-6y+9)=0

Datos

$$x^2-2x+\left(\frac{2}{2}\right)^2+y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2=6+\left(\frac{2}{2}\right)^2+\left(\frac{6}{2}\right)^2$$

$$[x^2-2x+1][y^2-6y+9]=6+1+9$$

$$(x-1)^2+(y-3)^2=16$$

$C\,(1;3) \quad r=4$

$$x^2+4x+\left(\frac{4}{2}\right)^2+y^2-6y+\left(\frac{6}{2}\right)^2=-9$$

$$x^2+4x+4+y^2-6y+9=-9+4+9$$

$$(x+2)^2+(y-3)^2=4$$

$C\,(-2;3) \quad r=2$

$C_1(1;3) \quad d_{\overline{C_1C_2}}=\sqrt{(-2-1)^2+(3-3)^2}$

$C_2(-2;3) \quad d_{\overline{C_1C_2}}=\sqrt{9} \qquad d_{\overline{C_1C_2}}=3$

$3<4+2 \quad$ **V**

$3>4+2 \quad$ F

$3=4+2 \quad$ F

$3=4-2 \quad$ F

∴ Son circunferencias secantes

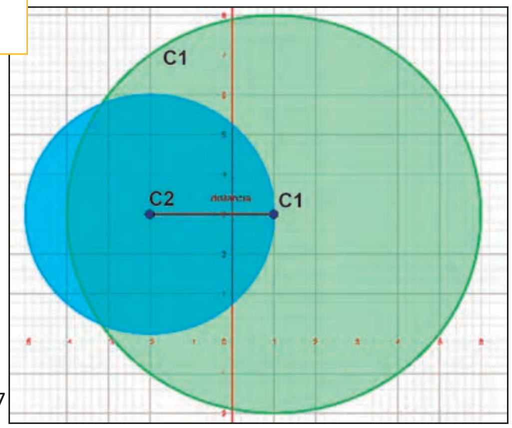


Figura 13: Ejemplo 7

Actividad 16. Grafiquemos y determinemos la naturaleza de la familia de las circunferencias.

a) $x^2+y^2-9+k(x^2+y^2-6x+4y-3)=0$

b) $x^2+y^2+6x-4y+8+k(x^2+y^2-16y+44)=0$

c) $x^2+y^2-2x-6y+2+k(x^2+y^2+8y-2)=0$

d) $4x^2+4y^2-9+k(x^2+y^2-4x+3y+2)=0$

e) $x^2+y^2-8x+6y+16+k(x^2+y^2+2x-12y+12)=0$

7. Tangente a una circunferencia

Realicemos el análisis con el siguiente ejemplo:

Ejemplo 8. La recta 4x - 3y - 8 = 0 es tangente a una circunferencia que tiene su centro en el punto (0;3). Calculemos y grafiquemos la ecuación de la circunferencia.

El radio "r" se calcula por la siguiente ecuación:

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right|$$

$$r=\left|\frac{4\cdot 0-3\cdot 3-8}{\sqrt{4^2+(-3)^2}}\right|=\left|\frac{-17}{5}\right| \Rightarrow \boxed{r=\frac{17}{5}}$$

Reemplazamos el centro y el radio:

$$(x-0)^2+(y-3)^2=\left(\frac{17}{5}\right)^2$$

$$x^2+y^2-6y+9-\frac{289}{25}=0$$

$$25x^2+25y^2-150y+225-289=0$$

$$\therefore\ \varepsilon: 25x^2+25y^2-150y-64=0$$

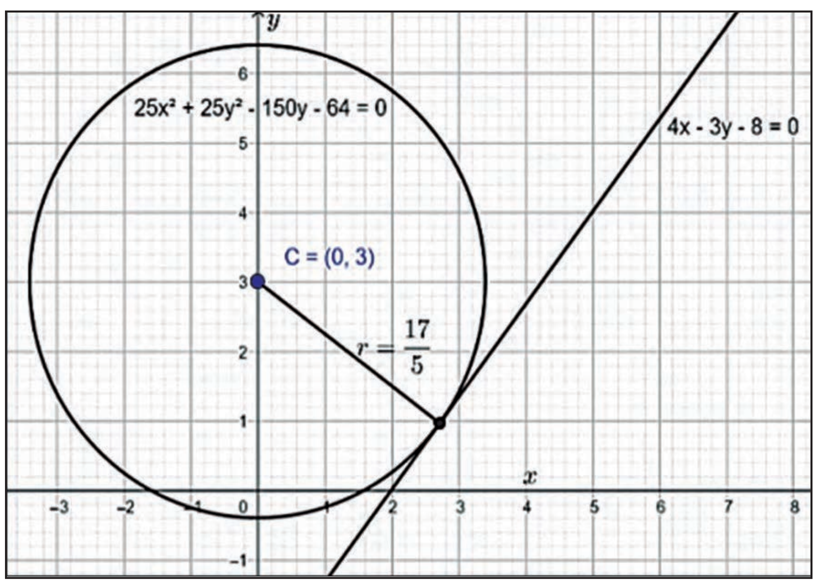


Figura 14: Ejemplo 8

Actividad 17. Determina y gráfica la ecuación de la recta L:3x-4y+43=0 es tangente a una circunferencia que tiene su centro en el punto P(-5;7).

8. Resolución de problemas aplicados al contexto y la tecnología

El desarrollo de la circunferencia en la vida cotidiana tiene varias aplicaciones que nos han ayudado a la evolución y desarrollo de la construcción en nuestra sociedad actual, el uso de la rueda como medio fundamental para el transporte ha sido de vital importancia para el comercio y la comunicación.

Calculamos la ecuación de la circunferencia de una rueda de bicicleta de 29 cm de diámetro.

$r = \frac{29}{2}$

$r = 14.5$ cm

Apliquemos la siguiente ecuación ordinaria y reemplazamos los datos respectivos:

$$(x-h)^2+(y-k)^2 = r^2$$

$$(x-0)^2+(y-0)^2 = \left(\frac{29}{2}\right)^2$$

$$x^2+y^2-\frac{841}{4} = 0$$

$$\therefore\ \varepsilon: 4x^2+4y^2-841 = 0$$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 18. Debatimos con las compañeras y compañeros sobre la importancia de la circunferencia en la telecomunicación y otros, y respondemos las siguientes preguntas.

1) ¿Qué problemas cotidianos podemos resolver a través de ecuaciones de la circunferencia?
2) ¿Porqué es importante las circunferencia en el avance tecnológico?

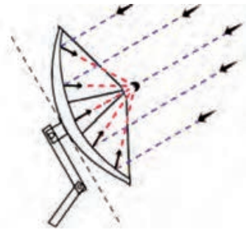
¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 19. Pintamos las líneas curvas de la cancha de básquet, haciendo énfasis en las circunferencias, no olvidemos que el centro de la cancha es el origen C(0; 0).

PARÁBOLA Y SU RELACIÓN CON SITUACIONES COTIDIANAS

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Isabella y Jerson Junior decidieron adquirir una antena parabólica para poder conectarse a la señal satelital de la radio y la televisión, pero la única indicación que les dieron, cuando hicieron la compra fue que apuntaran hacia donde el sol se esconde. Por eso, decidieron utilizar estas aplicaciones Android: DishPointer o Satellite Finder Pro, para poder encontrar los grados Acimut con respecto al satélite artificial de telecomunicaciones Tupac_Katari -(TKSat_1_87.2W o STKSat_1_87.1W)-, también la inclinación o elevación que la antena debe tener para poder captar la señal. Con la ayuda de su profesor, analizaron el movimiento de traslación que realiza la tierra, cómo afecta a la captura de la señal del satélite Tupac Katari.



Actividad 20. Respondemos en el cuaderno las siguientes preguntas:
1) ¿Tienen algo de especial las antenas parabólicas para poder captar la señal satelital del Tupac Katari?
2)¿Dónde encontramos la incidencia (cobertura) de señal en una antena parabólica?
3) ¿Qué tan importante es el receptor en la parábola y cómo ayuda a construir otros tipos de antenas parabólicas?
4) ¿La elipse y la hipérbola tendrán alguna aplicabilidad en la incidencia de señal al satelital del Tupac Katari?
5) ¿Cómo ayudan en tu comunidad o barrio las cónicas?

Muchos lugares de nuestro Estado Plurinacional de Bolivia, las familias utilizan antenas parabólicas para conectarse a la señal satelital y a la red de Internet, más en estos tiempos de transmisión de clases a distancia.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición de Parábola

La parábola es el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto fijo, llamado foco “F” y de una recta fija del mismo plano llamada directriz. $\overline{FP} = \overline{PQ}$

2. Elementos

La Parábola tiene los siguientes elementos:

Vértice (v). Es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría.

Foco (F). Es el punto fijo, situado sobre el eje de simetría a *P* unidades del vértice.

Eje de simetría (l_1). Recta perpendicular a la directriz l y que pasa por foco.

Cuerda ($\overline{\mathbf{CE}}$). Es el segmento de recta que une dos puntos cualesquiera de la parábola.

Directriz (l). Recta fija, perpendicular al eje de simetría l_1.

Cuerda Focal ($\overline{\mathbf{AB}}$). Segmento de recta que une dos puntos de la parábola pasando por el foco.

Lado Recto (LR). Es una cuerda focal perpendicular al eje de simetría.

Radio Vector (PF'). Segmento de recta que une el foco con un punto de la parábola.

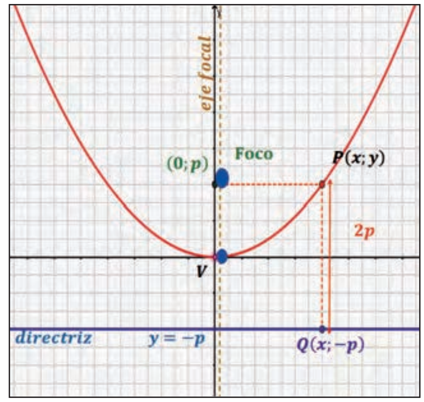


Figura 1: Parábola

En el Plano Cartesiano, una parábola puede tener su vértice en cualquier par ordenado y puede estar orientada hacia arriba, abajo, izquierda o derecha, como se ve en las antenas parabólicas.

3. Ecuaciones de la parábola

Ahora veremos que la ecuación de una parábola toma su forma más simple cuando su vértice está en el origen y su eje de simetría coincide con uno de los ejes coordenados.

3.1. La parábola en el eje vertical

Consideremos que el vértice de la parábola es V (0; 0), y su eje de simetría Y (x = 0). Sea *p* la distancia dirigida desde el vértice hasta la directriz o al foco, esto es: $|p| = |\overline{\mathrm{QV}}| = |\overline{\mathrm{VF}}|$

1) Sea P (x; y), el punto genérico de la parábola

2) Por definición, si $\mathrm{P} \in \mathrm{l} \rightarrow |\overline{\mathrm{PF}}| = \mathrm{d(P; l)} \rightarrow \sqrt{(\mathrm{x}-0)^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{p})^2} = |\mathrm{y}+\mathrm{p}|$

3) Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene:

$$(\mathrm{x})^2 + (\mathrm{y}-\mathrm{p})^2 = (\mathrm{y}+\mathrm{p})^2$$

De donde: $x^2 = \pm 4py$

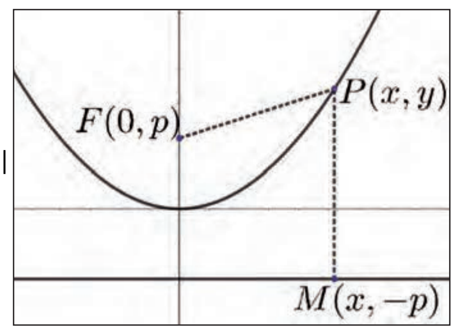


Figura 2: Parábola eje vertical

3.2. La parábola en el eje horizontal

Consideremos que el vértice de la parábola sea V (0; 0), y que su eje de simetría sea el eje X (y = 0). Sea *p* la distancia dirigida desde el vértice hasta la directriz o al foco, esto es. $|p| = |\overline{\mathrm{QV}}| = |\overline{\mathrm{VF}}|$

Sea P (x; y), el punto genérico de la parábola

Por definición, si $\mathrm{P} \in \mathrm{l} \rightarrow |\overline{\mathrm{PF}}| = \mathrm{d(P; l)} \rightarrow \sqrt{(\mathrm{x}-\mathrm{p})^2 + (\mathrm{y}-0)^2} = |\mathrm{x}+\mathrm{p}|$

Elevando ambos miembros al cuadrado se tiene: $(\mathrm{x}-\mathrm{p})^2 + \mathrm{y}^2 = (\mathrm{x}+\mathrm{p})^2$

De donde: $y^2 = \pm 4px$

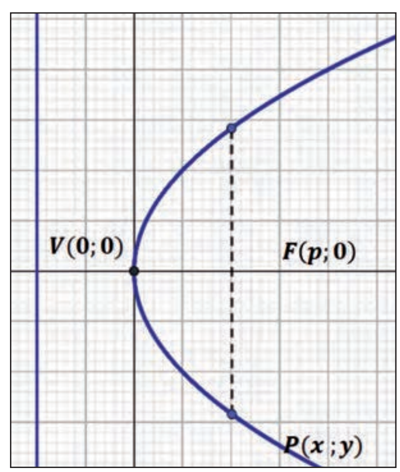


Figura 3: Parábola eje horizontal

3.3. Ecuaciones de la parábola con vértice (h; k) fuera del origen

Consideremos la parábola cuyo eje es paralelo al eje X y cuyo vértice es el punto V (h; k). Si trasladamos el sistema de coordenadas XY al sistema X'Y' de tal forma que el nuevo origen O' coincida con V (h; k), obtenemos una parábola con vértice en O', cuya ecuación es: $\mathrm{y}'^2 = 4px'$

Las ecuaciones de traslación dan: $x' = x - h$; $y' = y - k$

Que sustituidas en, se obtiene: $(\mathrm{y}-\mathrm{k})^2 = \pm 4p(\mathrm{x}-\mathrm{h})$

Además de la ecuación, es de interés conocer los siguientes elementos de la parábola paralelo al eje X

1) Vértice: V (h; k)
2) Foco: F (h + *p*; k)
3) Lado Recto: LR = I 4*p* I
4) Ecuación de la directriz: L: x = h – *p*
5) Ecuación del eje: L_1: y = k
6) Coordenadas de los extremos del lado recto:
   L (h + *p*; k + I 2*p* I), R (h + *p*; k – I 2*p* I)
7) Longitud del radio vector:
   r = I x_1 – h + *p* I

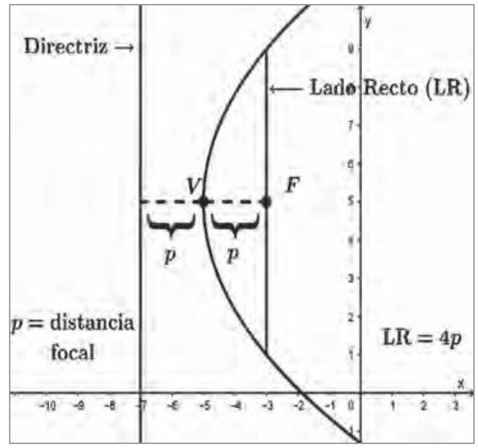


Figura 4: Parábola paralelo al eje X

<u>Consideremos la parábola cuyo eje es paralelo al eje y</u>, y cuyo vértice es el punto V (h; k). Si trasladamos el sistema de coordenadas XY al sistema X’Y’ de tal forma que el nuevo origen O’ coincida con V (h; k), obtenemos una parábola con vértice en O’, cuya ecuación es: $x'^2 = 4py'$

Las ecuaciones de traslación dan: $x' = x - h$; $y' = y - k$

Que sustituidas en la ecuación se obtiene:

$$(x - h)^2 = \pm 4p(y - k)$$

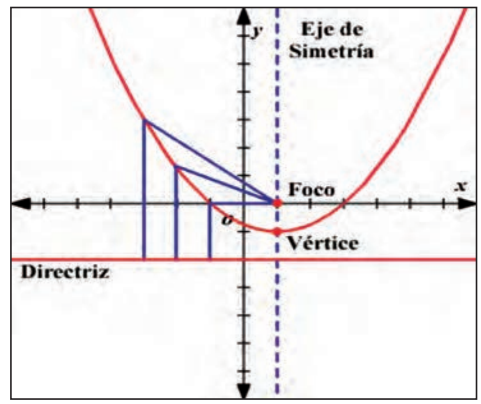


Figura 5: Parábola paralelo al eje Y

Además de la ecuación, es de interés conocer los siguientes elementos de la parábola paralelo al eje Y

1) Vértice: V (h; k)
2) Foco: F (h; k + p)
3) Lado Recto: LR = I 4p I
4) Ecuación de la directriz:
   L: y = k – p
5) Ecuación del eje: L1: x = h
6) Coordenadas de los extremos del lado recto:
   L (h + I 2p I; k+ p), R (h – I 2p I; k+ p)
7) Longitud del radio vector:
   r = I y1 – k + p I

Ejemplo 1. Hallamos el foco y la directriz de la parábola con vértice en el origen y que contiene al punto B (3;4) y su eje de simetría (o eje focal) es paralelo al eje X.

Resolución:

De acuerdo a la información tenemos una parábola de la forma $y^2 = 4px$, el punto B $(3{,}4)$ nos indica que $x = 3$, $y = 4$, (porque es un punto que está en la parábola). Reemplazamos las coordenadas del punto B en la ecuación.

$$y^2 = 4px$$

$$4^2 = 4p(3) \implies 16 = 12p \implies p = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}$$

Entonces la ecuación será

$$y^2 = 4\left(\frac{4}{3}\right)x \qquad \implies \qquad y^2 = \frac{16}{3}x$$

El Foco estará en el punto $\left(\frac{4}{3}, 0\right)$. Vemos que $\frac{4}{3}$ corresponde al valor de “p”, y como la directriz está a la misma distancia de “p” respecto al vértice, pero hacia el lado opuesto, entonces, la directriz es: $\boldsymbol{x = -\frac{4}{3}}$.

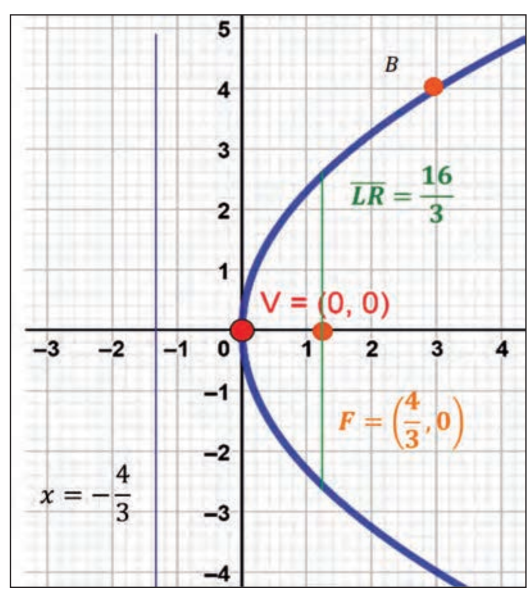


Figura 6: Ejemplo 1

Actividad 21. Encontramos los elementos (Vértice, Foco, Lado Recto, Directriz y Parámetro P) de las siguientes parábolas y grafiquemos las mismas: a) $y^2 = 8x$ b) $y^2 = -8x$ c) $x^2 = 8y$ d) $x^2 = -8y$

Ejemplo 2. Determinamos y graficamos los elementos de la parábola (y + 3)²= -8(x + 2).

Resolución:
Esta parábola corresponde a la forma (y - k)² = - 4p(x - h), entonces:
4p = - 8
p = - 2
Vértice: V(-2 ;-3)
Foco: F(h + p ; k) => F(-2 -2 ; -3)=> F (-4 ; -3)

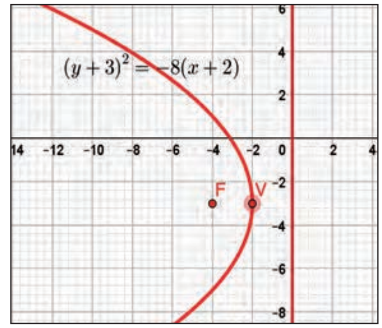


Figura 7: Ejemplo 2

Ejemplo 3. Determinamos y graficamos la ecuación de la parábola con vértice en (3; 2) y foco en (5; 2).

Resolución: Al analizar las coordenadas de vértice (3, 2) y foco (5, 2), vemos que su ordenada es común (y = 2), por lo que se concluye que están alineados horizontalmente y que el foco está a la derecha del vértice. Según ya vimos, en este caso la ecuación que resulte tiene la forma: **(y - k)² = 4p (x - h)**
Siendo las coordenadas del vértice (h;k), se sustituyen en la ecuación y resulta: (y - 2)² = 4p (x - 3)
Donde el parámetro p que representa la distancia del vértice al foco, que podemos calcular por diferencia de las abscisas correspondientes:
p = 5 - 3 => p = 2, sustituimos: (y - 2)² = 8(x - 3)

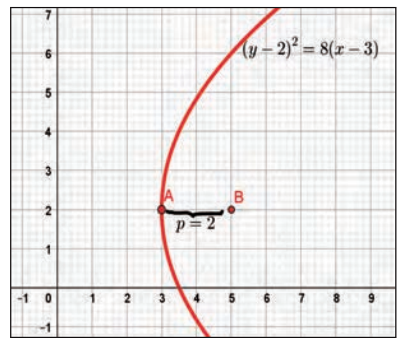


Figura 8: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Determinamos y graficamos el vértice (V), foco (F), la longitud del lado recto (LR) y la ecuación de la directriz (D), de la parábola (x + 6)² = -24(y - 2).

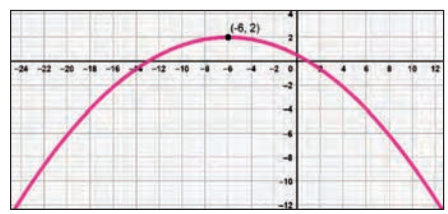


Figura 9: Ejemplo 4

Resolución:

La parábola corresponde a la forma $(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{h})^{2} = -4\boldsymbol{p}(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k})$, las formulas a aplicar son: Vértice, $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k})$; Foco, $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p})$; Lado recto, $\boldsymbol{LR} = |\mathbf{4}\boldsymbol{p}|$; ecuación de la directriz: $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p} = \mathbf{0}$.

Vértice: $(x+6)^2 = -24(y-2) \Rightarrow [x-(-6)]^2 = -24[y-(+2)]$, entonces, $\boldsymbol{V}(-\mathbf{6},\mathbf{2})$, siempre con signo cambiado, respecto a la ecuación original, $(x+6)^2 = -24(y-2)$.

Para el foco determinamos el valor de p, $4p = -24 \Rightarrow p = -6$. $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{h},\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p}) \Rightarrow F(-6{,}2+(-6)) \Rightarrow \boldsymbol{F}(-\mathbf{6},-\mathbf{4})$.

Lado recto: $\boldsymbol{LR} = |\mathbf{4}\boldsymbol{p}| \Rightarrow LR = |4(-6)| \Rightarrow \boldsymbol{LR} = \mathbf{24}$.

Directriz: $\boldsymbol{y}-\boldsymbol{k}+\boldsymbol{p} = \mathbf{0} \Rightarrow y-2+(-6) = 0 \Rightarrow y-2-6 = 0 \Rightarrow \boldsymbol{y}-\mathbf{8} = \mathbf{0}$.

Actividad 22. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Obtenemos la ecuación de la parábola que tiene foco $F(3;4)$, de vértice $V(1;4)$.
2) Determinamos la ecuación de la parábola que tiene directriz $y = 4$ y vértice $(0;0)$.
3) Encontramos la ecuación de la parábola de directriz $x = 2$ y foco $(-2;0)$.
4) Dada la parábola $(x+2)^2 = 12(y-2)$, encontramos el foco y el vértice.
5) Dada la parábola $(x-3)^2 = 8(y-2)$, determinamos su vértice, foco y directriz.

3.4. Ecuación de la parábola en su forma general

En todos los casos, la estructura de la ecuación de la parábola tiene las siguientes características: Existe solamente una variable al cuadrado, x² o bien y² y otra lineal. Para llegar a dicha expresión o forma general, es necesario desarrollar algebraicamente la forma ordinaria o canónica de la ecuación y obtenemos la siguiente ecuación: x² + Dx + Ey + F = 0.
Es la ecuación de una parábola vertical en su forma general. Análogamente, para una parábola de orientación horizontal, la ecuación en su forma general será: y² + Dx + Ey + F = 0

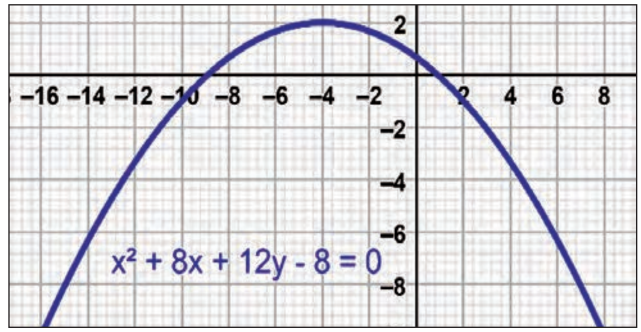
Ejemplo 5. Determinamos la ecuación general y graficamos una parábola que tiene su vértice en el punto (-4 ; 2) y su directriz es y = 5

Analizando las coordenadas del vértice y la posición de la directriz, se puede concluir que:

La directriz es horizontal, por tanto, la posición de la parábola es vertical.

La directriz corta al eje de las ordenadas en un valor (5) mayor que la ordenada del vértice (2), por tanto, la parábola se abre hacia abajo en sentido negativo del eje de las "y".

Figura 10: Ejemplo 5



Las coordenadas del vértice no corresponden con las del origen.

Dado lo anterior, se trata entonces de una parábola cuya ecuación ordinaria o canónica es del tipo: **$(x - h)^2 = -4p\,(y - k)$**

De las coordenadas del vértice se obtiene: **h = -4 => k = 2**

Se obtiene p por diferencia entre las ordenadas del vértice y la directriz, resultando:

$p = 5 - 2$, por tanto, $p = 3$

Sustituimos valores en la ecuación ordinaria, resulta:

$$(x - h)^2 = -4p(y - k)$$

$$[x - (-4)]^2 = -4 \cdot 3[y - (+2)]$$

$$(x + 4)^2 = -12(y - 2)$$

$(x + 4)^2 = -12y + 24$

Operación auxiliar: Desarrollando el binomio al cuadrado:

$$(x + 4)(x + 4) = x^2 + 8x + 16$$

$$x^2 + 8x + 16 = -12y + 24$$

Reducimos términos semejantes e igualamos a cero la ecuación tenemos:

$$\varepsilon: x^2 + 8x + 12y - 8 = 0$$

Ejemplo 6. Dada la ecuación de la parábola y² + 8y - 6x + 4 = 0, graficamos y encontramos las coordenadas del vértice y del foco, así como la ecuación de su directriz.

Resolución: una forma de obtener los elementos solicitados consiste en reducir la ecuación general expresándola en su forma ordinaria o canónica, aplicando el método completando cuadrados.

$$\boldsymbol{y^2 + 8y - 6x + 4 = 0}$$

$$y^2 + 8y = 6x - 4$$

$$y^2 + 8y + \left(\frac{8}{2}\right)^2 = 6x - 4 + \left(\frac{8}{2}\right)^2 \quad \textit{completando cuadrados}$$

$$y^2 + 8y + 16 = 6x + 12 \quad \textit{simplificando}$$

$$(y + 4)^2 = 6(x + 2) \quad \textit{factorizando}$$

Con lo cual se puede determinar que:

$k = -4$ y $h = -2$ $\quad \boldsymbol{V(-2, -4)}$

Además, si $4p = 6$ entonces: $p = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$

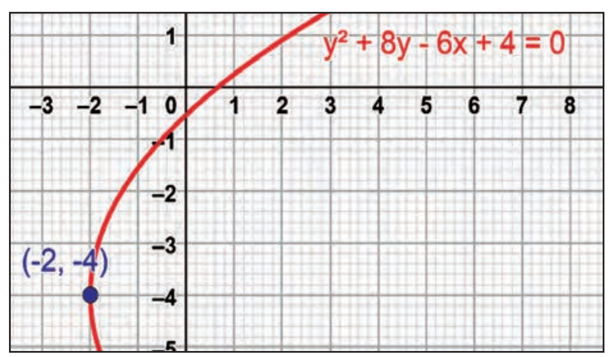


Figura 11: Ejemplo 6

Considerando la orientación ya señalada de la parábola y el valor de p, es posible determinar la posición del foco, ya que éste estará a la derecha del vértice, a una distancia p desde h y con la misma ordenada k, resultando: $(y - k)^2 = 4p(x - h)$

$$F(h + p, k) \Longrightarrow \quad F\left(-2 + \frac{3}{2}, -4\right) \quad \Longrightarrow \boldsymbol{F\left(-\frac{1}{2}, -4\right)}$$

La ecuación de la directriz se obtiene de:

$x - h + p = 0$

Finalmente: $x - (-2) + \left(\frac{3}{2}\right) = 0 \Longrightarrow$

$$x + \frac{7}{2} = 0 \Longrightarrow \boldsymbol{x = -\frac{7}{2}}$$

Actividad 23. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Determinar las coordenadas del Vértice, Foco y calcular el lado recto de la parábola de ecuación: $y^2 + 4x - y + 5 = 0$.

2) Determinar la ecuación ordinaria, vértice y foco de la parábola: $3y^2 + 6x - y + 2 = 0$.

4. Parábola que pasa por tres puntos

Trabajamos a partir de la ecuación general de la parábola e identificando el sentido de las ramas. Supongamos que se tiene los puntos $A(x_1;y_1)$, $B(x_2;y_2)$ y $C(x_3;y_3)$. Consideramos la siguiente ecuación: **$x^2+Dx+Ey+F=0$ (β)**

Reemplazamos los puntos A,B y C en la ecuación (β). Así:

$$x_1^2 + Dx_1 + Ey_1 + F = 0 \qquad (1)$$
$$x_2^2 + Dx_2 + Ey_2 + F = 0 \qquad (2)$$
$$x_3^2 + Dx_3 + Ey_3 + F = 0 \qquad (3)$$

Las ecuaciones (1),(2) y (3) forman un sistema de ecuaciones de 3 x 3, resolviendo este determinamos el valor de D, E y F. Realizamos de manera análoga para parábolas de ecuación general: $y^2 + Dx + Ey + F = 0$.

Ejemplo 7. Determinamos y graficamos la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A(1;2), B(5;6) y C(3;3).

Representamos los puntos en el plano cartesiano.

Observamos que la parábola es vertical con ramas hacia arriba, entonces utilizamos la ecuación:

$$x^2 + Dx + Ey + F = 0 \qquad (\beta)$$

Reemplazamos los puntos A, B y C en la ecuación (β). Así:

$$1^2 + D + 2E + F = 0 \qquad (1)$$
$$5^2 + 5D + 6E + F = 0 \qquad (2)$$
$$3^2 + 3D + 3E + F = 0 \qquad (3)$$

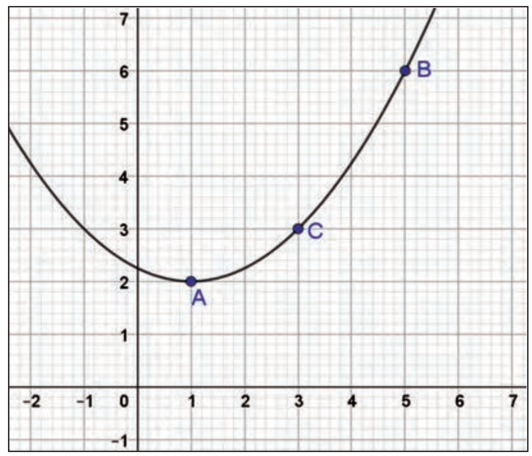


Figura 12: Ejemplo 7

$$\begin{cases} D + 2E + F = -1 & ① \\ 5D + 6E + F = -25 & ② \\ 3D + 3E + F = -9 & ③ \end{cases}$$

(-1)② y ③

$$\begin{cases} -5D - 6E - \cancel{F} = 25 \\ 3D + 3E + \cancel{F} = -9 \end{cases}$$
$$-2D - 3E \qquad = 16 \quad ⑤$$

$$\begin{cases} D + 2E + \cancel{F} = -1 \\ -5D - 6E - \cancel{F} = 25 \end{cases}$$
$$-4D - 4E \qquad = 24 \quad ④$$

$(-1)(\div 2)$④ y ⑤

$$\begin{cases} \cancel{2D} + 2E = -12 \\ -\cancel{2D} - 3E = 16 \end{cases}$$
$$-E = 4$$
$$\mathbf{E = -4}$$

En la ecuación tenemos:

$$-2D - 3E = 16 \quad ⑤$$
$$-2D - 3(-4) = 16$$
$$-2D = 16 - 12$$
$$-2D = 4$$
$$D = \frac{4}{-2}$$
$$\mathbf{D = -2}$$

Resolvemos el sistema y obtenemos: D = -2, E = -4 y F = 9, entonces la ecuación de la parábola es. **ε: $x^2 - 2x - 4y + 9 = 0$**.

Una forma de obtener los elementos solicitados consiste en reducir la ecuación general expresándola en su forma ordinaria o canónica, aplicando el método completando cuadrados.

$$\boldsymbol{x^2 - 2x - 4y + 9 = 0}$$
$$x^2 - 2x = 4y - 9$$
$$x^2 - \mathbf{2x} + \left(\frac{2}{2}\right)^2 = 4y - 9 + \left(\frac{2}{2}\right)^2 \qquad \textit{completando cuadrados}$$
$$x^2 - 2x + 1 = 4y - 8 \qquad \textit{simplificando}$$
$$(x-1)^2 = 4(y-2) \qquad \textit{factorizando}$$

Con lo cual se puede determinar que:

$$h = 1 \;\text{ y }\; k = 2 \qquad \boldsymbol{V(1;2)}$$

Además, si $4p = 4$ entonces: $p = \frac{4}{4} = \mathbf{1}$

Actividad 24. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Determinar y graficar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A(-5 ; 2),B(-1 ; 4) y C(3 ; 2).
2. Determinar y graficar la ecuación de la parábola que pasa por los puntos A(12 ; -12), B(2 ; 8) y C(8 ; 12).

5. Tangente a una parábola

Como la ecuación de una parábola es de segundo grado, podemos obtener la ecuación de la tangente empleando el método optativo de la discriminante o el método de la tangente en el origen de una curva.

En general, son tres los problemas de tangencia que se presentan:

- Tangente en un punto de contacto dado.
- Tangente paralela a una dirección dada.
- Tangentes trazadas desde un punto exterior.

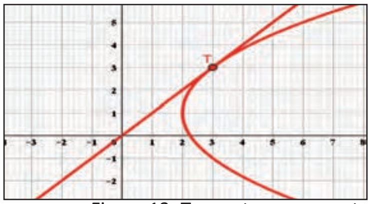


Figura 13: Tangente en un punto

Teorema 1. Ecuación de la tangente en un punto de contacto dado.

La tangente a la parábola $\varepsilon . y^2 = 4px$, en cualquier punto $P(x_1 \ ; y_1)$, de la curva tiene por ecuación: $y_1 y = 2p\,(x+x_1)$

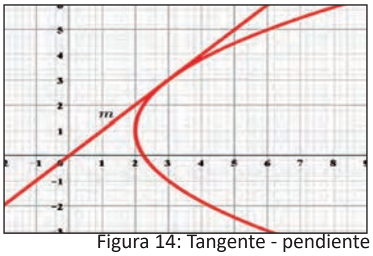


Figura 14: Tangente - pendiente

Teorema 2. Ecuación de la tangente de pendiente conocida.

La tangente de pendiente m a la parábola: $y^2=4px$ tiene la forma:
$y = mx + \frac{p}{m}$, $m \neq 0$

Ecuación conociendo un punto exterior de la parábola por donde pasa la recta tangente, en este caso tenemos dos soluciones o rectas tangentes.

Aplicamos el siguiente procedimiento:

- Aplicamos la ecuación de la recta, punto-pendiente.
- Despejamos y, sustituimos en la ecuación de la parábola.
- Igualamos a cero la discriminante de la ecuación y resolvemos está.
- Reemplazamos la pendiente en la ecuación punto-pendiente.

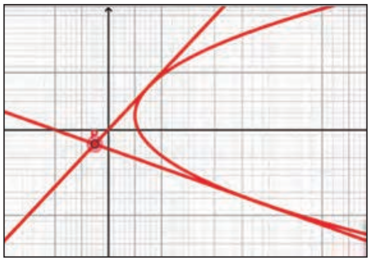


Figura 15: Tangente en un punto exterior

Ejemplo 8. Calculemos las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto P(1; 4) a la parábola: $y^2+3x-6y+9=0$.

Solución. Las rectas tangentes que pasan por *P* tienen por ecuación:

$$y - 4 = m(x-1) \quad (\beta)$$

Despejando "x" se tiene: $x = \frac{1}{m}(y+m-4)$

Sustituyendo en la ecuación de la parábola tenemos:

$$y^2 + \frac{3}{m}(y+m-4) - 6y + 9 = 0$$

$$my^2 + (3-6m)y + 12m - 12 = 0$$

Por condición de tangencia: $(3-6m)^2 - 4m(12m-12) = 0$

Efectuando obtenemos : $4m^2 - 4m - 3 = 0 \leftrightarrow m = \frac{3}{2}, m = -\frac{1}{2}$

Por lo que, en (β), las ecuaciones de las dos tangentes son:

$L_1 . 3x - 2y + 5 = 0 \qquad L_2 .\ x + 2y - 9 = 0$

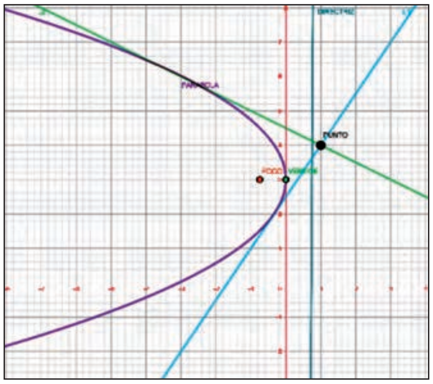


Figura 16: Ejemplo 8

Actividad 25. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Determinemos la ecuación de la recta tangente a la parábola: $x^2 - 6x + 5y - 11 = 0$ en el punto (-2;-1).
2. Determinemos la ecuación de la recta tangente de pendiente m = 2 a la parábola: $y^2 - 6x + 5y - 11 = 0$.

6. La función cuadrática y aplicaciones de la parábola

La función cuadrática general es aquella función con dominio R y definida por la regla de correspondencia.

$\boldsymbol{f(x) = ax^2 + bx + c = 0,}$ donde a, b, y c son constantes que representan números reales y $a \neq 0$.

La función f definida por esta ecuación puede escribirse como: $f = \{(x;y) \in \boldsymbol{R}^2 / y = \boldsymbol{ax^2 + bx + c}\}$ y su gráfica es una parábola cuyo eje de simetría es paralelo o coincidente con el eje Y, abierta hacia arriba si: $a > 0$ y hacia abajo si: $a < 0$.

- Para $a > 0$, la función tiene su valor mínimo k , cuando $x = -\frac{b}{2a}$, es decir, el punto más bajo de la gráfica es el vértice V (h; k).
- Para $a < 0$, la función tiene su valor máximo k, cuando,$x = -\frac{b}{2a}$ es decir, el punto más alto de la gráfica es el vértice V (h; k).

Ejemplo 9. Determinamos un valor máximo o bien un mínimo para la función: $f = \{(x;y) \in \boldsymbol{R}^2 / y = \boldsymbol{x^2 + 6x + 2y + 5 = 0}\}$

Solución. La ecuación que define a f es:

$$x^2 + 6x + 2y + 5 = 0$$

$$2y = -x^2 - 6x - 5$$

$$y = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$$

De este modo, los valores de la función $f(x)$ están dados por

$$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$$

Para esta función cuadrática, $a = -\frac{1}{2}$, $b = -3$. Como $a < 0$,

f tiene un valor máximo

en el punto donde $x = -b/2a$, esto es, en : $\boldsymbol{x = -\frac{-3}{2\left(-\frac{1}{2}\right)} = -3}$

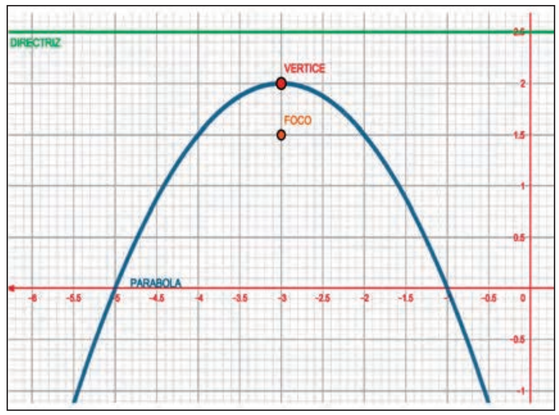


Figura 17: Ejemplo 9

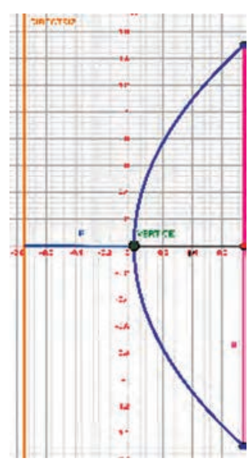
El valor máximo es: $f(x) = -\frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{5}{2}$

$$\Rightarrow f(-3) = -\frac{1}{2}(-3)^2 - 3(-3) - \frac{5}{2} \qquad \Leftrightarrow f(-3) = 2$$

Nota. Del uso y aprovechamiento del lenguaje de las funciones se puede expresar diversos tipos de situaciones prácticas que tienen que ver con la geometría, física, economía, biología, etc., en términos de una relación funcional. La función obtenida representa un modelo matemático de tales situaciones prácticas. Mostraremos con unos ejemplos el procedimiento implícito para obtener algunos modelos matemáticos que involucren funciones cuadráticas.

Actividad 26. Determinamos un valor máximo o un mínimo para la función:

$$\boxed{f = \{(x;y) \in \boldsymbol{R}^2 / y = x^2 + 8x + 12y - 8 = 0\}}$$



7. Resolución de problemas aplicados en contexto y la tecnología

El señor Héctor compró una antena parabólica de 3 metros, para ver el mundial de fútbol Qatar 2022. ¿A qué distancia del fondo de la antena está colocado el receptor de señales?
Reemplazamos los datos en la ecuación de la parábola.

Consideramos la gráfica de la parábola tenemos:

$$4P = 3\,m$$

$$P = \frac{3}{4}m$$

$$(y-k)^2 = -4p(x-h)$$

$$(y-0)^2 = -4\left(\frac{3}{4}\right)(x-0)$$

$$y^2 = -3x$$

$\therefore\ \varepsilon\!:\ y^2 + 3x = 0$

El receptor de la antena está a 0.75 metros

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 27. Reflexionemos sobre la importancia de la propiedad focal de la parábola en las antenas satelitales, lámparas, faros, linternas, etc. y respodemos las siguientes preguntas.

1) En tu contexto, ¿cómo se aplica la parábola?
2) ¿Cómo ayuda la parábola en el desarrollo de la ciencia y tecnología?
3) ¿Por qué crees que es importante aprender sobre las ecucaciones de la parábola?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 28. Realicemos una maqueta de un puente colgante a escala 1:20, identificando los elementos de la parábola.

LA ELIPSE APLICADO A LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Noticiencia

Debido a la resistencia del viento, las trayectorias que realizan los aviones cuando hacen viajes circulares se vuelven elípticas.

El maestro de Estudios Sociales hablo sobre los movimientos de los planetas, mencionando que su trayectoria gira en forma elíptica alrededor de una estrella llamado Sol. José María quedó motivado sobre el tema más cuando la maestra de Artes Plásticas les pidió dibujar la figura de la elipse, entonces decidió profundizar sus conocimientos e investigó que las órbitas de los planetas alrededor del Sol son elípticas y este se encuentra en uno de los focos. La excentricidad de la órbita de la tierra alrededor del Sol es aproximadamente 0,0167.

Actividad 29 . Realicemos la siguiente práctica:
El método se basa en la definición más corriente de la elipse, como "lugar geométrico" de los puntos cuya suma de distancias a los focos es constante.

Materiales
- Una cuerda
- Lápiz
- Colores
- Reglas
- Dos chinches o alfileres

Procedimiento
Los alfileres se colocan en el lugar de los focos y la cuerda debe medir lo mismo que el eje mayor (2a). Al lazo de cuerda se le debe añadir la distancia de los focos. Con la cuerda tensa se mueve el lápiz o material de dibujo rodeando por completos los dos focos.

- ¿Por qué los planetas giran alrededor del Sol?
- ¿Qué planeta tiene la mayor excentricidad?
- ¿Los cometas y los satélites también describen órbitas elípticas? ¿Por qué?

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición

Una elipse es el lugar geométrico de todos los puntos (ε), que se mueven en un plano de tal manera que la suma de sus distancias a dos puntos fijos de ese plano es siempre igual a una constante, mayor que la distancia entre los dos puntos. Los dos puntos fijos se llaman focos, es constante de la elipse. Si denotamos la suma constante por 2a, según esta definición y refiriéndonos a la gráfica de la figura 1, se tiene:

$P \in \varepsilon \leftrightarrow |\overline{PF_1}| + |\overline{PF_2}| = 2a$

$R \in \varepsilon \leftrightarrow |\overline{RF_1}| + |\overline{RF_2}| = 2a$

El segmento: $|\overline{V_1V_2}| = 2a$
se denomina *eje mayor,*
y el segmento: $|\overline{B_1B_2}| = 2b$
es el *eje menor* de la elipse.
La distancia entre los focos,
esto es: $|\overline{F_1F_2}| = 2c$, se llama *distancia focal.*

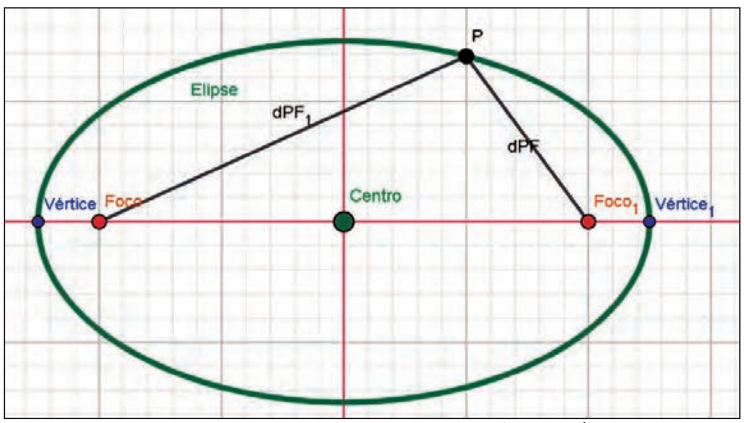


Figura 1: Elipse

2. Elementos de la elipse

- **Focos:** son los puntos fijos $F_1\ y\ F_2$.
- **Eje focal:** es la recta que pasa por los focos.
- **Eje secundario:** es la mediatriz del segmento $F_1\ F_2$.
- **Centro:** es el punto de intersección de los ejes.
- **Radios vectores:** son los segmentos que van desde un punto de la elipse a los focos: $PF_1\ y\ PF_2$.
- **Distancia focal:** es el segmento $\overline{F_1\ F_2}$ de longitud 2c, c es el valor de la semidistancia focal.
- **Vértices:** Son los puntos de intersección de la elipse con los ejes: $V_1\ y\ V_2$; $B_1\ y\ B_2$.
- **Eje mayor:** es el segmento $\overline{V_1\ V_2}$ de longitud 2a, a es el valor del semieje mayor.
- **Eje menor:** es el segmento $\overline{B_1\ B_2}$ de longitud 2b, b es el valor del semieje menor.
- **Ejes de simetría:** son las rectas que contienen al eje mayor o al eje menor.
- **Centro de simetría:** coincide con el centro de la elipse, que es el punto de intersección de los ejes de simetría.

Los elementos de la elipse cuando el eje mayor es coincidente con el eje X:

1) Centro: C (h; k)
2) Vértices: V_1 (h + a; k), V_2 (h – a; k)
3) Focos: F_1 (h + c; k), F_2 (h – c; k)
4) Extremos del eje menor:
   B_1 (h; k + b), B_2 (h; k – b)
5) Lado recto: $\mathrm{LR} = \frac{2b^2}{a}$
6) Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
7) Extremos de los lados rectos:
   $L_1\left(h + c; k + \frac{b^2}{a}\right)$, $R_1\left(h + c; k - \frac{b^2}{a}\right)$
   $L_2\left(h - c; k + \frac{b^2}{a}\right)$, $L_2\left(h - c; k - \frac{b^2}{a}\right)$
8) Ecuaciones de las directrices: $x = h \pm \frac{a}{e}$
9) Distancia entre las directrices L_1 y L_2: $d = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$
10) Radios vectores para un punto P (x_1; y_1), de la elipse:
   $r_1 = a - ex_1$ (Foco derecho) y $r_2 = a + ex_1$ (Foco izquierdo)

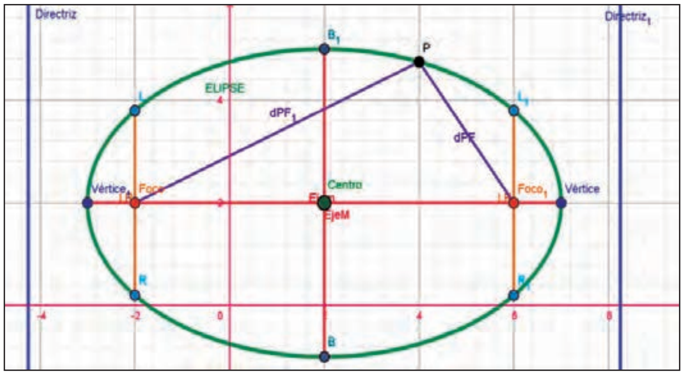


Figura 2: Elipse eje X

Los elementos de la elipse cuando el eje mayor es coincidente con el eje Y:

1) Centro: C (h; k)
2) Vértices: V_1 (h; k + a), V_2 (h; k– a)
3) Focos: F_1 (h; k + c), F_2 (h; k – c)
4) Extremos del eje menor:
   B_1 (h + b; k), B_2 (h – b; k)
5) Lado recto: $\mathrm{LR} = \frac{2b^2}{a}$
6) Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$
7) Extremos de los lados rectos:
   $L_1\left(h + \frac{b^2}{a}; k + c\right)$, $R_1\left(h - \frac{b^2}{a}; k + c\right)$
   $L_2\left(h + \frac{b^2}{a}; k - c\right)$, $L_2\left(h - \frac{b^2}{a}; k - c\right)$
8) Ecuaciones de las directrices: $y = k \pm \frac{a}{e}$
9) Distancia entre las directrices L_1 y L_2: $d = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$
10) Radios vectores para un punto P (x_1; y_1), de la elipse:
   $r_1 = a - ey_1$ (Foco superior) y $r_2 = a + ey_1$ (Foco inferior).

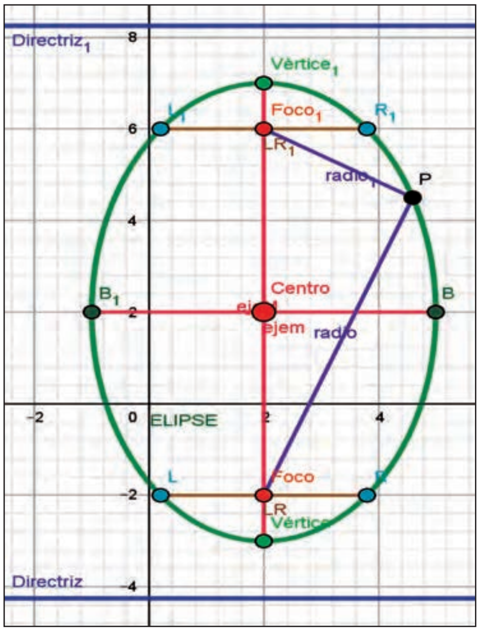


Figura 3: Elipse eje Y

3. Ecuaciones de la elipse

A continuación, estudiaremos las ecuaciones de la elipse cuando su centro se encuentra en el origen y su eje mayor o eje focal coincide con uno de los ejes del plano cartesiano, como así también sus otras ecuaciones:

3.1. Elipse con centro en el origen y eje mayor coincidente con el eje X

Esta primera forma canónica de la ecuación de la elipse se denomina también **elipse horizontal** con centro en el origen.

$$\varepsilon: \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

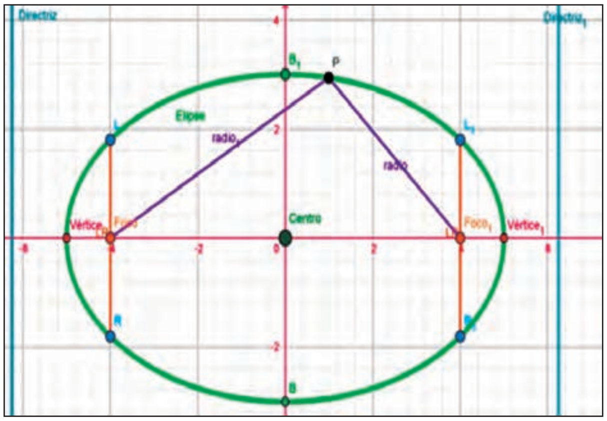


Figura 4: Elipse origen X

3.2. Elipse con centro en el origen y eje mayor coincidente con el eje Y

Esta segunda forma canónica es llamada **elipse vertical** con centro en el origen.

$$\varepsilon: \frac{\mathbf{x^2}}{\mathbf{b^2}} + \frac{\mathbf{y^2}}{\mathbf{a^2}} = \mathbf{1}$$

Figura 5: Elipse origen "Y"

3.3. Elipse con eje mayor paralelo al eje X

Sea la elipse de eje focal paralelo al eje X y cuyo centro es el punto C (h; k), mostrada en el Figura 2. Cuya ecuación, según la primera forma es:

$$\varepsilon: \frac{\mathbf{(x-h)^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{(y-k)^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

3.4. Elipse con eje mayor paralelo al eje Y

Sea la elipse de eje focal paralelo al eje Y cuyo centro es el punto C (h; k). Según la primera forma es: las ecuaciones con eje mayor reciben el nombre de **formas ordinarias o generalizadas**. Es de interés conocer los siguientes elementos de la elipse.

$$\frac{\mathbf{(x-h)^2}}{\mathbf{b^2}} + \frac{\mathbf{(y-k)^2}}{\mathbf{a^2}} = \mathbf{1}$$

Ejemplo 1. Hallamos la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos V1 (6; 1) y V2 (-2; 1) y pasa por el punto P (2; 3).

$$\frac{\mathbf{(x-h)^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{(y-k)^2}}{\mathbf{b^2}} = 1$$

$$\frac{(2-2)^2}{4^2} + \frac{(3-1)^2}{b^2} = 1$$

$$b^2 = 4$$

$$\frac{16(x-2)^2}{16} + \frac{16(y-1)^2}{4} = 16$$

$$x^2 - 4x + 4 + 4y^2 - 8y + 4 = 16$$

$$\boldsymbol{\varepsilon: x^2 + 4y^2 - 4x - 8y - 8 = 0}$$

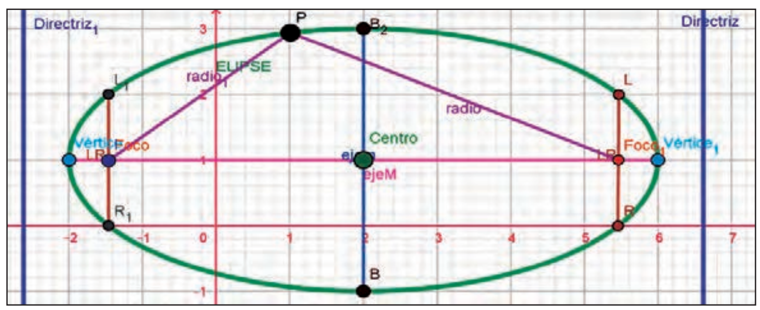


Figura 6: Ejemplo 1

Ejemplo 2. La distancia entre las directrices de una elipse es 24. Hallamos su ecuación si los focos son: F1 (1; 2) y F2 (- 5; 2).

$$d(F-C) = 3$$

$$c = 3$$

$$d(l_1 - l_2) = 24$$

$$\frac{2a^2}{c} = 24$$

$$a^2 = 36$$

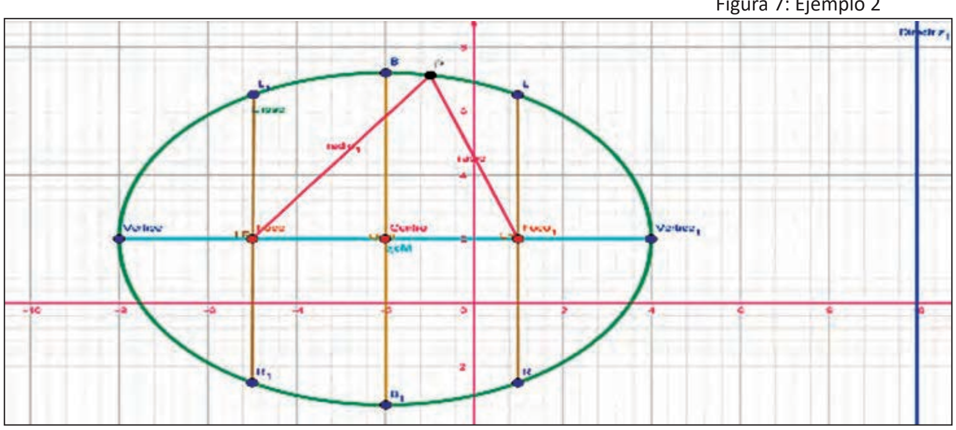
$$\frac{\mathbf{(x-h)^2}}{\mathbf{a^2}} + \frac{\mathbf{(y-k)^2}}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$

$$\frac{(x+2)^2}{36} + \frac{(y-2)^2}{27} = 1$$

$$27(x^2 + 4x + 4) + 36(y^2 - 4y + 4) = 972$$

$$\boldsymbol{\varepsilon: 27x^2 + 36y^2 + 108x - 144y - 720 = 0}$$

Figura 7: Ejemplo 2



Ejemplo 3. Hallamos y graficamos la ecuación de la elipse que pasa por el punto P (- 4; 3), y cuyos focos son los puntos: F1 (- 1; 3) y F2 (- 1; - 1).

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} = 2a$$

$$\sqrt{(-1+4)^2 + (3-3)^2} + \sqrt{(-1+4)^2 + (-1-3)^2} = 2a$$

$$\sqrt{9} + \sqrt{9+16} = 2a$$

$$3 + \sqrt{25} = 2a$$

$$3 + 5 = 2a$$

$$8 = 2a$$

$$8 = 2a$$

$$a = 4$$

Relación de distancia

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$(4)^2 = b^2 + (2)^2$$

$$16 = b^2 + 4$$

$$b^2 = 12$$

$$\mathbf{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}$$

$$\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(x-1)^2}{16} = 1 \ //* \ 48$$

$$4(x+1)^2 + 3(x-1)^2 = 48$$

$$4x^2 + 8x + 4 + 3x^2 - 6y + 3 - 48 = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon: 4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y - 41 = 0}$$

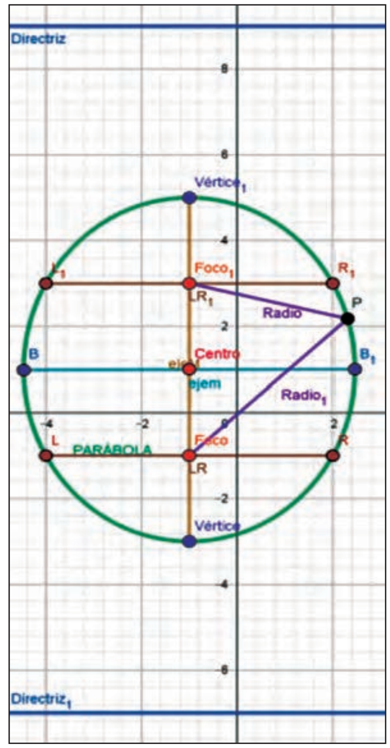


Figura 8: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Hallamos y graficamos la ecuación de la elipse en la cual un vértice es V (- 1; - 3), el foco opuesto F (- 1; 3) y la longitud de su eje menor es $4\sqrt{3}$.

Relación de distancia

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$a^2 = \left(2\sqrt{3}\right)^2 + (6-a)^2$$

$$a^2 = 4 \cdot 3 + 36 - 12a + a^2$$

$$12a = 12 + 36$$

$$a = \frac{48}{12}$$

$$a = 4$$

De la gráfica

$$a + c = 6$$

$$c = 6 - a$$

$$\mathbf{\frac{(x-h)^2}{b^2} + \frac{(y-k)^2}{a^2} = 1}$$

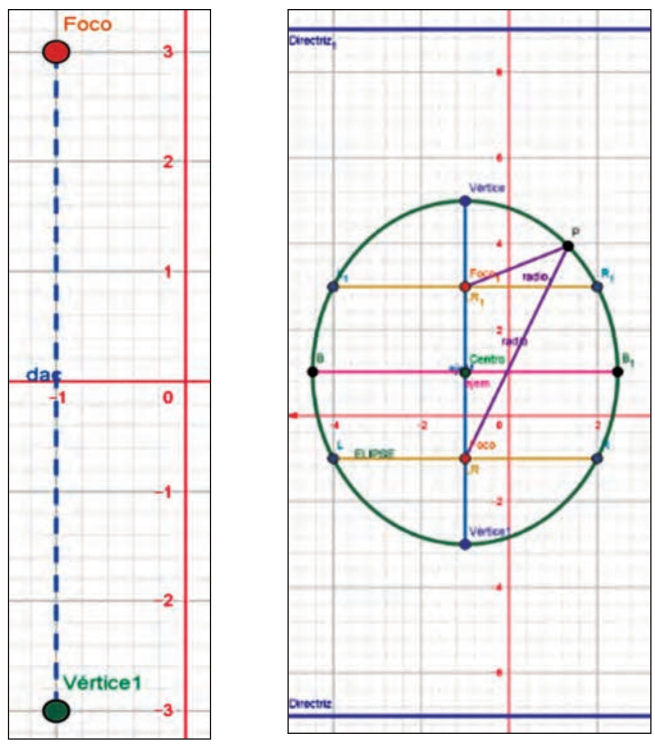
$$\frac{(x+1)^2}{12} + \frac{(y-1)^2}{16} = 1 \ //* \ 48$$

$$4(x+1)^2 + 3(x-1)^2 = 48$$

$$4x^2 + 8x + 4 + 3x^2 - 6y + 3 - 48 = 0$$

$$\boldsymbol{\varepsilon: 4x^2 + 3y^2 + 8x - 6y - 41 = 0}$$

Figura 9: Ejemplo 4



Actividad 30. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Hallamos la ecuación de la elipse cuyos vértices son los puntos V_1 (7; -2) y V_2 (-5; - 2) y pasa por el punto P (3; 2).
2. La distancia entre las directrices de una elipse es 18. Hallamos su ecuación si sus focos son: F_1 (1; 5) y F_2 (1; 3).
3. Encontramos la ecuación de la elipse que pasa por el punto P (1; 5) y cuyos focos son los puntos: F_1 (5; 2) y F_2 (- 3; 2).
4. Hallamos la ecuación de la elipse en la cual un vértice es V (3; 2), el foco opuesto F (11; 2) y la longitud de su eje menor es 8.

4. Ecuación general de una elipse en posición ordinaria

Ecuación general de la elipse con ejes paralelos a las coordenadas: $\mathbf{Ax^2 + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

donde: $t = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \rightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{t/_A} + \frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{t/_C} = 1$. Es la ecuación ordinaria de una elipse equivalente a las dos ecuaciones, dependiendo la forma del valor que asuma t. Entonces podemos afirmar que:

Si $t > 0$, la ecuación, representa una elipse con centro en $\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$

Si $t = 0$, la ecuación, representa un punto en $\left(-\frac{D}{2A}; -\frac{E}{2C}\right)$

Si $t < 0$, la ecuación, representa un conjunto vacío.

Ejemplo 5. Determinamos si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o un conjunto vacío. Si la gráfica es una elipse, hallamos sus elementos:

a) $4x^2 + 9y^2 - 24x + 108y + 360 = 0$

$$4x^2 - 24x \quad + 9y^2 + 108y = -360$$

$$4\left[x^2 - 6x + \left(\tfrac{6}{2}\right)^2\right] + 9\left[y^2 + 12y + \left(\tfrac{12}{2}\right)^2\right] = -360 + 4\left(\tfrac{6}{2}\right)^2 + 9\left(\tfrac{12}{2}\right)^2$$

$$4(x^2 - 6x + 9)^2 + 9(y^2 + 12y + 36) = -360 + 36 + 324$$

$$\mathbf{4(x-3)^2 + 9(y+6)^2 = 0} \quad \therefore \textbf{ es un punto}$$

b) $25x^2 + 9y^2 - 50x + 36y - 164 = 0$

$$25x^2 - 50x \quad + 9y^2 + 36y = 164$$

$$25\left[x^2 - 2x + \left(\tfrac{2}{2}\right)^2\right] + 9\left[y^2 + 4y + \left(\tfrac{4}{2}\right)^2\right] = 164 + 25\left(\tfrac{2}{2}\right)^2 + 9\left(\tfrac{4}{2}\right)^2$$

$$25(x^2 - 2x + 1) + 9(y^2 + 4y + 4) = 164 + 25 + 36$$

$$\frac{25(x-1)^2}{225} + \frac{9(y+2)^2}{225} = \frac{225}{225} \quad \therefore \textbf{ es una Elipse}$$

$$\frac{(x-1)^2}{\frac{225}{25}} + \frac{(y+2)^2}{\frac{225}{9}} = 1$$

$$\frac{(x-1)^2}{9} + \frac{(y+2)^2}{25} = 1$$

$$\mathbf{a = 5 \quad b = 3 \quad c = 4}$$

$$\mathbf{h = 1 \quad k = -2}$$

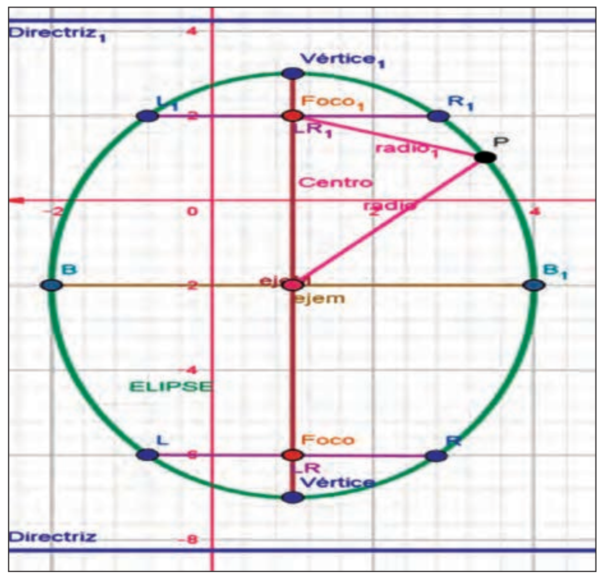


Figura 10: Ejemplo 5

Elementos de la Elipse

1) $C(1; -2)$
2) $V_1(1; 3);\ V_2(1; -7)$
3) $F_1(1; 2);\ F_2(1; -6)$
4) $B_1(4; -2);\ B_2(-2; -2)$
5) $LR = 3.6$
6) $e = 0.8$
7) $L_1(2.8; 2);\quad R_1(-0.8; 2)$

   $L_2(2.8; -6);\ R_2(-0.8; -6)$
8) $y = 4.250\ ;\ \ y = -8.250$
9) $d_{L_1 \rightarrow L_2} = 12.5$
10) $r_1 = 5 - 0.8y_1\ ,\ r_2 = 5 + 0.8y_1$

Actividad 31. Resolvamos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Determinamos si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o un conjunto vacío. Si la gráfica es una elipse hallar sus elementos: $5x^2 + 4y^2 - 30x - 4y + 46 = 0$
2. Determinamos si la gráfica de la ecuación dada es una elipse, un punto o un conjunto vacío. Si la gráfica es una elipse hallar sus elementos: $9x^2 + 4y^2 - 36x - 8y + 76 = 0$

Actividad 32

Hallamos la excentricidad de las siguientes elipses:

a) $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1$

b) $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1$

c) $x^2 + 4y^2 = 16$

d) $3x^2 + 2y^2 = 6$

Actividad 33

Hallamos la ecuación de la elipse conociendo:

a) $C(0; 0), F(2; 0)$ y $V(3; 0)$

b) $C(0; 0), F(0; 4)$ y $V(0; 5)$

c) $C(1; -1), F(1; 2)$ y $V(1; 4)$

d) $C(-6; 4), V(7; 4)$ y $F(6; 4)$

Actividad 34

Encontramos las distancias a, b y c de las siguientes elipses:

a) $x^2 + 2y^2 - 2x + 8y + 5 = 0$

b) $25x^2 + 9y^2 - 18y - 216 = 0$

c) $x^2 + 3y^2 - 6x + 6y = 0$

d) $3x^2 + y^2 - 24x + 39 = 0$

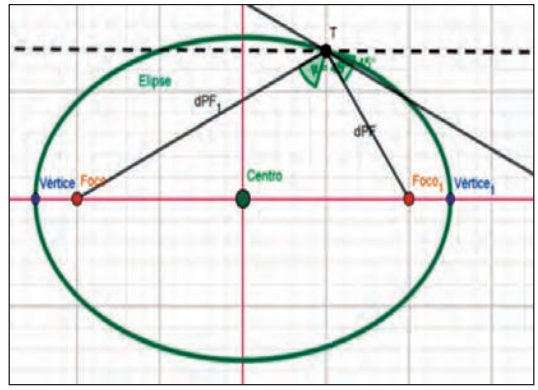
5. Propiedades de la elipse

5.1. Propiedad reflectora de una elipse

La tangente a una elipse en un punto T forma ángulos iguales con los radios focales en este punto. La aplicación de esta propiedad es la siguiente: si se tienen superficies reflectoras elípticas, las ondas sonoras y luminosas se reflejan con ángulos de incidencia y de reflexión iguales; es decir, si un rayo de luz u onda sonora parte de uno de los focos y toca superficies elípticas, se reflejará en el otro foco. Esta propiedad es la base del fenómeno de la Galería de los murmullos, que consiste en que la conversación de dos personas que se encuentran cerca de un foco de un salón, con forma semielipsoide, pueden ser escuchadas por otra persona que se encuentra en el otro foco y aún cuando la conversación no fuese escuchada por otras personas en el mismo salón.


Galería de los murmullos

$$\tan\alpha = \tan\beta \iff \alpha = \beta$$



5.2. Propiedad de la normal a una elipse

La normal a una elipse en un punto T de la misma, es bisectriz del ángulo interior que forman los radios vectores T.

5.3. Propiedad de la tangente y el semieje menor

El producto de las distancias de los focos de una elipse a una tangente cualquiera a la curva es constante e igual al cuadrado del semieje menor.

$$\therefore \mathbf{d_1 \cdot d_2 = \frac{b^2(m^2+1)}{m_2+1} = b^2}$$

5.4. Propiedad de la construcción geométrica de la tangente a una elipse, dado el punto T(x_0 ; y_0) de la curva

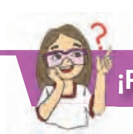
Cuando una elipse está en su forma canónica nos permite ver que la relación es la misma cualquiera que sea la posición de sus ejes mayor y menor. Esta propiedad intrínseca describe la forma de la elipse sin referirse a los ejes coordenadas. Únase P con T y se tendrá la tangente pedida. La tangente a la elipse en T es:

$$\mathbf{\frac{x_0x}{a^2} + \frac{y_0y}{b^2} = 1}$$

5.5. Propiedad intrínseca de la elipse

Construyase la circunferencia principal de centro O y radio a (semieje mayor de la elipse). Prolónguese la ordenada de T hasta T_1. Por T_1 construya una tangente a la circunferencia que cortará al eje mayor de la elipse en P. Por consiguiente, se puede emplear para hallar la ecuación de la curva en cualquier posición.

$$\frac{x'^2}{\mathbf{a^2}} + \frac{y'^2}{\mathbf{b^2}} = \mathbf{1}$$



¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 35. Reflexionamos sobre la importancia de conocer los elementos de la elipse para entender cómo funcionan los recorridos de las órbitas de los planetas y cometas alrededor del Sol y también en la construcción de piscinas, puentes, mesas de billar, marco de fotografías u otros que tengan formas elípticas.

1) En tu contexto, ¿dónde ves la aplicación de la elipse?
2) Menciona la aplicación de la elipse en la medicina.
3) ¿Cómo puedes aplicar el método del albañil en la construcción?
4) La Tierra describe una órbita elíptica al girar alrededor del Sol, ocupando este la posición de uno de los focos. Si se sabe que el eje mayor de la elipse descrita mide $2{,}97 \times 10^8$ km y tiene excentricidad e=1/62, ¿cómo hallamos la máxima y la mínima distancia de la Tierra al Sol?
5) ¿Qué sucede cuando la Tierra se aleja del Sol?
6) ¿Qué sucede cuando la Tierra se acerca el Sol?
7) En una mesa de billar de forma elíptica. ¿Qué sucede con la bola de billar si empiezas jugando en un punto del foco?

Noticiencia

Piscina elíptica

8) Si estás dentro de un techo elíptico, ¿si te paras en el segundo foco puedes escuchar lo que hablan las personas en el otro foco y el resto de las personas que están a tu alrededor no lo pueden hacer?

¡Es hora de la PRODUCCIÓN!

Noticiencia

Mesa de billar en forma elíptica

Actividad 36.

1. Realizamos el método del albañil para la construcción de una piscina elíptica en el patio de la unidad educativa o en tu casa de acuerdo al tamaño de espacio que designes e identificamos los elementos de la elipse.
2. Encuadramos una foto con un marco con forma elíptica.
3. Con materiales del contexto construimos una mesa de billar elíptica e identificamos las propiedades de las elipse.

LA HIPÉRBOLA APLICADA A LA CIENCIA Y TECNOLOGÍA

¡Iniciemos desde la PRÁCTICA!

Luciana y Lucas vieron las fotografías del cometa Neowise cuando pasó por territorio boliviano. Estas fotografías fueron sacadas por el Observatorio Astronómico Nacional de Tarija, es llamó la atención el tiempo transcurrido desde el último paso del cometa y les permitió ver que, en el espacio sideral, los cometas pasan alrededor de una estrella, en este caso el Sol, son atraídos por su campo gravitacional describiendo una curva hiperbólica para luego alejarse.

Actividad 37. Respondemos las siguientes preguntas.

1. ¿Qué sucede cuando los cometas pasan alrededor del Sol?
2. ¿Qué cometa se acerca más al Sol?
3. ¿Por qué solamente se pueden ver los cometas cuando pasan cerca del Sol?
4. ¿Cuántos observatorios hay en Bolivia y en qué ciudad se encuentran?

Realicemos la siguiente práctica

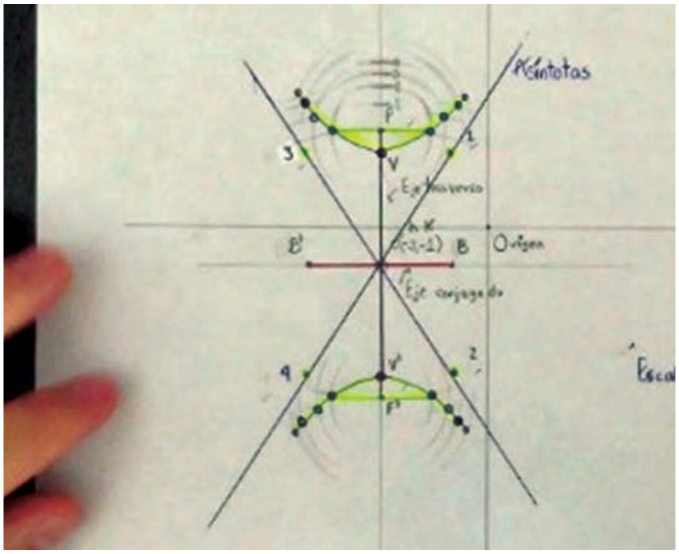
Colocamos una lámpara paralela a la pared, el reflejo de su luz forma en la pared una perfecta hipérbola. Nosotros graficaremos esa figura a través del uso del compás.

Lámpara en la pared

Cometa Neowise

Materiales:

- Una cartulina tamaño oficio.
- Compás.
- Colores / marcadores.
- Estuche geométrico.



¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Definición

Una hipérbola es el conjunto H de todos los puntos del plano colocados de tal forma que la diferencia de cada una de sus distancias a dos puntos fijos, llamados focos, es constante. Si denotamos la diferencia constante por 2a, tenemos que:

$P \in H \leftrightarrow |\overline{PF_2}| - |\overline{PF_1}| = 2a$. El segmento $|\overline{V_1V_2}| = 2a$, se denomina **eje transverso** o **eje focal**, y el segmento $|\overline{B_1B_2}| = 2b$, es el *eje conjugado o eje normal* de la hipérbola. La distancia entre los focos, o sea $|\overline{F_1F_2}| = 2c$, se denomina *distancia focal.*

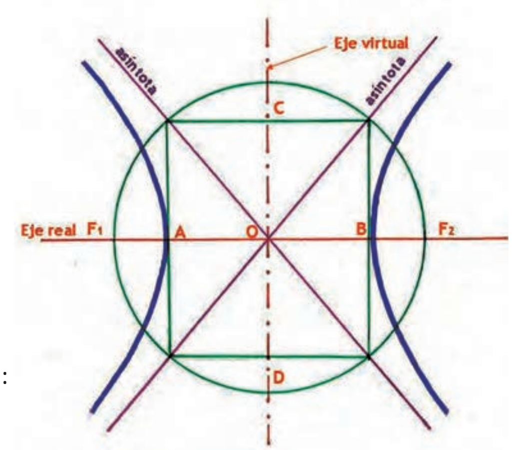


Figura 1: Hipérbola

2. Elementos de la hipérbola

Mencionaremos los siguientes elementos fundamentales de la hipérbola:

1. Focos: son los puntos fijos F_1 y F_2.
2. Eje focal, principal o real: es la recta que pasa por los focos.
3. Eje secundario o imaginario: es la mediatriz del segmento F_1 y F_2 .
4. Centro: es el punto de intersección de los ejes.
5. Vértices: V_1 y V_2 son los puntos de intersección de la hipérbola con el eje focal.
6. Radios vectores: son los segmentos que van desde un punto de la hipérbola a los focos: PF_1 y PF_2.
7. Distancia focal: es el segmento $\overline{\mathbf{F_1F_2}}$ de longitud 2c.
8. Eje mayor: es el segmento $\overline{\mathbf{V_1}\boldsymbol{V_2}}$ de longitud 2a.
9. Eje menor: es el segmento $\overline{\mathbf{B_1B_2}}$ de longitud 2b.
10. Ejes de simetría: son las rectas que contienen al eje real o al eje imaginario.
11. Asíntotas: son las rectas oblicuas.
12. Relación entre los semiejes: $\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

2.1. La hipérbola con origen focal paralelo al eje X

1) Centro: C (h; k)
2) Vértice: V_1 (h + a; k) y V_2 (h - a; k)
3) Foco: F_1 (h + c; k) y F_2 (h - c; k)
4) Extremos del eje menor: (normal)
   B_1 (h; k + b), B_2 (h; k – b)
5) Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
6) Excentricidad: $e = \frac{c}{a}$ $(e > 1)$
7) Extremos de los lados rectos:
   L_1 (h + c; k + $\frac{b^2}{a}$) , R_1 (h + c; k - $\frac{b^2}{a}$)
   L_2 (h - c; k + $\frac{b^2}{a}$) , R_2 (h – c; k - $\frac{b^2}{a}$)
8) Ecuaciones de las directrices: $x = h \pm \frac{a}{e}$
9) Distancia entre las directrices L_1 y L_2: $d = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$
10) Asíntotas: $y - k = \pm\frac{b}{a}(x - h)$
11) Radios vectores para un punto P (x_1; y_1) de la Hipérbola: r_1 = l ex_1 – al (Foco derecho) y r_2 = l ex_1 + al (Foco izquierdo)

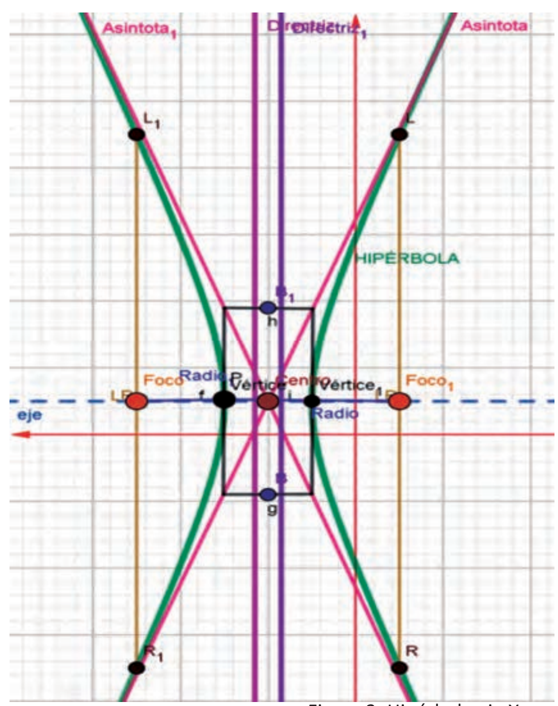


Figura 2: Hipérbola eje X

2.2. La hipérbola con origen focal paralelo al eje Y

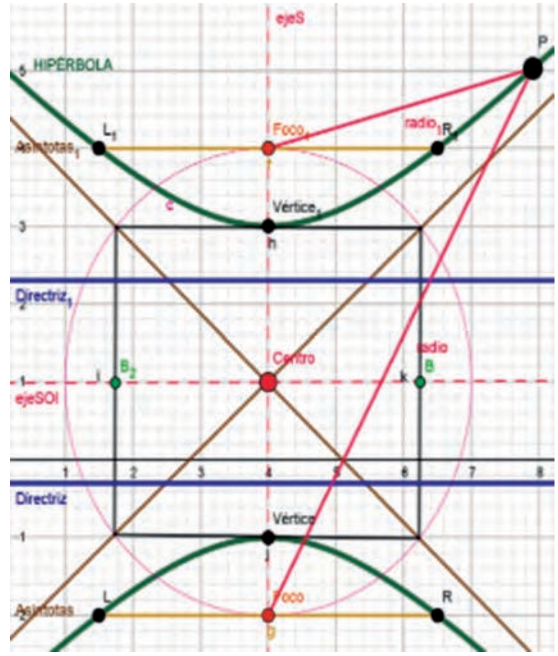


Figura 3: Hipérbola eje Y

1) Centro: C (h; k)
2) Vértices: V_1 (h; k + a), V_2 (h; k– a)
3) Focos: F_1 (h; k + c), F_2 (h; k – c)
4) Extremos del eje menor:
 B_1 (h + b; k), B_2 (h – b; k)
5) Lado recto: $LR = \frac{2b^2}{a}$
6) Excentricidad: $e = \frac{c}{a} (e > 1)$
7) Extremos de los lados rectos:
 $L_1 (h + \frac{b^2}{a}; k + c)$, $R_1 (h - \frac{b^2}{a}; k + c)$
 $L_2 (h + \frac{b^2}{a}; k - c)$, $R_2 (h - \frac{b^2}{a}; k - c)$
8) Ecuaciones de las directrices: $y = k \pm \frac{a}{e}$
9) Distancia entre las directrices L_1 y L_2: $d = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e}$
10) Asíntotas: $y - k = \pm\frac{a}{b}(x - h)$
11) Radios vectores para un punto P $(x_1; y_1)$ de la Hipérbola:
 $r_1 = | ey_1 - a|$ (Foco superior) y
 $r_2 = | ey_1 + a|$ (Foco inferior)

3. Ecuaciones de la hipérbola

Ahora veremos las ecuaciones de una hipérbola en su forma más simple, esto es, cuando su centro está en el origen y su eje transverso coincide con uno de los ejes coordenados.

3.1. Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje transverso coincidente con el eje X

Esta primera forma canónica de la ecuación de la hipérbola se denomina, también hipérbola horizontal con centro en el origen.

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

3.2.Ecuación de la hipérbola con centro en el origen y eje transverso coincidente con el eje Y

Esta segunda forma canónica de la ecuación es llamada hipérbola vertical con centro en el origen. Las ecuaciones a y b reciben el nombre de formas canónicas ordinarias de la ecuación de una hipérbola.

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

3.3. Ecuación de la hipérbola con origen eje focal paralelo al eje X

Si trasladamos el sistema de coordenadas XY al sistema X'Y' de tal forma que el nuevo origen O' coincida con el centro C (h; k), obtenemos una hipérbola con centro en O' cuya ecuación es:

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$

3.4. Ecuación de la hipérbola con origen eje focal paralelo al eje Y

Las ecuaciones c y d reciben el nombre de formas canónicas ordinarias de la ecuación de una hipérbola.

$$\frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$$

3.5. Ecuación general de una hipérbola en posición ordinaria

Una ecuación de segundo grado que carece del término XY, de la forma: $\mathbf{Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0}$

donde: $t = -F + \frac{D^2}{4A} + \frac{E^2}{4C} \quad \rightarrow \quad \frac{\left(x+\frac{D}{2A}\right)^2}{t/_A} - \frac{\left(y+\frac{E}{2C}\right)^2}{t/_C} = 1$

Entonces podemos afirmar que:
Si t > 0, la ecuación representa una hipérbola con eje real o transverso coincidente o paralelo al eje X.
Si t = 0, la ecuación representa dos rectas concurrentes.
Si t < 0, la ecuación representa una hipérbola con eje real o transverso coincidente o paralelo al eje Y.

Ejemplo 1.

Determinamos si la gráfica de las ecuaciones dadas es una hipérbola o un par de rectas concurrentes. Si es una hipérbola construir su gráfica y hallar sus elementos.

a) $\mathbf{9x^2 - 4y^2 - 54x - 16y + 65 = 0}$

$$9(x^2 - 6x + 9) - 4(y^2 + 4y + 4) = -65 + 81 - 16$$
$$9(x-3)^2 - 4(y+2)^2 = 0$$

Como $t = 0$

∴ la ecuación representa dos rectas concurrentes

Esto es: $(y+2)^2 = \frac{9}{4}(x-3)^2$

$\mathbf{L_1: 3x - 2y - 13 = 0}$

$\mathbf{L_2: 3x + 2y - 5 = 0}$

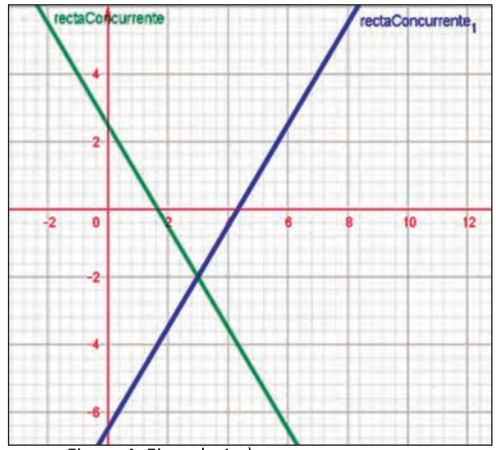


Figura 4: Ejemplo 1 a)

b) $\mathbf{16x^2 - 9y^2 + 96x + 36y + 252 = 0}$

$$16(x^2 + 6x + 9) - 9(y^2 - 4y + 4) = -252 + 144 - 36$$
$$16(x+3)^2 - 9(y-2)^2 = -144$$
$$9(y-2)^2 - 16(x+3)^2 = 144$$
$$\varepsilon: \frac{(y-2)^2}{16} - \frac{(x+3)^2}{9} = 1$$

Elementos de la hipérbola:

1) $C(-3,2)$
2) $V_1(-3;6)$, $V_2(-3;-2)$
3) $F_1(-3;7)$, $F_2(-3;-3)$
4) $B_1(0;2)$, $B_2(-6;2)$
5) $LR = 4.5$
6) $e = 1.250$
7) $L_1(-0.750;7)$, $R_1(-5.250;7)$
 $L_2(-0.750;-3)$, $R_2(-5.250;-3)$
8) $y = 5.2$, $y = -1.2$
9) $d_{L_1 \to L_2} = 6.4$
10) $y - 2 = \pm\frac{4}{3}(x+3)$
 $L_1: 4x - 3y + 18 = 0$
11) $L_2: 4x + 3y + 6 = 0$
12) $r_1 = |1.250y_1 - 4|$, $r_2 = |1.250y_1 + 4|$

$\mathbf{h = -3,\ k = 2}$

Relación de distancia

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

$\mathbf{c^2 = 16 + 9}$

$\mathbf{c = \sqrt{25}}$

$\mathbf{c = 5}$

$\mathbf{a = 4,\ b = 3}$

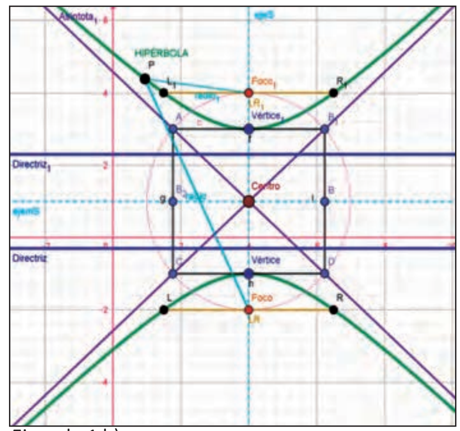


Figura 5: Ejemplo 1 b)

Ejemplo 2. Identificamos los valores de “a” y “b” de la siguiente hipérbola y encuentra su ecuación.

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$
$$\frac{(x-7)^2}{4^2} - \frac{(y-6)^2}{3^2} = 1$$
$$\varepsilon: \frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y-6)^2}{9} = 1$$

$$\frac{(x-7)^2}{16} - \frac{(y-6)^2}{9} = 1 \quad // (144)$$
$$9(x-7)^2 - 16(y-6)^2 = 144$$
$$9(x^2 - 14x + 49) - 16(y^2 - 12y + 36) - 144 = 0$$
$$9x^2 - 126x + 441 - 16y^2 + 192y - 576 - 144 = 0$$
$$\varepsilon: 9x^2 - 16y^2 - 126x + 192y - 279 = 0$$

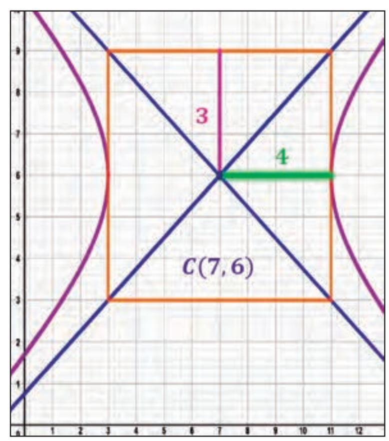


Figura 6: Ejemplo 2

Ejemplo 3. Dada la ecuación de la hipérbola $\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{16} = 1$, hallamos su ecuación en la forma general.

$$\frac{\overbrace{144}^{4} * x^2}{\underbrace{36}_{1}} - \frac{\overbrace{144}^{9} * y^2}{\underbrace{16}_{1}} = 144 * 1$$
$$4x^2 - 9y^2 = 144$$
$$\varepsilon: 4x^2 - 9y^2 - 144 = 0$$

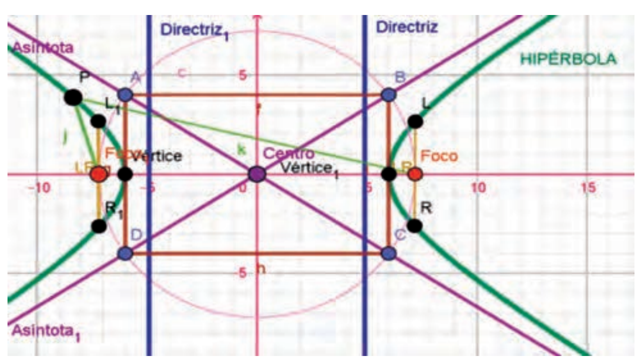


Figura 7: Ejemplo 3

Ejemplo 4. Hallamos la ecuación de la hipérbola cuyos focos son F_1 (7; - 5) y F_2 (- 3: - 5), y un extremo del eje conjugado es B (2; -3).

$$\frac{(x-h)^2}{a^2}-\frac{(y-k)^2}{b^2}=1$$

$2c = d(\overline{F_1F_2})$

$2c=\sqrt{(-3-7)^2+(-5+5)^2}$

$2c=\sqrt{100}$

$2c = 10$

$c = 5$

$C(h, k)$ Es punto medio del segmento.

$\overline{F_1F_2} \Rightarrow C(2,-5)$

$b = d(\overline{CB})$

$b=\sqrt{(2-2)^2+(-3+5)^2}$

$b=\sqrt{4}$

$b = 2$

Relación de distancia

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

$25 = a^2 + 4$

$a^2 = 25 - 4$

$a^2 = 21$

∴ La ecuación ordinaria de la hipérbola es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \frac{(x-2)^2}{21}-\frac{(y+5)^2}{4}=1$$

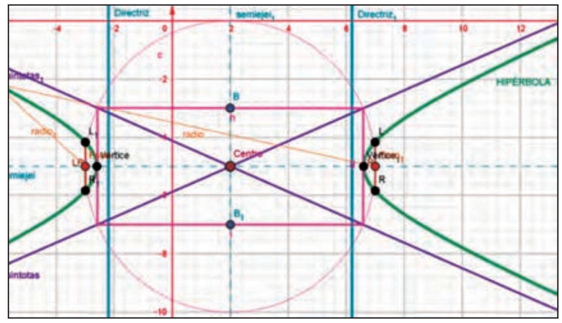


Figura 8: Ejemplo 4

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \frac{84\,(x-2)^2}{21}-\frac{84\,(y+5)^2}{4}=1*84$$

$4(x-2)^2-21(y+5)^2=84$

$4(x^2-4x+4)-21(y^2+10y+25)-84=0$

∴ La ecuación general de la hipérbola es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}:\ \mathbf{4x^2-21y^2-16x-210y-593=0}$$

Ejemplo 5. Los focos de la elipse $25x^2 + 9y^2 = 225$ coinciden con los focos de una hipérbola de excentricidad 4/3. Hallamos la ecuación de la hipérbola.

Ecuación de la elipse

si: $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{25}=1$

$a^2 = 25$, $b^2 = 9$

$a = 5$, $b = 3$

Ecuación de la hipérbola

$\varepsilon: \frac{y^2}{a^2}-\frac{x^2}{b^2}=1$

Se tiene: $F(0, \pm c)$

$\Rightarrow c = 4$

$e=\frac{c}{a} \rightarrow \quad \frac{4}{3}=\frac{4}{a}$

$a = 3$

Luego, la ecuación de la hipérbola es:

$\boldsymbol{\varepsilon}: \frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$

$\frac{63y^2}{9}-\frac{63x^2}{7}=63\cdot 1$

$7y^2-9x^2=63$

Relación de distancia de la elipse

$\mathbf{a^2 = b^2 + c^2}$

$c^2 = 25 - 9$

$c^2 = 16$

$c = 4$

Relación de distancia de la hipérbola

$\mathbf{c^2 = a^2 + b^2}$

$16 = 9 + b^2$

$b^2 = 16 - 9$

$b^2 = 7$

∴ La ecuación general la hipérbola es:

$$\boldsymbol{\varepsilon}: \mathbf{7y^2 - 9x^2 - 63 = 0}$$

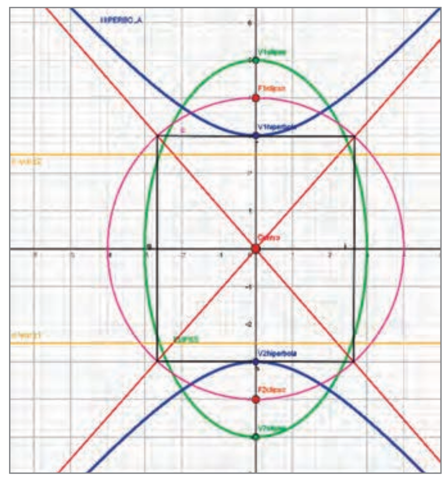
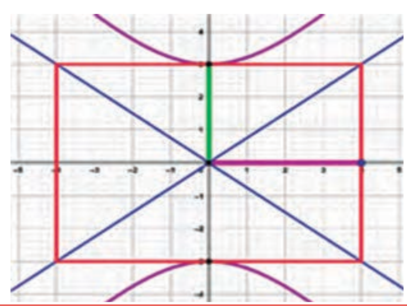


Figura 9: Ejemplo 5

Actividad 38. Determinamos si la gráfica de las ecuaciones dadas es una hipérbola o un par de rectas concurrentes. Si es una hipérbola, construir su gráfica y hallar sus elementos.

1) $9x^2 - 16y^2 - 54x + 64y - 127 = 0$
2) $9x^2 - 4y^2 - 36x - 16y + 20 = 0$
3) $x^2 - 4y^2 - 6x + 9 = 0$
4) $16x^2 - 9y^2 + 32x + 72y - 704 = 0$

Actividad 39. Identificamos los valores de "a" y "b" de la siguiente hipérbola y encuentra su ecuación.



Actividad 40. Dada la ecuación de la hipérbola:

$$\frac{(x-7)^2}{64}-\frac{(y-6)^2}{36}=1,$$

Calcula su ecuación en la forma general.

Actividad 41. Hallamos la ecuación de la hipérbola cuyos focos están en los vértices de la elipse $\varepsilon: 16x^2+25y^2=1.600$ y las directrices pasan por los focos de la elipse.

4. Ecuaciones tangentes a una hipérbola

Como la ecuación de una hipérbola es de segundo grado, sus tangentes pueden obtenerse empleando la condición de tangencia (método optativo) o el método para hallar la ecuación de la tangente a una elipse (tangentes al origen).

Empecemos entonces a determinar sus ecuaciones considerando los tres problemas de tangencia estudiados para la parábola y la elipse.

4.1. Ecuación de la tangente en un punto de contacto dado

Hipérbola	Tangente
$\varepsilon: \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$	$\varepsilon: \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1:$
$\varepsilon: \frac{(x-h)^2}{a^2} - \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$	$\varepsilon: \frac{(x_0-h)(x-h)}{a^2} - \frac{(y_0-h)(y-h)}{b^2} = 1$
$\varepsilon: \frac{(y-k)^2}{a^2} - \frac{(x-h)^2}{b^2} = 1$	$\varepsilon: \frac{(y_0-h)(x-k)}{a^2} - \frac{(x_0-h)(x-h)}{b^2} = 1$
$\varepsilon: Ax^2 - Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$	$\varepsilon: Ax_0x - Cy_0y + \frac{D}{2}(x_0 + x) + \frac{E}{2}(y_0 + y) + F = 0$

Ejemplo 6. Calculemos y grafiquemos la ecuación de la tangente y normal a la hipérbola ε:x²-3y²=9 en el punto T(-6;3).

$\varepsilon: \frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

Dónde:

$a^2 = 9 \quad , \quad b^2 = 3$

$x_0 = -6 \ , \ \ y_0 = 3$

Como $T \in \varepsilon$

<u>Ecuación de la tangente en un punto de contacto</u>

$\boldsymbol{\varepsilon: \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1}$

Sustituimos:

$\varepsilon: \frac{-6x}{9} - \frac{3y}{3} = 1$

$-\frac{2}{3}x - y = 1 \ \ \text{multiplicamos}(-3)$

$2x + 3y = -3$

$\therefore \mathbf{L_T: 2x + 3y + 3 = 0}$

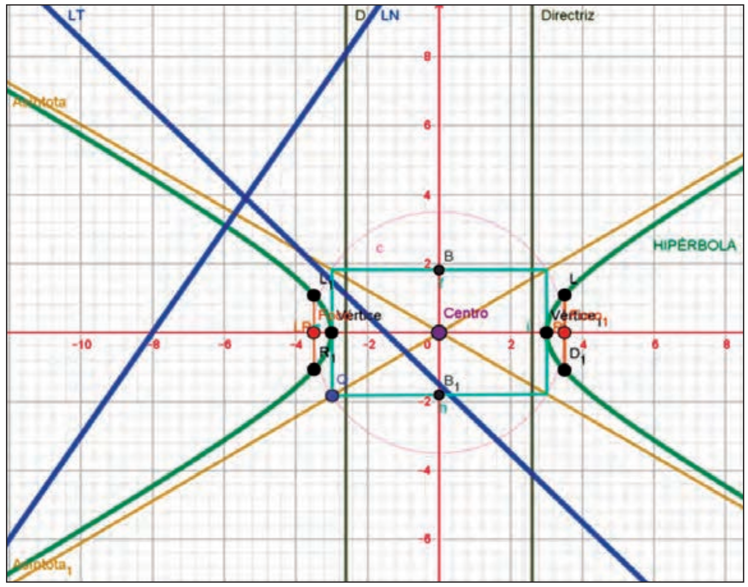


Figura 10: Ejemplo 6

<u>Ecuación de la normal</u>:

$\mathbf{y - x_1 = m(x - y_1)}$

$y - 3 = \frac{3}{2}(x + 6) \ \ \text{multiplicamos}(2)$

$2y - 6 = 3x + 18$

$\therefore \ \ \mathbf{L_N = 3x - 2y + 24 = 0}$

Actividad 42.

> Halla y grafica la ecuación de la tangente y normal a la hipérbola
>
> $\mathbf{\varepsilon: 3x^2 - y^2 - 12x + 2y = 0}$ en el punto T(4; 2).

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 43. Investiguemos sobre el Observatorio Astronómico Nacional de Tarija y respondemos las siguientes preguntas.

1) ¿Qué observatorios astronómicos existen en Bolivia?
2) ¿Dónde está el mayor observatorio astronómico del mundo?
3) ¿Cómo se realiza el astro turismo en Bolivia?
4) ¿Dónde se pueden ver las estrellas en Bolivia?

En tu contexto, ¿qué aplicaciones tiene la hipérbola en la vida cotidiana?

¡Es hora de la PRODUCCIÓN!

Actividad 44. Realizamos las siguientes actividades:

1) Construimos un reloj solar similar al de la Casa de Moneda de la ciudad de Potosí, con una determinada latitud y altitud. Y así ver el comportamiento de la curva hiperbólica.

2) Cuando los científicos lanzan un satélite al espacio, los sistemas de satélites hacen uso de las hipérbolas y las funciones hiperbólicas, investiga como.

TEORÍA DE CONJUNTOS EN SITUACIONES CONCRETAS DE LA COMUNIDAD

¡Iniciemos desde la PRÁCTICA!

La trata y tráfico de menores son delitos de los cuales muchos niños y niñas son víctimas y no lo saben. Julia tiene 45 años, sus padres la entregaron a una familia cuando tenía 4 años, no contaba con certificado de nacimiento, no recibía pago alguno por los servicios prestados y no accedió a una educación libre y gratuita.

Trata y tráfico de menores

- Niños en las Fuerzas Armadas
- En el tráfico de drogas
- Adopción ilegal
- Mendicidad forzada
- Explotación sexual
- Casamiento forzado
- Venta de niños
- Venta de órganos
- Trabajo forzado
- Pornografía
- Desnaturalización de la identidad

A sus 10 años le pedían “llevar harina” de un lugar a otro, en el transcurso debía esquivar el control policial escondiéndose en camiones y en muchas ocasiones caminaba bajo la lluvia en plena carretera. A sus 13 años escapó del lugar y llegó a la ciudad, comenzó vendiendo dulces en las ferias; gracias al contacto con las vendedoras se dio cuenta que podía estudiar y conseguir el bachillerato, así consiguió terminar el colegio.

No se rindió ante las adversidades, actualmente es juez de familia, de la niñez y adolescencia. Nos cuenta que fue víctima de una intersección de delitos y que su preocupación es que existen muchos niños y niñas pasan por el mismo problema o peores.

Actividad 45. Respondamos las siguientes preguntas:

¿Cómo ayudan los conjuntos a entender la realidad que viven las personas? ¿Cómo tomar decisiones frente a problemáticas como la de Julia?

¿Qué otros conjuntos de problemas se presentan en la realidad que existen en las calles? ¿Qué tan importante es conocer los conjuntos para entender la realidad?

Estas situaciones describen intersecciones, uniones y otras operaciones entre conjuntos que son importantes reconocerlas y estudiarlas matemáticamente para dar solución a problemas de esta índole.

¡Continuemos con la TEORÍA!

1. Definición

El álgebra de conjuntos es un área de estudio dentro de las matemáticas y la lógica, enfocada en las operaciones que pueden efectuarse entre los conjuntos.

2. Agrupamiento de elementos

El agrupamiento de elementos consiste en la repartición de un total de elementos entre un número definido de grupos, generalmente del mismo tamaño, de tal manera que se satisfaga una cierta condición. El álgebra de conjuntos forma parte de la teoría de conjuntos. Cabe recordar que un conjunto es la agrupación de elementos de distinta índole, como pueden ser letras, números, símbolos, funciones, figuras geométricas, entre otros.

3. Notación de conjuntos numéricos

Un conjunto o colección está formado por unos elementos de la misma naturaleza; es decir, elementos diferenciados entre sí pero que poseen en común ciertas propiedades o características y que pueden tener ciertas relaciones entre ellos o con los elementos de otros conjuntos.

Un conjunto puede tener un número finito o infinito de elementos, en matemáticas es común denotar a los elementos mediante letras minúsculas y a los conjuntos por letras mayúsculas. Se usan corchetes para representar y definir conjuntos. En el interior de los corchetes se ubican los elementos que conforman el conjunto, separados por comas o puntos y comas. Esta representación escrita es equivalente a la representación gráfica de diagramas de Venn. Así por ejemplo: C={a,b,c,d,e,f,g,h}.

4. Determinación de conjuntos por extensión y comprensión

Un conjunto se determina por extensión cuando se enumera, mientras un conjunto se determina por comprensión, cuando se da una propiedad que cumplen todos los elementos del conjunto.

4.1. Método por extensión

Se define un conjunto por extensión cuando se enumeran todos y cada uno de los elementos que lo constituyen. Un conjunto está determinado por la extensión, si y solo si se nombra todos los elementos que lo constituyen, por ejemplo: A = {1,2,3,4,5,6.}

4.2. Método por comprensión

Se define un conjunto por comprensión cuando se enuncia una propiedad común que caracteriza a los elementos de dicho conjunto. Un conjunto está determinado por comprensión, si y solo sí se dan las propiedades que caracterizan a los elementos del conjunto.

Ejemplo 1. Determinamos el conjunto A por comprensión y por extensión.

Por comprensión

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in /\mathrm{N} < 7\}$

Por extensión

$\mathrm{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Ejemplo 2.

Determinamos el conjunto A por comprensión y por extensión :

Por comprensión

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in /3 \leq \mathrm{x} < 8\}$

Por extensión

$\mathrm{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

Actividad 46.

Determinamos los conjuntos por extensión:

$\mathrm{A} = \{\mathrm{x} \in Z/\mathrm{x}^2 = 4\mathrm{x}\}$

$\mathrm{C} = \{\mathrm{x} \in Z/(x+1)^2 = 4\}$

$\mathrm{C} = \{\mathrm{x} \in N/(x+1)^2 = 4\}$

$\mathrm{C} = \left\{\mathrm{x} \in \mathbb{R}/\sqrt{4-3x} + 3 = 2\mathrm{x}\right\}$

5. Conjuntos especiales: unitario, vacío, universal

Se llama conjuntos especiales a aquellos conjuntos que se caracterizan por el número de elementos; entre ellos tenemos los conjuntos: Unitario, Vacío y Universal.

5.1. Conjunto unitario

Es aquel que tiene un solo elemento. A continuación, vemos un ejemplo. **Ejemplo:** A = $\{x \in N/x^2 = 16\}$ ⇒ A = $\{4\}$

5.2. Conjunto vacío

Es aquel que no tiene elementos, es subconjunto de todo conjunto. Se le representa por: $\{1\}$ y se denota por el símbolo: ∅. Es decir: $\{x/x \;\; ; \neq x\} = \{1\} = \emptyset$. A continuación, vemos un **ejemplo:** $\{x/x \;\; \in \mathbb{N}; 9 < x < 10\} = \{1\}$

5.3. Conjunto Uuiversal “U = Ω”

Es un conjunto referencial que contiene a todos los conjuntos considerados y se le denota generalmente por “U”. A continuación, vemos un ejemplo donde denotamos la “U” para los siguientes conjuntos:

6. Relación entre conjuntos

Las relaciones de conjuntos suceden cuando existen ciertos conjuntos que tiene algo en común y que cumple una propiedad específica en común. La relación de conjuntos no es más que una comparación entre conjuntos según las cualidades que le asignemos, si es que existen. A continuación, vemos su clasificación por inclusión, no inclusión y por igualdad de conjuntos.

Inclusión

En la inclusión de conjunto, un determinado conjunto A está dentro de otro conjunto B; por lo tanto, A es un subconjunto de B o A está incluido en B. A continuación, veamos un ejemplo de inclusión de conjuntos:

Ejemplo: A = $\{1, 2, 3\}$ B = $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ Se dice A ⊂ B

Sea A y B dos conjuntos; se dice que A está incluido en B o A es un subconjunto de B si todos los elementos del conjunto A pertenecen al conjunto B, se denota A ⊂ B , y se lee A esta incluido en B, B incluye a A es subconjunto de B. A ⊂ B ↔ $\forall x : x \in A \rightarrow x \in B$

No inclusión

La no inclusión se da cuando el conjunto A no está contenido en B; o no es un subconjunto de B. A continuación, veamos un ejemplo de No inclusión de conjuntos:

Ejemplo: A = $\{2; 4; 6; 8\}$ B = $\{0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$ Se dice $B \not\subset A$. Sea A y B dos conjuntos, se dice que A no está incluido en B o que A no pertenece al conjunto B, se denota A ⊄ B y se lee A no está incluido en B; B no incluye A o bien A no es subconjunto de B.
A ⊄ B ↔ $\exists x : x \in / A \leftrightarrow x \in B$

Igualdad de conjuntos

La igualdad de conjuntos es dada por dos conjuntos cualesquiera, A y B, que son iguales y lo anotaremos como A=B. A continuación, veamos un ejemplo de igualdad de conjuntos:

Ejemplo: A = $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7\}$ B = $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7, \}$ Se dice $A = B$. Los dos conjuntos, A y B, son iguales.

Si A ⊂ B y B ⊂ A, ambos conjuntos están formados por los mismos elementos. A = B ↔ $\forall X : x \in / A \wedge x \in B$

Actividad 47.

Indicamos en los siguientes incisos la inclusión ⊂ o la No inclusión ⊄ de los siguientes conjuntos:

$A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$B = \{1; 4; 5; 7\}$

$C = \{2; 4; 6\}$

$D = \{1; 5\}$

a) C.........A
b) B.........D
c) C.........D
d) E.........D
e) A.........C
f) D.........A

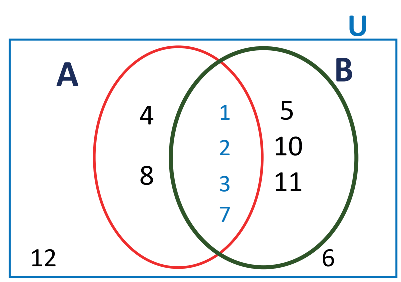
7. Operaciones entre conjuntos

La unión entre los conjuntos A y B es un conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A o B. se denota. A U B = $\{x/x\ A\ v\ x \in B\}$. A continuación, veamos un ejemplo de unión de conjuntos.

7.1. Unión de conjuntos

Las operaciones con conjuntos nos permiten obtener otro conjunto. De ellas veremos las siguientes: unión, intersección, complemento de conjuntos y diferencia de conjuntos.

Ejemplo 2:
U = $\{x/x \in N < 13\}$
A = $\{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$
B = $\{1; 2; 3; 5; 7,10; 11\}$
A U B = $\{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$



7.2. Intersección de conjuntos

La intersección entre dos conjuntos (A, B) es un nuevo conjunto integrado por todos los elementos que pertenecen tanto al conjunto A y como al conjunto B. A ∩ B = $\{x/x \in A \wedge x \in B\}$. A continuación, veamos un ejemplo de intersección de conjuntos.

Ejemplo 3: del Ejemplo 2 (Diagrama de Venn)
U = $\{x/x \in N < 13\}$
A = $\{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$ B = $\{1; 2; 3; 5; 7,10; 11\}$
A ∩ B = $\{1; 2; 3; 7\}$

Actividad 48.

Hallamos la unión e intersección de los siguientes conjuntos (Diagrama de Venn):

$A \cup B = \{x/x \in A \vee x \in B\}$, $A = \{1; 2; 3\}$ $B = \{7; 8; 9\}$

También el complemento del conjunto si:

U= $\{x/x \in N < 10\}$

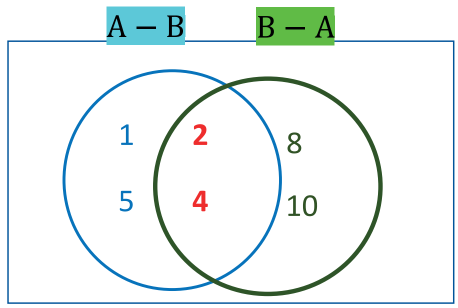
7.3. Complemento de un conjunto

El complemento de un conjunto ($\mathbf{A}^{C}$)es un nuevo conjunto formado por todos los elementos del universo que no pertenecen al conjunto original A. Ahora veamos un ejemplo de complemento de un conjunto.

Ejemplo 4: del ejemplo 2 (Diagrama de Venn)

7.4. Diferencia de conjuntos

La diferencia de conjuntos A – B (A menos B) es un conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a A y no pertenecen a B. A continuación, veamos ejemplos.



Ejemplo 5:

$A - B = \{x/x \in A \ \wedge x \notin B\}$

Sean: $A = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ $\quad B = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$A - B = \{1; 3; 5\}$ $\quad B - A = \{8; 10\}$

Ejemplo 6

Hallar la unión e intersección e indicar la inclusión si A ⊂ B o la No inclusión ⊄ de los siguientes conjuntos (Diagrama de Venn):

$A \cup B = \{x/x \ \in A \ \vee x \in B\}$

$A = \{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$

$B = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$

También el complemento del conjunto si:

Ejemplo 7

$U = \{x/x \ \in N < \ 13\}$

<u>Unión de conjuntos</u>

$AUB = \{1; 2; 3; 4; 5; 7; 8; 10; 11\}$

<u>Intersección de conjuntos</u>

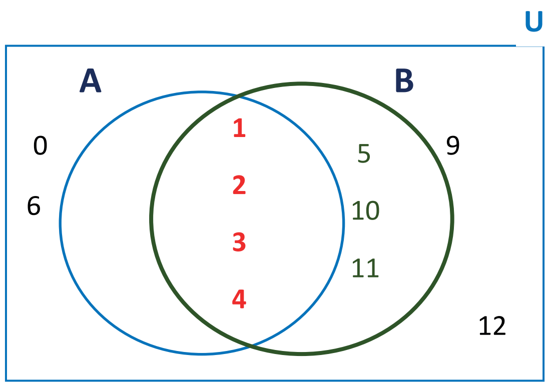
$A \cap B = \{1; 2; 3; 4; 7; 8\}$

<u>Complemento de conjuntos</u>

$U^{c} = \{0; 6; 9; 12\}$

<u>Inclusión</u>

$A \subset B = \{\text{VERDADERO}\}$



8. Leyes de operaciones con conjuntos

NOMBRE	INTERSECCIÓN	UNIÓN
IDEMPOTENCIA	$A \cap A = A$	$A \cup A = A$
ASOCIATIVA	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$	$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
CONMUTATIVA	$A \cap B = B \cap A$	$A \cup B = B \cup A$
IDENTIDAD	$A \cap A = \emptyset$	$A \cup A = \emptyset$
COMPLEMENTO	$A \cap \hat{A} = \emptyset$, $A \cap U = A$, $\emptyset = U$	$A \cap \hat{A} = U$, $U = \emptyset$
DE MORGAN	$(A \cap B) = (\hat{A} \cup \hat{B})$	$(A \cup B) = (\hat{A} \cap \hat{B})$
SIMPLIFICACIÓN	$\mathbf{A} \cap (\mathbf{B} \cup \mathbf{A}) = \mathbf{A}$	$\mathbf{A} \cup (\mathbf{B} \cap \mathbf{A}) = \mathbf{A}$
INVOLUTIVA	$\hat{A} = A$	
DIFERENCIA RELATIVA	$A - B = A \cap \hat{B}$, $A - B = \hat{B} - \hat{A}$	

9. Cardinalidad y problemas

Como ya hemos estudiado antes, los conjuntos finitos son los que tienen "unos pocos" elementos, más concretamente, son tales que podemos contar los elementos que tiene. El cardinal de un conjunto finito A es el número de elementos que tiene dicho conjunto. A ese número lo denotaremos por | A |.

No es difícil llegar a que, si tenemos dos conjuntos A y B, entonces: |AUB|=|A|+|B|-|A∩B|

A Δ B = (A – B) U (B – A). Veamos un ejemplo:

U = $\{x/x \in N < 14\}$

A = $\{2, 3, 4, 5, 7, 9, 10\}$

B = $\{1, 2, 4, 6, 10\}$

A – B = $\{3, 5, 7, 9\}$ B – A = $\{1, 6\}$

10. Aplicación de la teoría de conjuntos en problemas cotidianos

La idea de agrupar objetos de la misma naturaleza para clasificarlos en “colecciones” o “conjuntos” es parte de la vida diaria de los seres humanos. Por ejemplo, el conjunto de libros de una biblioteca, el conjunto de árboles en un terreno, el conjunto de zapatos en un negocio de venta al público, el conjunto de utensilios en una cocina, etc. En todos estos ejemplos, se utiliza la palabra conjunto como una colección de objetos.

¡Realicemos la valoración!

Actividad 49. Analicemos la historia de Julia, respondemos las preguntas y resalizamos las actividades descritas:
Actualmente el despacho de Julia es muy concurrido por diferentes personas, en alguna ocasión llegó un caso en el que un grupo de tres hermanos describía una situación así:

1. El hermano mayor, de 12 años, era forzado a vender cierto tipo de medicamento con fecha caduca, como si fueran caramelos comunes y no contaba con identificación.
2. La hermana del medio, de 9 años de edad, también era forzada a vender el mismo tipo de “caramelos” y sí contaba con identificación legal.
3. Con ellos estaba un menor de 6 años, el más pequeño, quien pedía limosna en la esquina donde todos se encontraban. Julia se identifica con este caso pues los niños, al igual que ella de niña, se encuentran en una intersección de ciertos conjuntos descritos por los delitos en los que incurren.
4. Según la experiencia contada por Julia, ¿cómo se ven los conjuntos en tu contexto?
5. ¿Qué utilidad y aplicación tiene la teoría de conjuntos en nuestro diario vivir? ¿Por qué?
6. Analicemos en grupos por qué y cómo aplicamos las definiciones y tipos de conjuntos en nuestra unidad educativa.
7. Desde tu percepción, menciona 10 utilidades y aspectos sobresalientes que tiene la aplicación de los conjuntos en la vida.

¡Es hora de la producción!

Actividad 50. Realicemos las siguientes actividades:

1) Un informe sobre las características de los conjuntos vinculados a la trata y tráfico en tu comunidad, barrio o unidad educativa.

2) Elaboremos una propuesta para generar espacios de discusión, reflexión y toma de decisiones, invitando a organizaciones como padres de familias y a algunas autoridades de nuestra comunidad para prevenir los casos de trata y tráfico de menores. Utilicemos:

- Mapas conceptuales
- Estudios estadísticos
- Diagramas de Venn
- Otros

INTRODUCCIÓN AL ANÁLISIS MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Bajo la consigna "ni una menos" se generaron varias movilizaciones, no sólo en nuestro país sino en nuestra región latinoamericana, debido al incremento de la violencia contra la mujer, cuyos índices se elevaron de sobremanera durante los últimos años.

"La violencia contra las mujeres es una violación de derechos humanos, y un problema de salud pública que afecta a todos los niveles de la sociedad en todas las partes del mundo. Desde niñas hasta mujeres mayores, una de cada tres mujeres es golpeada, forzada a tener relaciones sexuales, o abusada de otra manera en su vida. Estudios de la OMS muestran que la violencia por parte de una pareja íntima es la forma más común de violencia contra mujeres en el mundo." (https://www.paho.org/es/temas/violencia-contra-mujer).

La iniquidad de género y la discriminación son las causas raíces de la violencia contra la mujer, influenciada por desequilibrios históricos y estructurales de poder entre mujeres y hombres existentes en variados grados a lo largo de todas las comunidades en el mundo.

Cada uno de nosotros tiene la responsabilidad de evitar la violencia y de denunciarla, si se tiene conocimiento de que ocurre. Revisa los datos de la frecuencia de casos de feminicidio según año y departamento.

Prevención de Violencia contra la mujer Modulo Educativo Angelina Ribera II Santa Cruz - Bolivia

Departamento	2016		2017	
	Frecuencia	Porcentaje	Frecuencia	Porcentaje
Pando	1	1	0	0
Beni	3	3	4	4
Cochabamba	27	25	29	27
La Paz	28	27	28	25
Santa Cruz	21	20	17	15
Chuquisaca	5	5	10	9
Oruro	6	6	8	7
Tarija	5	5	8	7
Potosí	8	8	7	6
TOTAL	104	100	111	100

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Notaciones y definiciones

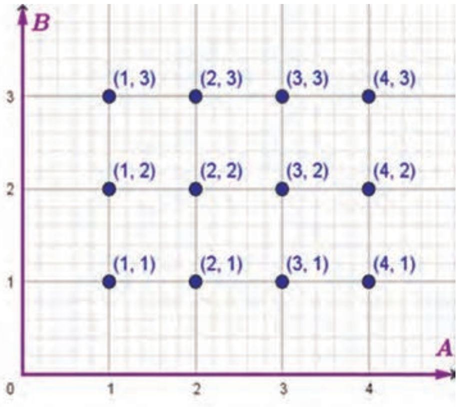
Recordemos algunos conceptos:

- Par ordenado o dupla, se denota como (a,b), donde "a" es el primer elemento del par y "b" es el segundo, también llamados componentes.

- Producto cartesiano de dos conjuntos A y B, es el conjunto A x B, formado por todos los pares ordenados (a, b), donde a es un elemento de A y b es un elemento de B.

- Relación entre dos conjuntos es el subconjunto de AxB, cuyos elementos cumplen una condición llamada regla de correspondencia, donde a cada elemento del primer conjunto A, le corresponde uno o más elementos del segundo conjunto B; se escribe como: R:A→B

- Regla de correspondencia, es la que establece la forma en que los elementos del primer conjunto A, se relacionan con él o los elementos, del segundo conjunto B, puede representarse de diversas maneras: por diagramas de Venn, en una tabla de valores, explícita o implícitamente.



Por ejemplo: si tenemos los conjuntos A={1,2,3,4} y B={1,2,3}.

Al realizar el producto cartesiano de dos conjuntos A y B, obtenemos diferentes pares ordenados. (Figura 1):

A×B= {(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(2,3),(3,1),(3,2),(3,3),(4,1),(4,2),(4,3)}. Si en este conjunto de pares ordenados surge una relación, que tiene por regla de correspondencia: "la suma de los componentes es igual a cuatro", se obtendría un subconjunto, cuyos elementos son: R= {(1,3),(2,2),(3,1)}. El nuevo conjunto que surge, tiene sólo tres pares ordenados, que cumplen con la consigna dada, se escribe a R b, "*a* se relaciona con b", en diagramas de Venn:

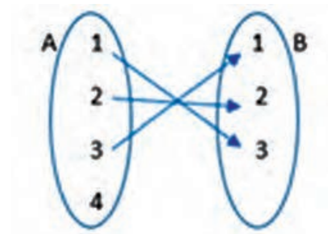


Figura 1: Pares ordenados del producto cartesiano AxB.

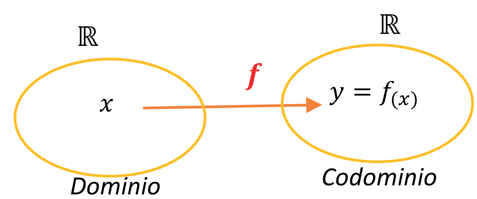
2. Relaciones y funciones

A partir del ejemplo anterior, podemos definir una función como una relación entre dos conjuntos, un conjunto de partida llamado dominio y otro conjunto de llegada llamado codominio, que se definen con una regla de correspondencia, tal que no existen pares ordenados con la misma primera componente. Una función se denota con letras minúsculas: f, g o h; tenemos: f:A→B, la regla de correspondencia es: "la suma de los componentes es igual a cuatro", entonces, si las componentes son (x,y), resulta en notación de función: y=f_((x)). Tenemos: forma implícita de regla de correspondencia: x+y=4. Forma explícita de regla de correspondencia: y=4-x. Una función queda bien definida si se conocen su dominio y la regla de correspondencia, así tenemos: f:A→B ; f_((x))=4-x.

Una función real de variable real es aquella en la que el dominio y codominio son los números reales, es decir parte de un conjunto numérico y llega a un conjunto numérico, se escribe:

$f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}\,;\, y=f_{(x)}$ en notación de conjunto tenemos:

$f=\{(x,y)/x\ \in\mathbb{R}\wedge y\ \in\mathbb{R};\ y\ =\ f_{(x)}\}.$



El primer conjunto de números reales es el dominio que tiene como elementos las variables independientes, el segundo conjunto de números reales es el codominio cuyos elementos son denominados variables dependientes, ya que su valor está en función de "x", gráficamente el dominio se representa en el eje X y el segundo conjunto en el eje Y.

3. Dominio y rango de una función

El dominio de una función real de variable real es el conjunto de variables independientes para los cuales la función queda bien definida, se escribe: D_f. El rango de una función real de variable real, es el subconjunto del codominio que se obtiene al aplicar la regla de correspondencia y determinar variables dependientes que intervienen en la función, se escribe: R_f, podemos determinar el dominio y el rango de una función, establecemos tres parámetros principales, es decir debemos evitar que las variables intervengan en una división entre cero, raíz par de número negativo y logaritmos de números negativos.

Ejemplos: Determinar el dominio y rango de la función, definida por: $1)\ f_{(x)}=\frac{2x-1}{x-2}$

Determinamos D_f: Observamos que en la regla de correspondencia $f_{(x)}=\frac{2x-1}{x-2}$, existe una división, por lo tanto, debemos evitar que la variable independiente "x", asuma valores que anulen el denominador, para evitar esta situación, se iguala el denominador a cero, es decir: $x-2=0$, se obtiene $x=2$; lo que indica que la variable puede tomar todos los valores reales, excepto el número dos, en símbolos tenemos: $D_f=\mathbb{R}-\{2\}$.

Determinamos R_f: Determinamos el rango de la función, en $y=f_{(x)}$, tenemos: $y=\frac{2x-1}{x-2}$, como en el rango de la función están las variables dependientes, es decir las "y", entonces en esta expresión $y=\frac{2x-1}{x-2}$, despejamos la variable x, después observaremos las restricciones para "y":

$$y=\frac{2x-1}{x-2}$$
$$y(x-2)=2x-1$$
$$xy-2y=2x-1$$
$$xy-2x=2y-1$$
$$x(y-2)=2y-1$$
$$\boldsymbol{x}=\frac{\mathbf{2y-1}}{\mathbf{y-2}}$$

$$2)\ f_{(x)}=\sqrt{x^2-5x-6}$$

Determinamos Df: Observamos que la variable "x" interviene en una raíz par, entonces recordemos que una raíz par está definida para radicandos mayores o iguales a cero, entonces tenemos: $x^2-5x-6\geq0$, factorizando $(x-6)(x+1)\geq0$. Resolviendo la inecuación cuadrática, resulta: Cs=(-∞,-1] U[6,∞)

Concluimos el dominio de la función es: D_f=(-∞,-1] U [6,∞).

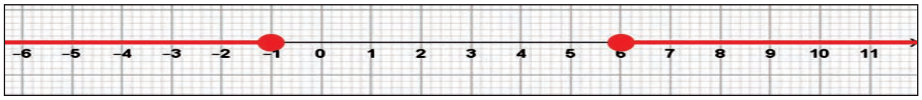


Figura 2: *Representación gráfica de intervalos solución de la inecuación cuadrática*: $x^2 - 5x - 6 \geq 0$:

- *Determinamos R_f*: En la regla de correspondencia igualamos a "y":

$y = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$, Despejamos la variable *x*:

$y^2 = x^2 - 5x - 6$

$x^2 - 5x - 6 - y^2 = 0$

$x^2 - 5x - (6 + y^2) = 0$

$ax^2 + bx + c = 0$

Analizamos el discriminante:

$b^2 - 4ac \geq 0$

$(-5)^2 - 4(1)(-6 + y^2) \geq 0$

$y^2 + 49 \geq 0$

Actividad 51.

De acuerdo al análisis de la practica realizamos las siguientes actividades:

1) En tu opinión cuales son las principales causas para que se generen situaciones de violencia contra la mujer.

2) De acuerdo a lo que escribiste en el numeral anterior, cuáles son las reacciones que propones para evitar situaciones de violencia contra la mujer.

3) Con los datos del cuadro elabora un gráfico en un sistema de coordenadas, en el eje horizontal los nombres de los departamentos y en el eje vertical los porcentajes de los años 2016 con un color y 2017 con otro color diferente. Posteriormente, extrae conclusiones a través de la gráfica realizada, obtuviste una recta o una curva, ascendente o decreciente.

Actividad 52.

1) Elabora una tabla de valores para la función $f_{(x)} = \frac{2x-1}{x-2}$, considerando el dominio y el rango determinados en el ejemplo 1.

2) Establece una tabla de valores para la función $f_{(x)} = \sqrt{x^2 - 5x - 6}$, considerando los intervalos del dominio de la función.

3) Determinamos el dominio y rango de las siguientes funciones:

a) $f_{(x)} = -3x + 5$

b) $f_{(x)} = -x^2 + 4$

c) $f_{(x)} = \frac{1}{2x} - 2$

d) $f_{(x)} = \sqrt{5 + x}$

e) $f_{(x)} = \sqrt{x^2 - 4x + 3}$

f) $f_{(x)} = \frac{1}{\sqrt{4+x}}$

g) $f_{(x)} = \frac{2x+5}{2x+1}$

h) $f_{(x)} = \log(2x - 1)$

i) $f_{(x)} = \log(1 - x^2)$

j) $f_{(x)} = 4^{x+1}$

4. Gráfica de una función

El gráfico de una función real de variable real, queda determinado si se conocen el dominio, rango de la función y a partir de estos conjuntos determinados elaboramos una tabla de valores. Ejemplo:
Graficar la función: **$f_{(x)}$= log (x+2)**

Determinamos el dominio de la función:

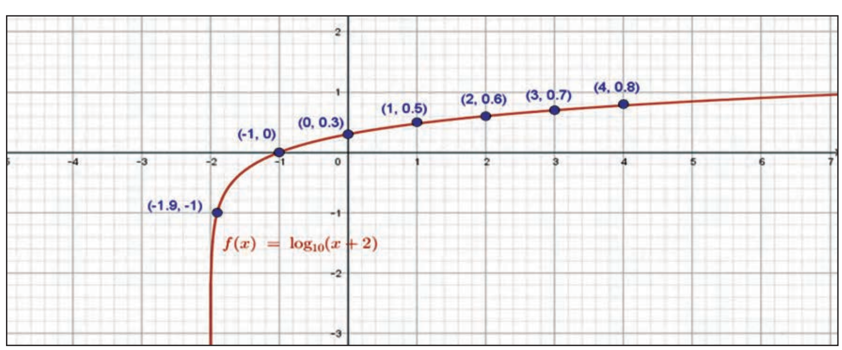
El logaritmo sólo se encuentra si el argumento es positivo, entonces: $x + 2 > 0$ ➔ $x > -2$. ∴ $D_f = (-2, \infty)$.

Determinamos el rango de la función: $y = \log(x + 2)$, por definición de logaritmo: $10^y = x + 2$.

Despejando la variable "x", resulta: $x = 10^y - 2$. Al no existir ninguna restricción en la que interviene la variable "y".

∴ $R_f = \mathbb{R}$. Elaboramos la tabla de valores, asignaremos a partir del número -1.9, simplemente para indicar donde inicia el gráfico de la función:

x	$f(x) = y$	(x, y)
-1.9	-1	(-1.9,-1)
-1	0	(-1,0)
0	0.3	(0,0.3)
1	0.5	(1,0.5)
2	0.6	(2,0.6)
3	0.7	(3,0.7)
4	0.8	(4,0.8)



5. Función inversa

Para establecer la existencia de la función inversa, se requiere verificar que la función dada sea biyectiva, es decir que sea inyectiva y sobreyectiva a la vez. Si $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$; $y = f_{(x)}$

Escanea el QR

Para aprender a determinar funciones inversas y resolver operaciones con funciones.

Actividad 53.

Determinamos la función inversa de las siguientes funciones, previa comprobación si se trata o no de una función biyectiva:

$f_{(x)} = 5x + 6$

$f_{(x)} = -x - 1$

$f_{(x)} = \dfrac{5x - 1}{2}$

$f_{(x)} = \dfrac{2x}{x - 4}$

$f_{(x)} = x^3$

$f_{(x)} = \log(3x + 1)$

Actividad 54.

1) Determina la función inversa de $f_{(x)} = 5x - 1$, luego realiza la representación gráfica de la función original, su función inversa y la función identidad.
2) Realizamos la representación gráfica de la función $f_{(x)} = x^3 - 2$, su función inversa y la función identidad.
3) Establece la función inversa de $f_{(x)} = x^3$, realiza la gráfica mostrando también la función identidad.

Operaciones con funciones

Actividad 55.

1) Determinamos la función suma, diferencia, producto y cociente, dadas las funciones:

   $f_{(x)} = 4x - 3$ y $g_{(x)} = -6x$
2) Establece la función suma y diferencia, si: $f_{(x)} = 4x^2 - 3x - 9$ y $g_{(x)} = 8x^2 - 6x - 5$
3) Hallamos la función producto y la función cociente, si: $f_{(x)} = x^2 - 16$ y $g_{(x)} = 2x^2 + 2x - 24$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 56. Reflexionamos en equipos de trabajo para responder las siguientes preguntas:

1) ¿Cómo se aplican las funciones en la cotidianidad?
2) ¿Cómo se aplican las funciones en el desarrollo de ciencia y la tecnología?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 57. Realicemos las siguientes actividades:

1) Establecemos los valores que debemos promover desde nuestra comunidad, con el compromiso de practicarlos cotidianamente, para evitar toda forma de violencia, no sólo contra la mujer sino con nuestros conciudadanos.
2) Realizamos un informe acerca de los incrementos de casos de violencia contra la mujer los últimos dos años, representándolos en un cuadro y realizando el gráfico correspondiente a través de funciones.

LÍMITE Y CONTINUIDAD

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Una institución está organizando una campaña para recaudar recursos económicos. Por experiencia se sabe que los aportes totales están en función al tiempo de la campaña, es decir, mientras más dure más recaudación se obtendrá. En una ciudad se ha determinado esta función que expresa el porcentaje de la población "R" (expresado en fracción decimal) que hará un donativo en función del número de días "t" de la campaña.

La expresión de la misma es: $R=0.7(1-e^{-0.05t})$.

Calcularemos el porcentaje de la población que hará un donativo a los diez días de haberse iniciado la campaña.

Es en este sentido que nos planteamos la idea intuitiva de límite, teniendo en cuenta que podemos acercarnos al número indicado, (en este caso 10) tan cerca como sea posible, sin embargo, no podemos detenernos en él porque la campaña continuará.

Calculamos: $\lim_{x\to 10} 0.7\,(1-e^{-0.05x}) = 0.7(1-e^{-0.05*10}) = 0.7(1-e^{-0.5}) = 0.2754$

Como se requiere el porcentaje, tendremos: 0.2754 *100 = 27.54%

Luego concluimos que el 27,54% de la población realizará su aporte en aproximadamente diez días.

1) ¿Qué porcentaje de la población hará un donativo a los 20 días de haberse iniciado la campaña?

2) Calcule el porcentaje de la población que habrá contribuido con la institución si la campaña publicitaria continúa por tiempo indefinido.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

Los teoremas sobre límites son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja. Al tratarse de operaciones, también se le denomina álgebra de los límites. Sean f(x) y g(x) dos funciones definidas en un mismo intervalo, en donde está el valor a del límite y k es una constante, tenemos los siguientes teoremas o propiedades de los límites:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)+g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)-g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)*g(x)\big) = \lim_{x\to a} f(x) * \lim_{x\to a} g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)},$$

siempre que g(x) sea diferente de cero.

$$\lim_{x\to a}\big(k*f(x)\big) = k*\lim_{x\to a} f(x)$$

$$\lim_{x\to a} k^{f(x)} = k^{\lim_{x\to a} f(x)}$$

$$\lim_{x\to a}[\log f(x)] = \log[\lim_{x\to a} f(x$$

$$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$$

$$\lim_{x\to a}\sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

Ejemplos: Resolvemos los siguientes límites, aplicando propiedades:

1) $\lim_{x\to 2}(7x^2+x) = \lim_{x\to 2}(7x^2) + \lim_{x\to 2} x = 7\left(\lim_{x\to 2} x\right)^2 + \lim_{x\to 2} x = 7.(2)^2{+}2 = 7(4)+2 = \mathbf{30}$

2) $\lim_{x\to -1}\frac{4x-1}{x+3} = \frac{\lim_{x\to -1}(4x-1)}{\lim_{x\to -1}(x+3)} = \frac{4\,.\lim_{x\to -1} x - \lim_{x\to -1} 1}{\lim_{x\to -1} x + \lim_{x\to -1} 3} = \frac{4\,.(-1)-1}{-1\ +\ 3} = \frac{-4-1}{2} = -\frac{\mathbf{5}}{\mathbf{2}}$

3) $\lim_{x\to 5}\sqrt[3]{x^2+2} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 5}(x^2+2)} = \sqrt[3]{\lim_{x\to 5}(x^2) + \lim_{x\to 5} 2} = \sqrt[3]{\left(\lim_{x\to 5} x\right)^2 + \lim_{x\to 5} 2} = \sqrt[3]{(5)^2{+}2} = \sqrt[3]{27} = \mathbf{3}$

Actividad 58.

Deteminamos los límites aplicando las propiedades dadas:

1) $\lim_{x\to 3}(x-2)$

2) $\lim_{x\to -2}(7x+11)$

3) $\lim_{x\to 1}(x^2-4x+4)$

4) $\lim_{x\to -1}\left(\frac{5\,senx}{x}\right)$

5) $\lim_{x\to 0}\left[\frac{x-3}{9-x}\right]^{1/2}$

2. Operaciones e indeterminaciones en el infinito

En este tema en algunas ocasiones la variable se aproxima a un valor extremadamente grande, es decir al infinito y en algunas ocasiones surgen operaciones desconocidas llamadas indeterminaciones, en el siguiente cuadro mostramos, las operaciones conocidas con infinito y las siete indeterminaciones:

OPERACIONES DETERMINADAS CON INFINITO		INDETERMINACIONES
$\infty \pm k = \infty$	$(+\infty) + (+\infty) = +\infty$	$\infty - \infty = indeterminado$
$\infty * k = \infty \quad si\ k \neq 0$	$\infty * \infty = \infty$	$0 * \infty = indeterminado$
$\frac{0}{k} = 0$	$\frac{0}{\infty} = 0$	$\frac{0}{0} = indeterminado$
$\frac{k}{0} = \infty$	$\frac{k}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{\infty} = indeterminado$
$\frac{\infty}{k} = \infty$	$\frac{\infty}{0} = \infty$	$0^0 = indeterminado$ $\infty^0 = indeterminado$
$0^k = \begin{cases} 0, si\ k > 0 \\ \infty, si\ k < 0 \end{cases}$	$k^{+\infty} = \begin{cases} \infty, si\ k > 1 \\ 0, si\ 0 < k < 1 \end{cases}$	$1^\infty = indeterminado$
$0^k = 1$	$0^{+\infty} = 0$	
	$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$	

3. Límites algebraicos

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right)$. Calculamos el límite, por sustitución directa

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x-1} - \frac{2}{x^2-1}\right) = \frac{1}{\infty-1} - \frac{2}{\infty^2-1} = \frac{1}{\infty} - \frac{2}{\infty} = 0 - 0 = 0$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}{x-1}\right)$. Calculamos el límite por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}}{x-1}\right) = \frac{\frac{3}{\infty}-\frac{3}{\infty^2}}{\infty-1} = \frac{0-\frac{3}{\infty}}{\infty} = \frac{0-0}{\infty} = \frac{0}{\infty} = 0$

3) $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x^2-7x+6}$. Calculamos el límite por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x^2-7x+6} = \frac{6^2-6(6)}{6^2-7(6)+6} = \frac{36-36}{36-42+6} = \frac{0}{0} = ???$

Levantamos la indeterminación factorizando: $\lim\limits_{x\to 6}\frac{x^2-6x}{x^2-7x+6} = \lim\limits_{x\to 6}\frac{x(x-6)}{(x-6)(x-1)} = \lim\limits_{x\to 6}\frac{x}{x-1} = \frac{6}{5}$

4) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1}$. Calculamos el límite por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \frac{\sqrt{\infty^2-1}}{\infty-1} = \frac{\sqrt{\infty}}{\infty} = \frac{\infty}{\infty} = ???$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{x^2-1}}{x-1} = \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2-1}{x^2}}}{\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}-\frac{1}{x^2}}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sqrt{1-\frac{1}{x^2}}}{1-\frac{1}{x}} = \frac{\sqrt{1-\frac{1}{\infty^2}}}{1-\frac{1}{\infty}} = \frac{\sqrt{1-0}}{1-0} = 1$$

4. Límites especiales

Los límites especiales son aquellos que presentan una gran aplicación tanto para resolución de otros límites como para otras aplicaciones.

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e \qquad \lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x} = \ln a \qquad \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x} = 1$$

Ejemplos:

1) $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1+x}{x}}$. Calculamos el límite, por sustitución directa:

$$\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1+x}{x}} = (1+0)^{\frac{1+0}{0}} = (1+0)^{\frac{1}{0}} = 1^\infty = ???$$

Levantamos la indeterminación: $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1+x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+\frac{x}{x}} = \lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}+1} = ???$

$$\lim_{x\to 0}\left[(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)\right] = \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} * \lim_{x\to 0}(1+x) = e*(1+0) = e$$

2) $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\left(\frac{\infty}{\infty+1}\right)^{\infty}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)^{\infty}=???$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{x+1}\right)^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{\frac{x}{x}}{\frac{x+1}{x}}\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\frac{x}{x}+\frac{1}{x}}\right]^{x}=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right]^{x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1^{x}}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}\right]=\frac{\lim_{x\to\infty}1}{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}=\frac{1}{e}$$

3) $\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{8x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{8x}=\left(1-\frac{1}{4*\infty}\right)^{8*\infty}=\left(1-\frac{1}{\infty}\right)^{\infty}=(1-0)^{\infty}=1^{\infty}=???$$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{8x}=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{4x}\right)^{2*4x}=\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{(-4x)}\right]^{(-2)*(-4x)}=\lim_{x\to\infty}\left\{\left[1+\frac{1}{(-4x)}\right]^{(-4x)}\right\}^{-2}$$

$$=\left\{\lim_{x\to\infty}\left[1+\frac{1}{(-4x)}\right]^{(-4x)}\right\}^{-2}=e^{-2}=\frac{1}{e^{2}}$$

4) $\lim_{x\to 0}\frac{3^{x}-3^{-x}}{x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim_{x\to 0}\frac{3^{x}-3^{-x}}{x}=\frac{3^{0}-3^{-0}}{0}=\frac{1-1}{0}=\frac{0}{0}=???$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{3^{x}-3^{-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{x}-3^{-x}+1-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{3^{x}-1-3^{-x}+1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(3^{x}-1)-(3^{-x}-1)}{x}$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{3^{x}-1}{x}-\frac{3^{-x}-1}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3^{x}-1}{x}-\lim_{x\to 0}\frac{(3^{-1})^{x}-1}{x}=\ln 3-\ln 3^{-1}=\ln 3-(-1)\ln 3$$

$$=\ln 3+\ln 3=2\ln 3$$

5. Límites Trigonométricos, exponenciales y logarítmicos

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x}=1 \qquad\qquad \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

Ejemplos:

1) $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\frac{tg\,0}{0}=\frac{0}{0}=???$

Levantamos la indeterminación:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg\,x}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{sen\,x}{\cos x}}{\frac{x}{1}}=\lim_{x\to 0}\frac{sen\,x}{x\,.\cos x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}*\frac{1}{\cos x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{sen\,x}{x}\right)*\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\cos x}\right)=1*\frac{1}{\cos 0}=1*\frac{1}{1}=1$$

2) $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,4x}{2x}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,4x}{2x}=\frac{sen\,4*0}{2*0}=\frac{sen\,0}{0}=\frac{0}{0}=???$

Levantamos la indeterminación: $\lim_{x\to 0}\frac{sen\,4x}{2x}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{2}*\frac{sen\,4x}{x}\right)=\frac{1}{2}*\lim_{x\to 0}\frac{sen\,4x}{x}$

$$=\frac{1}{2}*\lim_{x\to 0}\frac{4*sen\,4x}{4*x}=\frac{1}{2}*4\lim_{x\to 0}\frac{sen\,4x}{4x}=2*1=2$$

6. Infinitos y al infinito

INDETERMINACIÓN DE LA FORMA: ∞/∞

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^2-1}$. Calculamos el límite, por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^2-1}=\frac{\infty^4+1}{\infty^2-1}=\frac{\infty}{\infty}=???$

Levantamos la indeterminación: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^4+1}{x^2-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4+1}{x^4}}{\frac{x^2-1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{x^4}{x^4}+\frac{1}{x^4}}{\frac{x^2}{x^4}-\frac{1}{x^4}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+\frac{1}{x^4}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^4}}$

Realizamos el cálculo del límite por sustitución directa: $=\frac{1+\frac{1}{\infty^4}}{\frac{1}{\infty^2}-\frac{1}{\infty^4}}=\frac{1+\frac{1}{\infty}}{\frac{1}{\infty}-\frac{1}{\infty}}=\frac{1+0}{0-0}=\frac{1}{0}=\infty$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x-1}$. Calculamos por sustitución directa: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x-1}=\frac{2*\infty+3}{\infty-1}=\frac{\infty+3}{\infty}=\frac{\infty}{\infty}=???$

Levantamos la indeterminación: $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+3}{x-1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x+3}{x}}{\frac{x-1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{2x}{x}+\frac{3}{x}}{\frac{x}{x}-\frac{1}{x}}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2+\frac{3}{x}}{1-\frac{1}{x}}$

Realizamos la sustitución directa: $=\frac{2+\frac{3}{\infty}}{1-\frac{1}{\infty}}=\frac{2+0}{1-0}=\frac{2}{1}=2$

Actividad 59. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x-2}{x^2-4}\right)$

2) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^2-4x+4}{x-2}\right)$

3) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

4) $\lim\limits_{x\to5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{3-\sqrt{x+4}}$

5) $\lim\limits_{x\to5}\frac{1-\sqrt{x-4}}{3-\sqrt{x+4}}$

6) $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^3-3x^2+4}{4x^3+8}$

7) $\lim\limits_{x\to4}\frac{2x^3-27}{4x^2-9}$

8) $\lim\limits_{x\to0}(1+3x)^{2/x}$

9) $\lim\limits_{x\to0}\left(\frac{\ln(1-x)}{x}\right)$

10) $\lim\limits_{x\to\infty}(1+6x)^x$

11) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\frac{1}{3x}\right)^{6x}$

12) $\lim\limits_{x\to0}(1+x)^{2x}$

13) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^2-1}{x-1}$

14) $\lim\limits_{x\to2}\left(\frac{x^2-3x+2}{x^2+x-6}\right)$

15) $\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-1)^3-1}{x-2}$

16) $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}}\frac{8x^3-1}{6x^2-5x+1}$

17) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3-8x+3}{4x^2+5x+1}$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 60. En el cuaderno de ejercicios respondemos las siguientes preguntas:

¿Por qué es importante el aprendizaje de los límites?
¿Cómo aplicamos en la vida cotidiana los límites?
¿Consideras que es importante participar en campañas solidarias? ¿Por qué?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 61. Realizamos una campaña solidaria hipotética (una situación supuesta) y consideraremos lo siguiente:

- Calculamos el porcentaje de la población que hará un donativo en un año de haberse iniciado una campaña solidaria, puedes considerar la cantidad necesaria de personas de tu municipio.

- Calculamos el porcentaje de la población que habrá contribuido con la campaña solidaria si esta continuaría por tiempo indefinido.

EL CÁLCULO EMPLEADO EN PROCESOS DE PRODUCCIÓN Y TECNOLOGÍA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Un estudio de productividad en el turno matinal en una cierta fábrica indica que un trabajador medio que llega al trabajo a las 8.00 a.m. habrá ensamblado: $Q(t)=-t^3+6t^2+15t$, radio transistores en "x" horas después.

¿En qué momento de la mañana está con máxima eficacia?

Cantidad de radios producida por hora: $Q(t) = -t^3 + 6t^2 + 15t$.

Para hallar el momento en el que es más eficiente, calcularemos la hora que el trabajador alcanza su mayor nivel de producción, para ello derivaremos la función de producción e igualaremos la primera derivada a cero:

Realizamos la derivación: $\frac{dQ(t)}{dt} = -3t^{3-1} + 6 * 2t^{2-1} + 15 * 1\ .\ 3t^2 + 12t + 15 = 0$

Resolviendo esta ecuación cuadrática, tenemos:

$$3t^2 + 12t + 15 = 0 \quad // \div 3$$
$$t^2 + 4t + 5 = 0$$
$$(t + 1)(t - 5) = 0$$

Tenemos dos soluciones: $t_1 = -1\ ;\ t_2 = 5$

Tenemos dos soluciones: $t_1 = -1\ ;\ t_2 = 5$

La solución igual a -1, no se considera, porque el tiempo no puede expresarse en unidades negativas, entonces la respuesta acertada es el momento de máxima eficacia en su trabajo es después de 5 horas.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. La derivada e integrales en procesos productivos

Este tema tiene su importancia puesto que con la derivada de una función podemos determinar un valor instantáneo de la tasa de cambio que puede conducir a establecer una cantidad deseada de un determinado producto.

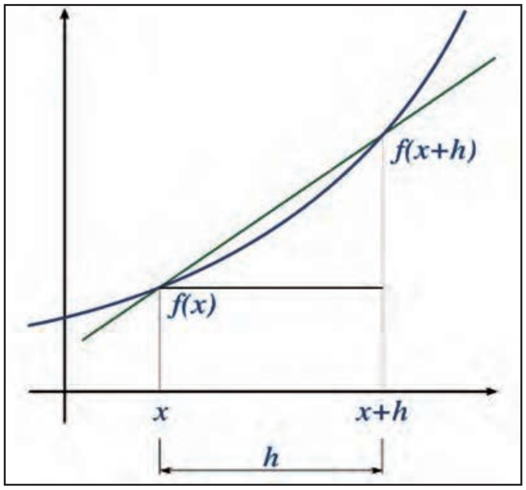
Mientras que la integral de una función puede interpretarse geométricamente como el área bajo la curva de una función real de variable trazada como una función de x. Para los que no son expertos en la materia, ni matemáticos, ni científicos, es probable que las derivadas sean una zona de estudio bastante desconocida.

2. Nociones básicas de la derivada

La derivada de una función en un punto representa el valor de la pendiente de la recta tangente en el mencionado punto y mide el coeficiente en el que varía la función, es decir, nos dará una formulación matemática de la noción del coeficiente de ese cambio. Podemos observar la interpretación gráfica:

La derivada de una función $f(x)$, se denota como: y' ; $\frac{dy}{dx}$; $\frac{d}{dx}f_{(x)}$; $f'(x)$, se define de la siguiente manera: $f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$

Dónde: "h" es el incremento de x.



Ejemplos: Utilicemos la definición para determinar la derivada de las siguientes funciones:

1) $\boldsymbol{f(x) = 2x^2 - 5.}$

Calculamos:

1° $f(x+h) = 2(x+h)^2 - 5 = 2(x^2 + 2xh + h^2) - 5 = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5$

2° $f(x+h) - f(x) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5 - (2x^2 - 5) = 2x^2 + 4xh + 2h^2 - 5 - 2x^2 + 5 = 4xh + 2h^2$

3° $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{4xh+2h^2}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(4x+2h)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(4x+2h)$

Evaluamos el límite: $f'(x) = 4x + 2 * 0 \Rightarrow f'(x) = 4x$

2) $\boldsymbol{f(x) = x^2 - 2x + 1}$

Calculamos:

1° $f(x+h) = (x+h)^2 - 2(x+h) + 1 = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1$

2° $f(x+h) - f(x) = x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1 - (x^2 - 2x + 1)$

$= x^2 + 2xh + h^2 - 2x - 2h + 1 - x^2 + 2x - 1 = 2xh + h^2 - 2h$

3° $f'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{2xh+h^2-2h}{h} = \lim\limits_{h\to 0}\frac{h(2x+h^2-2)}{h} = \lim\limits_{h\to 0}(2x+h^2-2)$

Evaluamos el límite: $f'(x) = 2x + 0^2 - 2 \Rightarrow f'(x) = 2x - 2$

Actividad 62. Calculamos por definición la derivada de las siguientes funciones:

1) $f(x) = 3x^3$
2) $f(x) = 3 - 5x$
3) $f(x) = 4x - 7$
4) $f(x) = 2x^2 - 2x + 6$
5) $f(x) = -5x^2 + 7x - 1$
6) $f(x) = x^3 - x^2 + x - 2$

3. Derivada en un punto dado

La derivada de una función en un punto dado, se calcula realizando el reemplazo del valor de la variable x, en f' (x).

Ejemplos:

Determinamos la derivada de la función del ejemplo 1 anterior, en el punto de abscisa x= 3. En el ejemplo 1, anterior la función es: $f(x) = 2x^2 - 5$, la derivada que calculamos es: $f'(x) = 4x$.

Determinamos $f'(3) = 4 * 3 \Rightarrow f'(3) = 12$.

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES ALGEBRAICAS

1) $D_x(c) = 0$
2) $D_x(x) = 1$
3) $D_x(c \cdot x) = cv'$
4) $D_x(x^n) = nx^{n-1}$
5) $D_x(v^n) = nv^{n-1}v'$
6) $D_x(u \pm v \pm w) = u' \pm v' \pm w'$
7) $D_x(u \cdot v) = u'v + uv'$
8) $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v-uv'}{v^2}, v \neq 0$
9) $D_x\left(\frac{u}{c}\right) = \frac{u'}{c}$
10) $D_x\left(\frac{c}{v^n}\right) = \frac{cnv'}{v^{n+1}}, v \neq 0$
11) $D_x(\sqrt{u}) = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$
12) $D_x(\sqrt[n]{u}) = \frac{u'}{n\sqrt[n]{u^{n-1}}}$

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES TRASCENDENTALES

1) $D_x(e^v) = v'e^v$
2) $D_x(a^v) = v'a^v\ln(a)$
3) $D_x(\ln v) = \frac{v'}{v}$
4) $D_x(\log_a v) = \frac{v'}{v}\log_a e$
5) $D_x(u^v) = vu^{v-1}u' + \ln(u)u^v v'$

TABLA DE DERIVADAS DE FUNCIONES TRIGONOMETRICAS Y SUS INVERSAS

1) $D_x(\text{sen}(v)) = \cos(v)\cdot v'$
2) $D_x(\cos(v)) = -\text{sen}(v)\cdot v'$
3) $D_x(\text{tang}(v)) = \sec^2(v)\cdot v'$
4) $D_x(\text{cotg}(v)) = -\csc^2(v)\cdot v'$
5) $D_x(\sec(v)) = \sec(v)\text{tang}(v)\cdot v'$
6) $D_x(\csc(v)) = -\csc(v)\text{cotg}(v)\cdot v'$
7) $D_x(\text{arcosen}(v)) = \frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$
8) $D_x(\text{arcocos}(v)) = -\frac{v'}{\sqrt{1-v^2}}$
9) $D_x(\text{arcotang}(v)) = \frac{v'}{1+v^2}$
10) $D_x(\text{arcocotg}(v)) = -\frac{v'}{1+v^2}$
11) $D_x(\text{arcosec}(v)) = \frac{v'}{v\sqrt{v^2-1}}$
12) $D_x(\text{arcocsc}(v)) = -\frac{v'}{v\sqrt{v^2-1}}$

4. Regla de la cadena

Sean *f* y *g* dos funciones, para todas las x en el dominio de *g* para las cuales *g* es diferenciable en x y *f* es diferenciable en *g*(*x*), la derivada de la función compuesta: $h(x) = (f \circ g)_{(x)} = f\left[g_{(x)}\right]$. Está dada por: $h'(x) = f'[g_{(x)}]g'_{(x)}$

Alternativamente, si *y* es una función de *u*, y a su vez *u* es una función de *x*, entonces:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} * \frac{du}{dx}$$

Ejemplos:

1) $f(x) = \left(4x^3 - 2\right)^6$. Primero derivamos la potencia y posteriormente se deriva el binomio:

Si $f(x) = (4x^3-2)^6 \Rightarrow f'(x) = 6(4x^3-2)^5 * (4x^3-2)' = 6(4x^3-2)^5 * (12x^2-0)$

$$f'(x) = 72x^2(4x^3-2)^5$$

2) $f(x) = \sqrt[3]{3x^2 - x}$. Primero derivamos el radical, luego el binomio del radicando:

$$f(x) = (3x^2-x)^{\frac{1}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2-x)^{\frac{1}{3}-1} * (3x^2-x)' = \frac{1}{3}(3x^2-x)^{\frac{1}{3}-1} * (3*2x-1)$$

$$f'(x) = \frac{1}{3}(3x^2-x)^{-\frac{2}{3}} * (6x-1) = \frac{6x-1}{3}(3x^2-x)^{-\frac{2}{3}} = \frac{6x-1}{3} * \frac{1}{(3x^2-x)^{\frac{2}{3}}} = \frac{6x-1}{3\sqrt[3]{(3x^2-x)^2}}$$

3) $f(x) = \ln\left(2+\sqrt{x}\right)$

Primero derivamos el logaritmo y luego el binomio

$$f(x) = \ln(2+\sqrt{x}) \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}} * (2+\sqrt{x})' = \frac{1}{2+\sqrt{x}} * \left[2+(x)^{\frac{1}{2}}\right]' = \frac{1}{2+\sqrt{x}} * \left[0+\frac{1}{2}(x)^{\frac{1}{2}-1}\right]$$

$$f'(x) = \frac{1}{2+\sqrt{x}} * \left(\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2(2+\sqrt{x})} * \left(x^{-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2(2+\sqrt{x}) * x^{\frac{1}{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{1}{(4+2\sqrt{x}) * \sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x} + 2\sqrt{x} * \sqrt{x}} = \frac{1}{4\sqrt{x} + 2x}$$

Actividad 63 .

Determinemos la derivada de las siguientes funciones en el punto de abscisa dada para cada función:

1) f(x) = 3(x-2); en x=1
2) f(x) = -x+5; en x=-3
3) f(x) = 8x+6; en x=4
4) f(x) =x^2-5x +6; en x=4
5)f(x) =-3x^2+x+4; en x=-3
6) f(x) =-2x^2+7; en x=-2
7) f(x) =$(x-6)^2$; en x=-1

Actividad 64.

Determinemos la derivada de las siguientes funciones:

1) f(x) = x^4
2) f(x) = 4(x-2)
3) f(x) = $(2x-3)^{1/3}$
4) f(x) = 5x^{-2}-3x^{-1}+:
5) f(x) = 1/x^2
6) f(x) = x^6/ln x
7) f(x) = $(x^2-9)^{1/5}$
8) f(x) = 3 sen 2x
9) f(x) = sen ^{2} x
10) f(x) = $\ln(x^2+4x+3)^{1/2}$

Actividad 65.

Determinemos la derivada de las siguientes funciones, aplicando las propiedades correspondientes

1) f(x) = 5x^2
2) f(x) = 7x+1
3) f(x) = 10x + 3
4) f(x) = -x^2 +8x
5) f(x) = -3x^2 +5x -7
6) f(x) = 12x^3-6x^2-2x

Actividad 66.

Calculemos la derivada de cada función, aplicando la regla de la cadena:

1) f(x) = x^3 - 3x^2
2) f(x) = log (6+x^2)
3) f(x) = (x+3)(x-5)
4) f(x) = $7(4-3x)^2$
5) f(x) = x ln x
6) f(x) = (x+1)/(x-1); x es diferente de 1.

5. Nociones básicas de la integral

Las integrales son básicamente lo contrario a las derivadas, con la ayuda de las integrales podemos encontrar el área bajo una curva definida, existen integrales definidas e indefinidas / simples.

Calcular $\int x^4 dx$.

Por tabla de integrales simples

$$\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

$$\int x^4 dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} + c$$

Respuesta:

$$\int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + c$$

Calcular $\int (3x-x^2)^2 dx$.

Por tabla de integrales simples: $\int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$

$$\int [(3x)^2 - 2(3x)(x^2) + (x^2)^2]dx = \int [9x^2 - 6x^3 + x^4]dx$$

$$\int 9x^2 dx - \int 6x^3 dx + \int x^4 dx = 9\int x^2 dx - 6\int x^3 dx + \int x^4 dx$$

$$= 9 \cdot \frac{x^3}{3} - 6 \cdot \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + c$$

$\rightarrow$ *Respuesta:* $\int (3x-x^2)^2 dx = 3x^3 - \frac{3x^4}{2} + \frac{x^5}{5} + c$

6. Definición de integral definida

La integral definida de *f(x)* en el intervalo [*a*,*b*] es igual al área limitada entre la gráfica de *f(x)*, el eje de abscisas, y las rectas verticales *x = a* y *x = b* (bajo la hipótesis de que la función *f* es positiva). (Figura 1). Esta integral se representa por: $\int_a^b f(x)dx$, donde: *a* es el límite inferior de la integración y *b* es el límite superior de la integración.

Teorema fundamental del cálculo integral

La relación entre derivada e integral definida queda establecida definitivamente por medio del denominado teorema fundamental del cálculo integral, establece que, dada una función *f(x)*, en un intervalo [a, b], denominado regla de Barrow, su función integral asociada *F(x)* cumple necesariamente que: $F'(x) = f(x)$

Se calcula el valor de esta función en los extremos del intervalo: *F(a) y F(b)*.

El valor de la integral definida entre estos dos puntos vendrá entonces dado por: $\int_a^b f(x)dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$

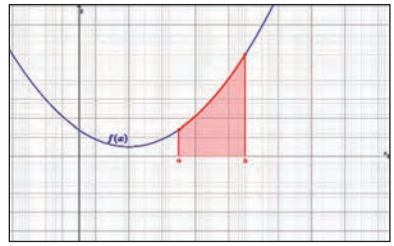


Figura 1: Delimitación de los intervalos de una integral definida

Propiedades de la integral definida

La integral definida cumple las siguientes propiedades:

- Si los límites que integración coinciden, la integral definida vale cero. $\int_a^a f(x)dx = 0$
- El valor de la integral definida cambia de signo si se permutan los límites de integración.

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

- Si *c* es un punto interior del intervalo [*a, b*], la integral definida se descompone como una suma de dos integrales extendidas a los intervalos [*a, c*] y [*c, b*]. $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- La integral definida de una suma de funciones es igual a la suma de integrales·

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- La integral del producto de una constante por una función es igual a la constante por la integral de la función.

$$\int_a^b k \cdot f(x)dx = k \cdot \int_a^b f(x)dx$$

Ejemplos: Determinamos las siguientes integrales definidas:

1) $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx$. Calculamos la integral: $\int_1^4 \sqrt{x}\,dx = \sqrt{1} - \sqrt{4} = 1 - 2 = -1$

2) $\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx$. Resolvemos aplicando las propiedades:

$\int_1^2 (x^2 - 2x + 3)\,dx = \int_1^2 x^2\,dx - \int_1^2 2x\,dx + \int_1^2 3\,dx$

$= \int_1^2 x^2\,dx - 2\int_1^2 x\,dx + \int_1^2 3\,dx = (1)^2 - (2)^2 - 2[1-2] + 3 = 4 - 2[-1] + 3 = 4 + 2 + 3 = 9$

3) $\int_1^4 (1 - 5x - \sqrt{x})\,dx$. Aplicamos las propiedades:

$$\int_1^4 (1 - 5x - \sqrt{x})\,dx = \int_1^4 1\,dx - \int_1^4 5x\,dx - \int_1^4 \sqrt{x}\,dx$$

$= 1 - 5\int_1^4 x\,dx - \int_1^4 \sqrt{x}\,dx = 1 - 5(1-4) - (\sqrt{1} - \sqrt{4}) = 1 - 5(-3) - (1-2) = 1 + 15 + 1 = 17$

4) $\int_2^{11} \sqrt{x-2}\,dx$. $\int_2^{11} \sqrt{x-2}\,dx = \sqrt{2-2} - \sqrt{11-2} = \sqrt{0} - \sqrt{9} = 0 - 3 = -2$

OLIMPIADA CIENTÍFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Si una máquina produce 150 juguetes en un minuto, ¿cuántos juguetes produce en 10 segundos?

Actividad 67. Calculemos las siguientes integrales simples.

1) $I = \int \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}}{x}\right) dx$

2) $I = \int (\sqrt{mx})\,dx$

3) $I = \int \tan^2 x\,dx$

4) $I = \int \left(\frac{x^3+2}{x}\right) dx$

12) $I = \int \left(\frac{\sqrt[3]{x}+\sqrt[4]{x}+a}{\sqrt{x}}\right) dx$

13) $I = \int \left(\frac{\text{sex}+\cos^2+2}{\cos x}\right) dx$

14) $I = \int \left(\frac{e^{2x}+20}{e^x}\right) dx$

5) $I = \int \left(\frac{x^2-9}{x^2-8}\right) dx$

6) $= \int \left(\frac{\cos^2 x+3\cos x-2}{\cos^2 x}\right) dx$

7) $I = \int \left(\frac{\sqrt{x^2-3}-\sqrt{x^2+3}}{\sqrt{x^4-9}}\right) dx$

8) $I = \int \left(\frac{x^3-1}{x-1}\right) dx$

9) $I = \int (e^{2x} + e^x + 2^x)\, dx$

10) $I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+3}\right) dx$

11) $I = \int \left(\frac{x^3+x^{50}-1}{x}\right) dx$

15) $I = \int \left[\frac{x^2+(x^2+4)}{x^2(x^2+4)}\right] dx$

16) $I = \int \left(\frac{1}{(x^2-9)}\right) dx$

17) $I = \int (x^4 + x^2)\, dx$

18) $I = \int (x^2 + 3x + 5)\, dx$

19) $I = \int \ln x\, dx$

20) $I = \int (x^3 + 2x + x^{-1})\, dx$

Actividad 68. Determinemos la integral definida de las siguientes funciones de variable real:

1) $\int_1^4 \sqrt{x}\, dx$

2) $\int_1^2 (x^2-3x + 4)\, dx$

3) $\int_1^2 2x\, dx$

4) $\int_4^7 \sqrt{x-3}dx$

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

La importancia de las derivadas en la actualidad radica en que no es posible entender el mundo en que vivimos sin la aplicación de las mismas. A lo largo de los siglos, otros matemáticos y científicos han aportado muchísimos estudios para hacer más exactos diversos cálculos. Aunque no es un elemento tangible, su valor radica en que, desde el punto de vista científico, se aplica a numerosas investigaciones importantísimas y de las que sus aplicaciones revierten en la propia sociedad. Así, las derivadas son esenciales para estudios tan importantes como el de la relatividad, la mecánica cuántica, la ingeniería, ecuaciones diferenciales, teoría de las probabilidades, sistemas dinámicos, teoría de las funciones, etc. Actualmente también son necesarios en la computación, etc.

Noticiencia

La derivada nos puede ayudar a calcular el ritmo de cambio del precio de una pizza con respecto a su tamaño

Actividad 69. De manera reflexiba respondemos las siguientes preguntas:
- ¿Cuál es la aplicación de las integrales y derivadas?
- ¿Por qué es importante aprender a resolver problemas con derivadas e integrales?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 70. Realizamos un breve informe acerca de las aplicaciones de la derivada de una función real de variable real, en la economía productiva de nuestra región.

ALGEBRA Y TRIGONOMÉTRIA PREUNIVERSITARIA

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Cada año, miles de estudiantes postulan a los exámenes de admisión a universidades públicas, sin embargo, para los bachilleres resulta dificultoso pasar la prueba. Se estima que el 50 por ciento de los postulantes a universidades públicas reprueban los exámenes de ingreso.
Toda prueba de suficiencia presenta un determinado nivel de exigencia y la universidad pública tiene la misión de brindar una formación de calidad, por lo cual el examen de ingreso responde a esas expectativas.

OLIMPIADA CIENTÍFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Si $x^2yz^2 = 5^4$ y $xy^2 = 5^5$.

¿A qué es igual xyz?

A)25 B) 125 C) 5 D) 1 E) Ninguno

- *Si hiciésemos todas las cosas de las que somos capaces, nos asombraríamos* (Thomas Edison) Realmente, aunque ahora no lo creas, tienes el talento necesario para triunfar con esa materia (y con muchas otras).
- *Tus talentos y habilidades irán mejorando con el tiempo, pero para eso has de empezar* (¿Martin Luther King).
Así que, no pongas más excusas, estudia tus libros.
- *Los campeones siguen jugando hasta que lo hacen bien* (Billie Jean King)
No te rindas ni te desanimes si suspendes un examen o si no consigues obtener los resultados esperados. Todo en esta vida se basa en esfuerzo y sacrificio. Si tienes esos dos ingredientes, el éxito terminará viviendo por sí solo.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1. Operaciones con números reales

En los números reales existen dos operaciones básicas: la suma y la multiplicación. De ellas se extiende la resta y división como operaciones opuestas de la suma y la multiplicación respectivamente. Marca la respuesta correcta:

Pregunta 1: Simplificar la expresión:

$$\frac{\frac{1+\frac{1}{2}}{3}+\frac{1-\frac{1}{3}}{2}}{\frac{2\frac{1}{2}}{\frac{5}{6}}-\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{6}}}\cdot\left(23\tfrac{1}{2}\div\frac{47}{12}\right)=$$

Respuestas:

a) 8 b) -8 c) 5 d) 6 e) NA

Pregunta 2: Simplificar la expresión:

$$\left[\left(\frac{\sqrt{7}}{2}\right)^{-2}+\frac{\left(\frac{1}{2}-2^{-2}\right)^{-1}}{\left(\frac{8}{\frac{5}{3}}\right)^{-0}+\frac{9^0}{11^{-0}-4^{-1}}}\right]$$

Respuestas:

a) $^{19}/_{7}$ b) $^{20}/_{7}$ c) $^{17}/_{7}$ d) $^{16}/_{7}$ e) NA

Pregunta 3: Realizando operaciones de: $C=\frac{6^3\cdot16^5\cdot248\cdot3^2}{4^6\cdot9^2\cdot62\cdot48\cdot2^9}$, obtenemos como resultado:

Respuestas:

a) 2 b) $^{1}/_{2}$ c) 1 d) 5 e) NA

Pregunta 4: Después de reducir la siguiente expresión se obtiene: $\left(\frac{7\cdot6^x}{36^x+6^{2x+1}}\right)^{-x^{-1}}$

Respuestas:

a) 2 b)4 c) 6 d) 8 e) NA

Actividad 71 . Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Simplifica la expresión: $\frac{8^{-\frac{2}{3}}-\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}}{5^{-0}-16^{-\frac{3}{4}}}$ Respuestas: a) $^{16}/_{7}$ b) $-^{16}/_{7}$ c) $^{5}/_{7}$ d) $-^{5}/_{7}$ e) NA

2) Reducir la siguiente expresión: $\left[\frac{\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{3}\cdot\sqrt{\frac{4}{9}}}{\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}\cdot3^{-3}}\right]-\left[\frac{5}{3}\cdot\sqrt[3]{\frac{1}{5}-\frac{17}{125}}\right]^{-2}$ Respuestas: a) 28 b)6 c) 4 d) 2 e) NA

3) Simplificando la expresión $\frac{4\div0.01+3\div0.001+0.1\div0.01}{4\times0.01+3\times0.001+1704.957\times0.001}$, el resultado es: Respuestas: a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) NA

4) Reduciendo la expresión: $c=\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{-2}-\frac{\left(\frac{8}{9}\right)^{0}}{7^{-0}+\frac{5^{-0}}{4^0-3^{-1}}}\right]^{-1}$, el resultado es: Respuestas: a) $\frac{20}{37}$ b) $\frac{37}{20}$ c) $-\frac{37}{20}$ d) $-\frac{20}{37}$ e) NA

5) El valor numérico de la expresión: $A=\frac{\sqrt[3]{\frac{16\left(\frac{1}{2}\right)^{-3}}{-2-(-4)}}}{\frac{1}{2}-8^{-0}+(-1)^3\left(\frac{2}{3}\right)^{-1}}$ Es: Respuestas: a) 2 b) -2 c) 1/2 d) $-1/2$ e) NA

2. Exponentes y radicales

Un radical es equivalente a una potencia de exponente fraccionario en la que el denominador de la fracción es el índice del radical y el numerador de la fracción es el exponente el radicando. Dos o más radicales se dicen equivalentes si las fracciones de los exponentes de las potencias asociadas son equivalentes.

Pregunta 1: Calcular: $A=E^{-E}$ si se tiene E como:

$E=\left(\frac{3^{2-k}+2^{\frac{1}{k}+2}}{4\sqrt{3^{4-2k}}}\right)^{k}$, el resultado es:

Respuestas: a) 1/2 b) 1/5 c) 2/3 d) 1/4 e) NA

Pregunta 2: Hallar el valor de "n" en la siguiente expresión:

$\frac{\left[\sqrt[\frac{1}{2}]{a^{-3}\left(\sqrt[\frac{1}{4}]{b^3}\right)}\right]^{\frac{1}{6}}}{\sqrt[3]{\sqrt[\frac{1}{2}]{a^6\left(\sqrt{b^{-3}}\right)}}}=\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$, el resultado es:

Respuestas: a) 4 b) 5 c) 6 d) 1 e) NA

Pregunta 3: Simplificar:

$$J=\left[\left(\sqrt[2a]{\frac{1}{a^{2}}}\right)^{8a}\cdot\sqrt[8^{-1}]{\left(\sqrt[8b]{a^{2a}}\right)^{\frac{4b}{a}}+\left(\sqrt[8b]{a^{4a}}\right)^{\frac{2b}{a}}}\right]^{2\left(2^{-3^{3}}\right)^{3^{-3}}}$$

Respuestas: a) 256 b) 526 c) 652 d) 565 e) NA

Pregunta 4 : Simplificando la expresión:

$$\left[\sqrt{8}^{\sqrt{8}^{\sqrt{8}}}\right]^{\left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}-6}}$$

, el resultado es:

Respuestas: a) 8 b) 4 c) 2 d) 1 e) NA

Actividad 72. Resolvemos el siguiente ejercicio en el cuaderno de práctica:

Calcular el valor de: $E=\left[\sqrt{a\sqrt{b\sqrt{c}}}\right]\left[\sqrt{b\sqrt{c\sqrt{a}}}\right]\left[\sqrt{c\sqrt{a\sqrt{b}}}\right]$ Si: $abc=x^{8}$,

Respuestas: a) x^5 b) x^6 c) x^7 d) x^8 e) NA

3. Operaciones con expresiones algebraicas

La adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación de expresiones algebraicas, se conoce con el nombre de operaciones algebraicas. Además, puesto que estas variables, representan números reales, entonces estas operaciones cumplen las propiedades de los números reales.

Pregunta 1: Simplificar la siguiente expresión algebráica:

$$E=\left\{\sqrt{1+\left[\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right]^{2}}\right\}^{-6}-\frac{1}{a^{2}}\sqrt{(a^{2}-x^{2})^{2}+4a^{2}x^{2}}$$

Respuestas: a) 1 b)2 c) 3 d) x e) NA

Pregunta 2: Simplificar la siguiente expresión algebráica: $E=\left\{\left[\left(\frac{20^{a^{2}+1}}{2^{2a^{2}+4}+2^{2a^{2}+2}}\right)^{\frac{1}{2a^{2}}}\right]^{2}\right\}^{2^{0}}$

Respuestas: a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) NA

Pregunta 3: Simplificar la siguiente expresión algebráica:

$$\left[\frac{2-a\cdot a^{\frac{1}{2}}+\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{3}}{\left(a^{\frac{1}{2}}+1\right)^{2}-\left(a-a^{\frac{1}{2}}x^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{\frac{1}{2}}-x^{\frac{1}{2}}\right)^{-1}}\right]^{-3}$$

Respuestas: a) 1/27 b)1/41 c) 1/61 d) 1/81 e) NA

Pregunta 4: Simplificar la siguiente expresión algebráica:

$$E=\left\{\sqrt{1+\left[\left(a^{\frac{2}{3}}-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{3}}\right]^{2}}\right\}^{-6}-\frac{1}{a^{2}}\sqrt{(a^{2}-x^{2})^{2}+4a^{2}x^{2}}$$

Respuestas: a) 1 b)2 c) 3 d) x e) NA

OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Simplificar la expresión algebraica:

$$\frac{(x^{3}-y^{3})(x+y)+(x-y)(x^{3}+y^{3})}{x^{4}-y^{4}}$$

A) 2 B) $x+y$
C) 4 D) x-y
E) Ninguno

Actividad 73. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Sabiendo que: $u=\sqrt[\frac{1+u}{u}]{3}$. Determinar $A=u^{u^{1+u^{-1}}+\frac{3}{u}}$, Respuestas: a) 27 b) 26 c) u d) 1 e) NA

2) Simplificar: $F=\left[\frac{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^{3}+2x+a}{\left(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{a}\right)^{3}-x-2a}\right]^{3}+\frac{\sqrt{(a^{3}+3a^{2}x+3ax^{2}+x^{3})^{\frac{2}{3}}}}{a}$, Respuestas: a) 2 b)26 c) a d) 1 e) NA

3) Simplificar al máximo la siguiente expresión: $\left[\frac{\frac{1}{a}-a}{\left[\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}+1\right]\left[\sqrt[3]{a}+\sqrt[3]{\frac{1}{a}}-1\right]}+\sqrt[3]{a}\right]^{-3}$ Respuestas: a) 3 b)6 c) a d) 1 e) NA

4. Resolución de ecuaciones y sistemas de ecuaciones

Un sistema de ecuaciones es un conjunto de dos o más ecuaciones con varias incógnitas en la que deseamos encontrar una solución común. En esta ocasión vamos a resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos incógnitas

Pregunta 1: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x+y=10 \\ x^{2}+y^{2}=58 \end{cases}$

Respuestas: a) $(3;7)$ y $(7;3)$ b) $(3;3)$ y $(7;3)$ c) $(3;7)$ y $(7;7)$ d) $(3;7)$ y $(3;3)$ e) NA

Pregunta 2: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2+xy+y^2=13 \\ x+y=4 \end{cases}$

Respuestas: a) $(3;1)$ y $(1;3)$ b)$(-3;1)$ y $(1;3)$ c) $(3;1)$ y $(3;-1)$
d) $(-3;-1)$ y $(1;3)$ e) NA

Pregunta 3: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} a+b=1 \\ a^2+ab+b^2=3 \end{cases}$

Respuestas: a) $(2;-1)$ y $(-1;2)$ b)$(-1;2)$ y $(1;2)$ c) $(1;1)$ y $(2;-1)$
d) $(-2;-1)$ y $(1;2)$ e) NA

Pregunta 4: Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2+y^2=4+2xy \\ x+y=8 \end{cases}$

Respuestas: a) $(5;3)$ y $(3;5)$ b)$(3;3)$ y $(5;5)$ c) $(-5;3)$ y $(5;5)$ d) $(3;3)$ y $(5;52)$ e) NA

Actividad 74. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^2+3xy=18 \\ x^2-5y^2=4 \end{cases}$ a) $(3;1)$ y $(-3;-1)$ b)$(-3;1)$ y $(1;3)$ e) NA

2) Resolver el siguiente sistema: $\begin{cases} x^3-y^3=-56 \\ x-y=-2 \end{cases}$ a) $(2;4)$ y $(-4;2)$ b)$(4;2)$ y $(2;-4)$ e) NA

5. Desigualdades e inecuaciones

Desigualdades Condicionales o Inecuaciones: son aquellas que se verifican sólo para determinados valores o sistema de valores atribuido a sus incógnitas y para los cuales están definidos sus miembros.

Pregunta 1: Si $x \in \left(\frac{2}{5};6\right)$. Hallar la suma del máximo y mínimo valor que puede tomar la expresión: P= $\frac{6+x}{x}$

Respuestas: a) 18 b) 2 c)16 d) 17 e) NA

Pregunta 2: Hallar la suma de los valores enteros de x que satisfacen la inecuación: $(x-1)^2+|x-1|<12$

Respuestas: a) 5 b) 2 c)6 d) 7 e) NA

Actividad 75. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Si $x \in [2;4]$ y $\left(\frac{x+3}{x+2}\right) \in [a;b]$. Determinar el valor $a+b$.

Respuestas: a) $\frac{29}{12}$ b) $\frac{12}{29}$ c) $\frac{-29}{12}$ d) $\frac{29}{-12}$ e) NA

2) ¿Cuántos valores enteros de X verifican la inecuación? Resolver: $x^2-3|x|-10<0$

Respuestas: a) 9 b)11 c) 10 d) 1 e) NA

6. Ecuaciones exponenciales y logarítmicas

Un sistema de ecuaciones exponenciales es aquel sistema en los que las incógnitas aparecen en los exponentes. Igualamos exponentes y resolvemos el sistema. En primer lugar, aplicamos las propiedades de las potencias del producto o el cociente, para quitar las sumas o restas de los exponentes.

Pregunta 1: Hallar el valor numérico de:

$$E=\sqrt{3^{2+\frac{1}{2}\log_3 16}\cdot 9^{4\log_{81} 2}}$$

Respuestas: a) 24 b)22 c)26 d) 27 e) NA

Pregunta 2: Hallar la solución de la ecuación:

$$\log_{\sqrt{5}}\{5\log_3[1+\log_4(x+3)]\}=2$$

Respuestas: a) 13 b)12 c)16 d) 17 e) NA

Pregunta 3: Resolver la siguiente ecuación.

$$2^x + 2^{x+1} + 2^{x+2} + 2^{x+3} + 2^{x+4} = 248$$

Respuestas: a) 3 b)2 c)6 d) 7 e) NA

Pregunta 4: Resolver el siguiente sistema de ecuación logarítmica y exponencial.

$$\begin{cases} 4^x = 16y & ① \\ 4y = 2^{x+1} & ② \end{cases}$$

Respuestas: a) $(3;4)$ b)$(-3;1)$ e) NA

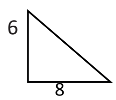
Actividad 76. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Hallar el valor numérico de: $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\log_3\left[\left(\log_2 \frac{1}{\sqrt{2}}\right) + 6\log_2\sqrt{2} + \log_2 32 + \log_4 8\right]$,
Respuestas: a) 1 b)2 c) NA
2) Hallar la solución de la ecuación: $\log(1 + x^2 + 2x) - \log(x^2 - 3) = 2\log(x+1)$,
Respuestas: a) 2 b)1 c) NA
3) Resolver la siguiente ecuación: $x^{x^{x^{2}-1}} = x^{x^5}$, Respuestas: a) 25 b)22 c)26 d) 27 e) NA
4) Resolver el siguiente sistema de ecuación logarítmica y exponencial: $\begin{cases} 25^{x^2} = \left(\sqrt{5}\right)^{y^2} & ① \\ \ln x = 2\ln y & ② \end{cases}$
Respuestas: a) $(1/4; 1/2)$ b)$(-1/4; 1/2)$ e) NA

7. Resolución de triángulos rectángulos y oblicuángulos

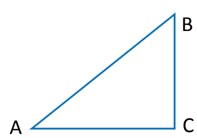
Triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo de 90° y 2 de sus lados reciben el nombre de catetos y el lado más grande de hipotenusa. Triángulo Oblicuángulo es el que no tiene ningún ángulo de 90° y se dividen en Acutángulo y Obtusángulo.

Pregunta 1: Calcular la hipotenusa de un triángulo rectángulo cuyos catetos miden 6 y 8:



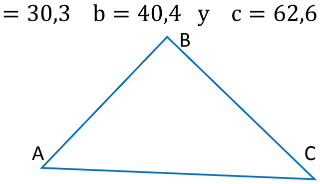
Respuestas: a) 10 b)12 c)16 d) 17 e) NA

Pregunta 2: Resolver el triángulo rectángulo en el cual: $\hat{A} = 35^\circ 10'$ y $c = 72{,}5$:



Respuestas: $\hat{B} = 54^\circ 50'$; $a = 41{,}7$; $b = 59{,}3$ F o V

Pregunta 3: Resolver el triángulo oblicuángulo ABC, dados:
a = 30,3 b = 40,4 y c = 62,6 :



Respuestas: $\hat{A} = 23^\circ$ $\hat{B} = 32^\circ$ y $\hat{C} = 124^\circ$ F o V

Actividad 77. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1. Resolver el triángulo rectángulo en el cual: $\hat{A} = 58^\circ 53'$ y $a = 24{,}36$
2. Resolver el triángulo rectángulo en el cual: $a = 43{,}9$ y $b = 24{,}3$
3. Resolver el triángulo oblicuángulo ABC, dados: $b = 321$; $\hat{A} = 75^\circ 20'$; $\hat{C} = 38^\circ 30'$
4. Resolver el triángulo oblicuángulo ABC, dados: $b = 215$; $c = 150$; $\hat{B} = 42^\circ 40'$

8. Identidades y ecuaciones trigonométricas

Las identidades trigonométricas son ecuaciones que involucran las funciones trigonométricas que son verdaderas para cada valor de las variables involucradas. Puede usar las identidades trigonométricas junto con los métodos algebraicos para resolver las ecuaciones trigonométricas.

Pregunta 1: Simplificar la siguiente expresión:

$$x = \frac{(\sin\theta + \cos\theta)^2 - 1}{(\sin\theta - \cos\theta)^2 - 1}$$

Respuestas: a) -1 b)1 c)0 d) -2 e) NA

Pregunta 2: Simplificar la siguiente expresión:

$$x = \frac{Cot^2\beta + 1}{tan^2\beta + 1}$$

Respuestas: a) $Cot^2\beta$ b) $Cot^3\beta$ c) $Cot^1\beta$ e) NA

Pregunta 3: Simplificar la siguiente expresión:

$$x = \sin(30^\circ + \alpha) + \sin(30^\circ - \alpha)$$

Respuestas: a) $\cos\alpha$ b) $\sin\alpha$ c) $\tan\alpha$ d) e) NA

Pregunta 4: Simplificar la siguiente expresión:

$$x = \frac{(\cos\omega + \tan\omega \cdot \sin\omega)^2 - 1}{sin^2\omega}$$

Respuestas: a) $sec^2\omega$ b) $Cot^3\beta$ c) $Cot^1\beta$ e) NA

Actividad 78. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

1) Simplificar la siguiente expresión: $x = \frac{csc^2\theta \cdot \cot\theta - cot^3\theta + \sec\theta - \cot\theta}{\csc\theta}$ Respuesta: $\tan\theta$ F o V

2) Simplificar la siguiente expresión: $x = (\sin\beta + \cos\beta)^2 + (\sin\beta - \cos\beta)^2$ Respuesta: 2 F o V

9. Progresiones y análisis combinatorio

- Una progresión aritmética es toda sucesión en el cada término después del primero se obtiene sumando al anterior una cantidad constante llamada razón.

- Una progresión geométrica es una sucesión de números, en la que cada término después del primero se obtiene multiplicando el término anterior por una cantidad constante llamada razón.

Ejemplo: Un padre de familia desea tener un capital para costear los estudios universitarios de su hijo y empieza a ahorrar a la par que su hijo comienza el primer curso de secundaria. Si el primer ahorro es de Bs. 25 y cada mes posterior ahorra Bs 5 más, calcula el monto del depósito del último mes y a cuánto asciende lo ahorrado cuando su hijo sale bachiller (anualmente el padre de familia deposita 12 cuotas).

Datos

$U_1 = 25$

$U_2 = 30$

$r = 5$

$U_{72} = 380$

$U_n = U_1 + (n-1)r$

$U_{72} = 25 + (72-1)5$

$U_{72} = 380$

$S_n = \frac{(U_1+U_n)n}{2}$

$S_{72} = \frac{(25+380)72}{2}$

$S_{10} = 14580$ Bs Respuesta

Actividad 79. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

Progresiones aritméticas

1) El 32^0 término de una progresión aritmética es – 18 y la razón 3. Hallar el 1^er.^ término.

2) El 92^0 término de una progresión aritmética es 1050 y el 1^er.^ término – 42. Hallar la razón.

3) ¿Cuántos términos tiene la progresión $\div\, 5; \frac{16}{3}; \ldots..18$?

4) El cuarto término de una progresión aritmética es 10, y el sexto es 16. Escribir la progresión.

5) Hallar la suma de los quince primeros números acabados en 5.

Progresiones geométricas

1) En una progresión geométrica. Hallar el 6^0 término de $:: 1; \frac{2}{5}; \frac{4}{25}; \ldots..$

2) El 5^0 término de una progresión geométrica es $\frac{16}{125}$ y el 6^0 término $\frac{32}{625}$. Hallar el primer término.

3) Hallar la razón de $:: -5; \ldots \ldots.640$ de 8 términos.

4) Halla la suma de los seis primeros términos de una progresión geométrica de razón positiva en la que:

$U_2 = 10 \;\; y \;\; U_4 = 250$

5) El tercer término de una progresión geométrica vale 80, y la razón es 4. Calcula la suma de los cinco primeros términos.

- La combinatoria o análisis combinatorio es la parte de las matemáticas que estudia las ordenaciones y agrupaciones de los elementos. Sus aplicaciones son enormes, sobre todo en la informática, la estadística y el cálculo de probabilidades. En la vida cotidiana tenemos numerosos ejemplos de aplicación.

Sea $n \; y \; k$ números enteros positivos tales que $k \leq n$. Se denomina ***numero combinatorio o coeficiente binomial*** de "$n \; sobre \; k$", al símbolo $\binom{n}{k}$ definido por: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}$. Los elementos de un número combinatorio se llaman numerador y denominador, también se conoce con el nombre de índice superior (n), e índice inferior (k).

Ejemplo: $\binom{7}{3} = \frac{7!}{3!\cdot(7-3)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{3\cdot2\cdot1\cdot(4)!} = \frac{7\cdot6\cdot5\cdot4}{4\cdot3\cdot2\cdot1} = \frac{7\cdot5}{1} = 35$

Ejemplo: $\binom{4}{2} = \frac{4!}{2!\cdot(4-2)!} = \frac{4\cdot3\cdot2\cdot1}{2\cdot1\cdot(2)!} = \frac{4\cdot3}{2\cdot1} = \frac{2\cdot3}{1} = 6$

- El factorial de un número entero positivo n, denotado por n!, es el producto de todos los números naturales, anteriores o iguales a él es decir: n!=1·2·3·4·5·6·…·n si: n>1

Ejemplo: Calculamos el valor de "n" , si: $\frac{(n+3)!(n+5)!}{(n+3)!+(n+4)!} = 120$

$$\frac{(n+3)!(n+5)(n+4)!}{(n+3)!+(n+4)(n+3)!} = 120$$

$$\frac{(n+3)!(n+5)(n+4)!}{(n+3)[1+(n+4)]!} = 120$$

$$\frac{(n+3)!(n+5)(n+4)!}{(n+3)[n+5]!} = 120$$

$$(n+4)! = 5!$$
$$n+4 = 5$$
$$n = 5-4$$
$$n = 1$$

El valor que satisface la ecuación es 1

OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Simplificar: $A + \frac{\frac{A}{B}+1}{\frac{A}{B}-1}$;

sabiendo que A=1/2; B=1/3

4 B) 1/2 C) 7/8

D) 1/7 E) 11/2

- Las permutaciones, es variar la disposición u ordenar dos o más elementos. Es necesario precisar si estas cosas son o no indistinguibles, para asegurar que la nueva configuración sea diferente al original

Ejemplo: De cuántas maneras se puede distribuir 5 monedas de 5 bolivianos y 7 monedas de 2 bolivianos, entre 12 estudiantes de primaria de forma que a cada uno de ellos le corresponda una sola moneda.

M_1=5 bolivianos
M_2=7 bolivianos
M_3=12 estudiantes de primaria

$$P\binom{5;7}{12} = \frac{12!}{5!\cdot 7!} = \frac{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1}{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1} = \frac{12\cdot 11\cdot 2\cdot 3}{1} = 792$$

- Existen 792 maneras de que los 12 estudiantes de primaria tengan a la mano una moneda de 5 bolivianos.
- Existen 792 maneras de que los 12 estudiantes de primaria tengan a la mano una moneda de 2 bolivianos.

10. Cálculo del término n-simo aplicando el Binomio de Newton

Binomio de Newton

Se denomina binomio de Newton a la potencia de un binomio cualquiera de la forma:

$(a+b)^n$ (Todos los signos son positivos) y $(a-b)^n$ (se intercalan los signos)

Descomponer: en general se presenta de esta manera el binomio de Newton

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1\cdot 2}a^{n-2}b^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}a^{n-3}b^3 + \ldots\ldots + nab^{n-1} + b^n$$

Término general de un binomio: $(a+b)^n$

$$t_r = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)\cdot\cdots\ldots\ldots\cdot(r-1)\,factores}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\ldots\ldots\cdot(r-1)}\cdot a^{n-(r-1)}\cdot b^{(r-1)}$$

Actividad 80. Resolvemos los siguientes ejercicios en el cuaderno de práctica:

Pregunta 1: Encontrar el 5to. Término del desarrollo de: $\left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}y^3\right)^9$

Respuestas: a) $\frac{7}{144}x^{10}y^{12}$ b) $\frac{7}{144}x^{10}y^{11}$ c) $\frac{7}{144}x^{11}y^{12}$ d) $\frac{7}{144}x^{10}y^{10}$ e) NA

Pregunta 2: Encontrar el 4to. Término del desarrollo de: $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{z}\right)^{11}$

Respuestas: a) $-55x^4z$ b) $55x^4z$ c) $-55x^4$ d) $-55z$ e) NA

OLIMPIADA CIENTIFICA ESTUDIANTIL PLURINACIONAL BOLIVIANA

Simplificar:

$\sqrt{5+2\sqrt{6}} - \sqrt{5-2\sqrt{6}}$

A) $\sqrt{2}$ B) 2 C) $2\sqrt{2}$

D) 4 E) 8

Pregunta 3: Encontrar el término medio del desarrollo de: $\left(\frac{2}{9}\cdot\sqrt{x} - \frac{3}{4}\sqrt{y}\right)^8$

Respuestas: a) $\frac{1120}{81}x^2y^2$ b) $-\frac{1120}{81}x^2y^2$ c) $-\frac{1120}{81}x^2$ d) $\frac{1120}{81}y^2$ e) NA

Pregunta 4: Encontrar el término central del binomio de: $\left(\frac{3}{4}m^5 - \frac{4}{3}n^6\right)^{10}$

Respuestas: a) $-252m^{25}n^{30}$ b) $252m^{25}n^{30}$ c) $-252m^{25}n^{25}$ d) $252m^{30}n^{25}$ e) NA

11. Resolución de exámenes para diferentes instituciones superiores

Simplificamos: $M=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^3}{(c-a)(c-b)}$

$$M=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^3}{(b-c)(-1)(a-b)}+\frac{c^3}{(-1)(a-c)(-1)(b-c)}$$

$$M=\frac{a^3}{(a-b)(a-c)}-\frac{b^3}{(b-c)(a-b)}+\frac{c^3}{(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{a^3(b-c)-b^3(a-c)+c^3(a-b)}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^3(b-c)-ab^3+b^3c+ac^3-bc^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{a^3(b-c)-ab^3+ac^3+b^3c-bc^3}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^3(b-c)-a(b^3-c^3)+bc(b^2-c^2)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{a^3(b-c)-a(b-c)(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)(b-c)}{(a-b)(a-c)(b-c)}$$

$$M=\frac{(b-c)[a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)]}{(a-b)(a-c)(b-c)}=\frac{a^3-a(b^2+bc+c^2)+bc(b+c)}{(a-b)(a-c)}$$

$$M=\frac{a^3-ab^2-abc-ac^2+b^2c+bc^2}{(a-b)(a-c)}=\frac{a^3-ab^2-abc+b^2c-ac^2+bc^2}{(a-b)(a-c)}$$

$$M=\frac{a(a^2-b^2)-bc(a-b)-c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)}=\frac{a(a+b)(a-b)-bc(a-b)-c^2(a-b)}{(a-b)(a-c)}$$

$$M=\frac{(a-b)[a(a+b)-bc-c^2]}{(a-b)(a-c)}=\frac{a^2+ab-bc-c^2}{(a-c)}=\frac{a^2-c^2+ab-bc}{(a-c)}$$

$$M=\frac{(a+c)(a-c)+b(a-c)}{(a-c)}=\frac{(a-c)[(a+c)+b]}{(a-c)}=(a+c)+b=a+b+c$$

Martha Sofía tiene 32 años. En 10 años la edad de Martha Sofía será igual a la suma de las edades de sus tres hijos tendrán entonces. En el presente, ¿cuánto suman las edades de los tres hijos de Martha Sofía?

Simplificamos la siguiente expresión:

$$E=\frac{\left(b+\frac{1}{a}\right)^x\left(a-\frac{1}{b}\right)^z}{\left(a+\frac{1}{b}\right)^x\left(b-\frac{1}{a}\right)^z},\quad E=\frac{\left(\frac{ab+1}{a}\right)^x\left(\frac{ab-1}{b}\right)^z}{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^x\left(\frac{ab-1}{a}\right)^z}=\frac{\left(\frac{ab+1}{a}\right)^x}{\left(\frac{ab+1}{b}\right)^x}\cdot\frac{\left(\frac{ab-1}{b}\right)^z}{\left(\frac{ab-1}{a}\right)^z}=\left(\frac{\frac{ab+1}{a}}{\frac{ab+1}{b}}\right)^x\cdot\left(\frac{\frac{ab-1}{b}}{\frac{ab-1}{a}}\right)^z$$

$$E=\left[\frac{b(ab+1)}{a(ab+1)}\right]^x\cdot\left[\frac{a(ab-1)}{b(ab-1)}\right]^z=\left(\frac{b}{a}\right)^x\cdot\left(\frac{a}{b}\right)^z=\left(\frac{b}{a}\right)^x\cdot\left(\frac{b}{a}\right)^{-z}=\left(\frac{b}{a}\right)^{x-z}$$

Actividad 81. Resolvemos el siguiente examén de ingreso a una universidad.

Carreras: economía, contaduría pública, administración de empresas
Area: matematica
Tiempo límite: 70 minutos **Numero de preguntas:** 10
Marque su respuesta en el inciso, seleccionando en la hoja de respuesta: solo debe elegir una sola opción.

1.- Un funcionario de la universidad gana Bs 200 diarios y gasta Bs 500 semanales, cuantos días tendrá que trabajar para comprar con sus ahorros un auto que cueste Bs 27.000

a) 210	b) 205	c) 200	d) 215	e) Ninguno

2.- El rango de la función: $y = 8 - x^2$

a) $[0,8]$	b) $[8,+\infty[$	c) $]-\infty,8]$	d) $[-8,5]$	e) Ninguno

3.- Juan tiene Bs 120 y gasta consecutivamente: $\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{1}{4}$ de lo que iba quedando. Determina "a" cantidades que le queda.

a) 20	b) 40	c) 30	d) 35	e) Ninguno

4.- Determine el valor de: $\left[a^{-\frac{3}{2}}b\cdot(ab^{-2})^{-\frac{1}{2}}(a^{-1})^{-\frac{2}{3}}\right]^3$

a) 1	b) -1	c) 2	d) -2	e) Ninguno

5.- Una persona hace un trabajo en 3 días y otra persona B puede hacer el mismo trabajo en 5 días. Determine el tiempo que tardarían A y B conjuntamente haciendo el mismo trabajo.

a) $\frac{14}{5}$	b) $\frac{13}{8}$	c) $\frac{15}{12}$	d) $\frac{15}{8}$	e) Ninguno

6.- La suma de las soluciones del sistema: $\begin{cases} pq+6p-370=0 \\ p-0.2q-3.8=0 \end{cases}$

a) 31	b) 51	c) 21	d) 41	e) Ninguno

7.- Dos fruticultores llevan al mercado 100 sandias, una de ellas tenía mayor número de sandias que el otro, no obstante, ambos obtuvieron igual suma de dinero, uno de ellos dice al otro: Si yo hubiera tenido la cantidad de sandias que tuviste y tú la cantidad que yo tuve, hubiésemos recibido Bs 15 y Bs $\frac{20}{3}$ ¿Cuántas Sandias tenía cada uno?

a) 30 y 70	b) 45 y 95	c) 20 y 80	d) 40 y 60	e) Ninguno

8.- La suma de los primeros 5 términos de la progresión: $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{6}$; $\frac{1}{18}$ es:

a) $\frac{162}{121}$	b) $\frac{122}{153}$	c) $\frac{162}{121}$	d) $\frac{121}{160}$	e) Ninguno

9.- Los ahorros en 3 años de una persona están en progresión aritmética. Si en los 3 años ha ahorrado 2.400 Sus, y el primer año ahorro la mitad de lo que ahorro el 2do año. Determina cuanto ahorro cada año.

a) 300,600,1500	b) 400,800,1200	c) 500,1000,900	d) 450,900,1050	e) Ninguno

10.- La suma de la solución de: $1 + 2\log(x) = \log(x + 2)$ mas $\frac{13}{2}$ *es* 7 . Calcular el valor de x:

a) $\frac{1}{3}$	b) $\frac{2}{3}$	c) $\frac{3}{2}$	d) 2	e) Ninguno

Nota. Comprueba las respuestas si son correctas.

Desafío

Juegan blancas y dan jaque mate en dos jugadas.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 82. Reflexionemos respecto a la importancia de estudiar con responsabilidad y respondemos las siguientes preguntas:
1) ¿Como realizamos nuestras prácticas?
2) ¿Resolvemos los ejercicios de manera autónoma o esperamos que termine nuestro compañero para copiar?
3) ¿Será que nuestros esfuerzo para estudiar es muy limitado?
4) ¿En qué áreas o situaciones, estudias a conciencia para fortalecer la formación integral?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

En el Sistema Educativo Plurinacional de Bolivia los estudiantes bachilleres se preparan para dar el examen de ingreso a las universidades e institutos.

Actividad 83. Realizamos una estrategia de estudio para rendir el examen de ingreso, puedes guiarte en las siguientes preguntas:
1) ¿Por dónde debo empezar?
2) ¿Qué material de apoyo utilizar?
3) ¿Cuándo debo empezar a prepararme?

LABORATORIO MATEMÁTICO

¡INICIEMOS DESDE LA PRÁCTICA!

Actividad 84. En los años de escolaridad hemos tenido la oportunidad de visitar e ingresar a un campo deportivo similar al de la fotografía, en el cual, desde el punto de vista de lugares geométricos y secciones cónicas, se pueden distinguir:

circunferencias, parábolas y rectas, es en este sentido que podemos denotar como origen de coordenadas el lugar donde se realiza el “tiro de esquina”, cada un metro puede ser nuestra medición tanto horizontal como vertical y así tenemos nuestra cancha polifuncional plasmada en coordenadas. Posteriormente utilizando cintas métricas adecuadas, cuadernos de apunte y trabajando en equipos calculemos:

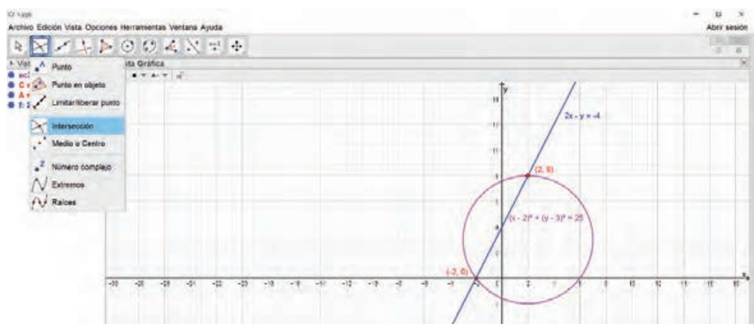
1) La intersección de la circunferencia en la parte central del campo deportivo y la recta trazada en el centro de la misma, recuerda anotar las coordenadas de intersección.

2) La intersección de la parábola (del campo específico para lanzamiento válido por tres puntos en básquetbol) y la recta que delimita la cancha de voleibol, observarás en la fotografía anterior que tendríamos dos puntos de intersección.

¡CONTINUEMOS CON LA TEORÍA!

1) GeoGebra

Como aprendimos en la anterior gestión a utilizar Geogebra en el área de matemática, en este contenido analizaremos los siguientes problemas con lugares geométricos.



1) Determinamos gráficamente la posición relativa de una recta y una circunferencia, si la recta tiene por ecuación $x - 2y + 1 = 0$ y la circunferencia tiene ecuación es $(x-2)^2 + (y-4)^2 = 25$.

Realizamos la resolución gráfica utilizando Geogebra:

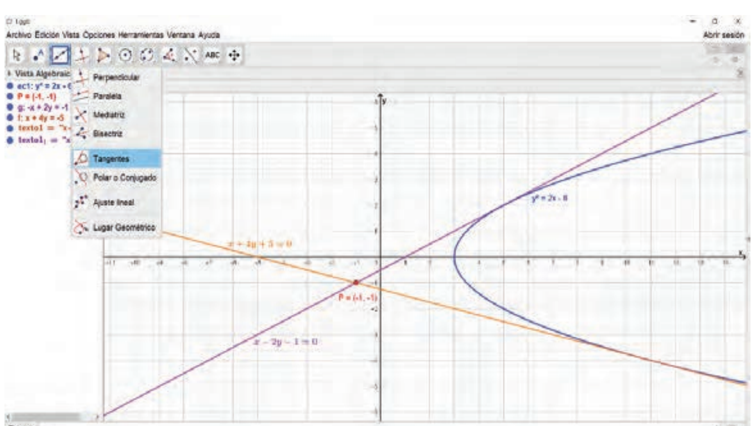
Analíticamente para determinar los puntos de intersección, debemos resolver el sistema de ecuaciones formado por las ecuaciones de los lugares geométricos:

$$\begin{cases} x - 2y + 1 = 0 \\ (x-2)^2 + (y-4)^2 = 25 \end{cases}$$

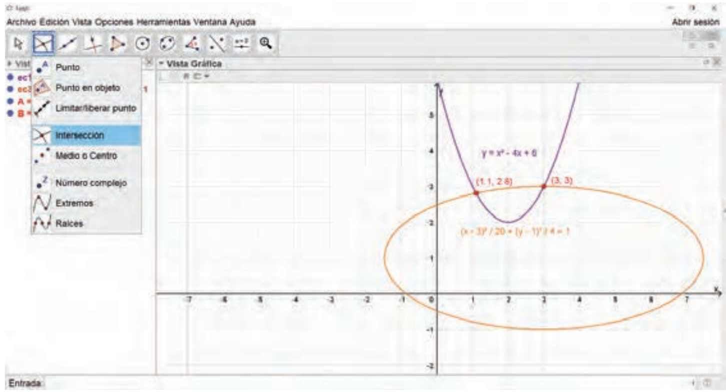
que dará como resultado las coordenadas de los puntos de intersección, de tal manera que nuestra gráfica mostrará estos resultados con antelación. Gráficamente también podemos determinar la ecuación de la recta tangente a una parábola, a partir de un punto dado, utilizando GeoGebra.

2) Establecer las ecuaciones de las rectas tangentes a la parábola $y^2 = 2x - 6$, trazadas desde el punto P(-1,-1).

Para determinar las ecuaciones de forma analítica, utilizamos el procedimiento aprendido en el primer trimestre.



3) Determinamos los puntos de intersección de la parábola y la elipse. Graficamos cada lugar geométrico y encontramos los puntos de intersección.



2. Taller de pensamiento lógico

2.1. Ajedrez VI

Hay que aclarar que, estas reglas básicas del ajedrez, no abarcan todas las situaciones posibles que pueden presentarse durante una partida (de ahí la importancia del arbitraje), pero son suficientes para establecer la secuencia básica del juego.

El jugador con las piezas blancas mueve primero

Decidir si jugarás con las piezas negras o blancas del ajedrez, no es una cuestión de gusto, sino que hay un componente estratégico en cada decisión. En primer lugar, deberás tener en cuenta que el jugar con las piezas blancas siempre mueve primero.

Tu primer movimiento es crucial y, como consejo, debe responder a una estrategia; para ello, debes conocer muchas aperturas modernas del ajedrez, las cuales te permitirán sacar la delantera.

Cada jugador mueve 1 de sus piezas en su turno

En este aspecto, las reglas de ajedrez son claras, no puedes mover más de una pieza en tu turno.

Gana el jugador que logre hacer Jaque Mate al oponente

El objetivo del juego es muy sencillo: capturar al rey enemigo y lograr un jaque mate. Durante la partida, verás varias situaciones en las que el rey estará amenazado, sin embargo, puede librarse de la captura; a eso se le llama jaque. Sobre esta situación, hay 2 puntos que aclarar:

Ningún jugador puede exponer a su propio rey a un jaque mate

Ningún jugador puede mover una pieza que ponga a su propio rey en jaque mate. Si detectas que tu contrincante deja expuesto a su rey a un jaque mate, en tu siguiente turno debes prevenirlo. No importa que esta situación te beneficie (pues prácticamente ganarías llegado tu turno), puesto que las reglas del ajedrez son claras y, esa acción (exponer tu propio rey), es un movimiento prohibido.

Sin embargo, si quieres jugar ajedrez online, no tienes que preocuparte por esto, puesto que el juego no te permitirá mover la pieza que quieres. Esto se debe a que, como es un movimiento prohibido y la plataforma online tiene las reglas del ajedrez, bloquea el movimiento automáticamente. ¿Te imaginas un modelo de juego que permita tener una pieza traidora que ignore esta regla?

El jugador que declara jaque mate debe explicar la situación

Al anunciar jaque mate, además de permitir que tu oponente evalúe la situación, debes explicar por qué es un jaque mate (sobre todo si eres principiante o juegas contra un novato), para garantizar que tu oponente no puede realizar ninguna acción que salve al rey según las reglas del ajedrez.

Recuerda que, al hacer jaque mate, no estás capturando al rey enemigo (no mueves ninguna de tus piezas al espacio del rey oponente), sino que bloqueas el movimiento del rey contrario; es decir, lo arrinconas, por lo que es el jugador oponente quien debe rendir al rey (acostando la pieza).

Por ello, en cuanto declares jaque mate, si tu oponente no se ha percatado de esta situación, lo más probable es que quiera entender los motivos de tu jaque mate. Además, esto te servirá para demostrar que conoces las reglas básicas del ajedrez. Con esto, ya tenemos cubierto lo que serían las reglas del ajedrez para principiantes, vamos a lo que sigue.

Reglas avanzadas del ajedrez

Con lo anterior, ya tienes lo suficiente para jugar tus partidas con amigos y familiares; sin embargo, si quiere competir, el formato competitivo incluye varias reglas del ajedrez que abarcan diferentes situaciones.

El uso del reloj

¿Has visto todas esas películas en que juegan ajedrez y golpean un reloj? En algunos formatos, este sirve para medir el tiempo de cada jugador, es decir, cuánto tarda en realizar un movimiento.

Al ser un juego estratégico, muchos jugadores se toman su tiempo para pensar, analizar la estrategia del oponente y considerar diferentes opciones de movimiento según las reglas del ajedrez. Por ello, el reloj se torna indispensable en el caso de las competencias. ¿Te imaginas esperar 30 minutos para que el oponente tome una decisión?

Entonces, la cuestión es que el reloj no solo está ahí para admirar a los grandes campeones de ajedrez, que parece que juegan tenis con las piezas, pues responden casi al instante cada acción del oponente. El reloj existe porque, en algunos torneos, las reglas del ajedrez establecen que cada jugador dispone de 2 minutos para realizar su movimiento.

En competencia, las reglas del ajedrez dictan que el reloj es el inicio del tiempo de comparecencia, que debe ser cero. Además, el reloj marca la caída de bandera; es decir, el final de un turno. No puedes realizar ningún movimiento fuera de tu tiempo y si es necesaria una reubicación de piezas, se hace en el tiempo del jugador.

Irregularidades

Juraría que escuché que pensaste: ¿reubicación de piezas? Sí, en efecto, las reglas del ajedrez consideran esta posibilidad. Pero ojo, no es cuando te arrepentiste de tu movimiento después de hacerlo, porque una “ficha tocada, es una ficha jugada”. Las reglas del ajedrez permiten una reubicación de piezas cuando se detecta y establece una irregularidad.
Por ejemplo: imagina que tu oponente mueve una pieza y al hacerlo deja a su rey regalado para un jaque mate, pero ¡tú no te das cuenta! Y realizas otra acción en tu turno. Luego, tu oponente analiza las piezas de ajedrez en el tablero y nota que realizó un movimiento prohibido.

Quizá tu oponente prefiera quedarse callado, pensando que te habría regalado la victoria, pero no, las reglas del ajedrez no funcionan así. En ese caso, quien haya detectado la situación, debe informarla. Recuerda que exponer a tu propio rey es un movimiento prohibido, por lo que, en primer lugar, nunca debió pasar.

En este caso, las piezas se deben reubicar a su posición inicial, antes de que ocurra el movimiento prohibido. Como esta situación, las reglas del ajedrez consideran dos situaciones como irregularidades comunes que ameritan reubicación:

Jugar con piezas equivocadas antes de realizar 10 movimientos. Por ejemplo, esto sucede si en el torneo te tocaban las piezas negras, pero te sentaste a jugar con las piezas blancas.

Si algunas piezas han sido desplazadas (por accidente) de sus respectivas casillas al realizar otros movimientos.
Para cualquier otra situación, las reglas del ajedrez establecen que debe intervenir el arbitraje. Para ello, estas situaciones requieren que seas capaz de entender problemas complejos para solucionarlo. En ese sentido, si requieres de esas habilidades, te recomendamos nuestro curso resolución de problemas complejos.

Anotación de los movimientos

Debo tener algo en el oído porque juraría que te escuché preguntar: ¿y cómo harán para recordar cómo estaban las piezas y reubicarlas? En competitivo, las reglas de ajedrez incluyen un seguimiento llamado “anotación de los movimientos”, que debe mantener cada jugador.

Quizá, si juegas con amigos en tu casa, consideres innecesario contar con una libreta o formato para que cada jugador haga sus anotaciones, pero en competencias es muy importante y es la principal herramienta para hacer una aclaración, denunciar un movimiento prohibido o pedir partida tablas.

Las reglas del ajedrez establecen que cada jugador debe contar con 30 segundos extra en su límite de tiempo para realizar sus anotaciones o, por el contrario, asignar a otras personas para que hagan estas anotaciones de sus movimientos.

Complejo, ¿verdad? Pues bien, confieso que nunca me he visto en la necesidad de hacer este seguimiento, por un lado, porque jugando en línea la misma plataforma hace las anotaciones y, por otro, porque cuando juego con amigos solemos hacer un juego rápido. Sin embargo, es importante que tengas en cuenta esto para progresar y competir. Las anotaciones de movimiento se hacen en notación algebraica como explicaremos a continuación:

Notación algebraica

Para que esta regla del ajedrez avanzado quede clara, debes saber qué es la notación algebraica, puesto que es el único formato que reconoce la FIDE. Esta notación tiene sus propias especificaciones dentro de las reglas del ajedrez, pero daré un pequeño resumen:

- Cada pieza se indica con su abreviatura y en mayúscula. Ejemplo: caballo = C; torre = T; dama = D.
- Los peones no se indican con la primera letra, solo por anotación. Ejemplo: g4 se entiende como peón a espacio g4.
- La posición se establece en el cruce de la fila y columna que ocupe la pieza. Las columnas se indican con letra una letra en minúscula (de la a hasta la h), y las filas con un número (del 1 al 8).
- El movimiento se anota colocando la inicial de la pieza (menos el peón) en mayúscula junto con la posición final. Por ejemplo: Ae5 (Alfil a casilla e5); no es necesario anotar la posición de origen.

Partida tablas

Esto es muy importante: nadie gana en partida tablas. Las reglas del ajedrez establecen que, una partida tablas, es una derrota mutua y ambos jugadores deben estar de acuerdo para declarar tablas.

Lo aclaro porque de niño viví varias situaciones de acorralamiento con mi oponente buscando “ganar” por tablas, pues perseguía a mi rey con el mismo movimiento y ponía la excusa de que mi rey no tenía escapatoria.
Las reglas del ajedrez definen que la partida es tablas cuando la pieza de un jugador ocupa la misma posición por tercera vez (no necesariamente por repetición de movimientos).

A ningún jugador le conviene buscar tablas. Si acorralas al rey, bloqueando las opciones de movimiento de tu oponente, pero tú sí cuentas con varias opciones de movimiento, cambia tu estrategia y no busques tablas.
De hecho, hay torneos donde se establece en las reglas de ajedrez que las tablas están prohibidas, si se presenta la situación, se considera como irregularidad.

Puntuación

En un torneo multitudinario, es importante llevar un registro de tus puntos. Estos se establecen de la siguiente forma:

- El jugador que gana su partida, recibe 1 punto.
- El jugador que pierde su partida, recibe 0 puntos.
- El jugador que entabla su partida, recibe medio punto (0.5).

Curiosamente, las reglas del ajedrez establecen que no se pueden dar otras fracciones de punto, como 3/4 o 1/4.

Conducta

El primer aspecto que consideran las reglas del ajedrez sobre la conducta es el siguiente: “Los jugadores no actuarán de forma que deshonren el juego de ajedrez”. Entre otras cosas, dentro de las reglas del ajedrez que refieren a la conducta de los participantes, se establece que está prohibido distraer o molestar a tu contrincante, lo cual incluye que imposibilidad de hacer reclamos, ofertas de tablas que no proceden o fuertes ruidos en la zona de juego. Así que, si tu estrategia no funciona, bajo ningún motivo vayas a voltear la mesa.

Arbitraje

En la competencia, las reglas del ajedrez otorgan al árbitro muchas facultades y responsabilidades, la primera de ellas es que debe velar por que se cumplan las reglas del ajedrez. Por ello, un árbitro, debe ser alguien comprometido con el cumplimiento de reglas, que sepa identificar irregularidades al momento. Hay mucho que estudiar para ser un buen árbitro, como ser disciplinado y dormir bien para no perderse ningún movimiento rápido.

Reglas del ajedrez rápido y ajedrez relámpago

Ya conoces las reglas básicas del ajedrez y has dado un vistazo a las reglas avanzadas, con eso es más que suficiente para empezar tus partidas. Sin embargo, hay formatos especiales de juego, para cuando dispones de poco tiempo o te gusta vivir al extremo.

Ajedrez rápido

El ajedrez rápido hace pocas variaciones en cuanto a las reglas del ajedrez en general. Principalmente, limita el tiempo de juego, de forma que el total de movimientos no debe superar un tiempo fijo de menos de 10 minutos, pero no más de 60 minutos (para cada jugador).

Ajedrez relámpago

Al igual que el anterior, el ajedrez relámpago no modifica las reglas del ajedrez, solo limita el tiempo, ya que el total de movimientos de cada jugador debe realizarse en menos de 10 minutos. Extremo, ¿verdad?

Reglas especiales del ajedrez que mejorarán tus jugadas

¡Qué bien! Has logrado llegar a esta sección complementaria a las reglas del ajedrez básicas que ya hemos visto. Eres consciente de que aprender más movimientos y reglas especiales en el ajedrez te ayudarán a mejorar tus estrategias en este juego de mesa tan apasionante.

Así que comencemos de inmediato esta lección, donde podrás poner en práctica las jugadas especiales y algunas reglas del ajedrez que no son tan conocidas, ya que ahora lo que necesitas es ganar confianza y dominar las reglas propias del juego. ¡Seguimos!

Promoción de peón o coronación

La primera de las reglas especiales del ajedrez es la coronación o promoción de peón. ¿De qué se trata esta regla? Muy fácil. Si un peón llega al borde opuesto del tablero del jugador, es promovido como otra pieza del tablero, ya sea torre, caballo, alfil o reina.

La nueva pieza sustituye al peón en su casilla actual y sigue las reglas de movimiento de la pieza correspondiente. Así que, según las reglas especiales del ajedrez, puedes escoger convertirte en cualquier pieza del tablero excepto un rey.

Así mismo, debes tener en cuenta que conocer las reglas del ajedrez te da la oportunidad de tener a más de 1 reina. ¡Así es! Las reglas del ajedrez dicen en cuanto a la promoción que cada vez que un peón llega al otro lado del tablero puede también convertirse en reina, incluso si la otra reina que ya habías conseguido siguiera en el juego.

Esto quiere decir que un jugador puede tener varias reinas como resultado de la promoción de sus peones, o varios alfiles capaces de moverse a lo largo de las diagonales del mismo color dependiendo de la casilla a la que el peón ha sido promovido.

Enroque de las piezas

Antes de comenzar con esta regla especial de ajedrez, veamos que dice la RAE acerca de la definición de "Enroque". En el juego del ajedrez, movimiento defensivo en que el rey y la torre del mismo bando cambian simultáneamente su posición. Entonces, ¿en qué consiste el enroque? Esta es una regla especial del ajedrez que te permite hacer 2 jugadas simultáneamente. Es posible hacer un enroque con cualquiera de las dos torres siempre y cuando no se hayan movido de su esquina inicial.

Las reglas especiales del ajedrez manifiestan que puedes mover el rey hacia la torre en dos casillas en vez de una, y luego colocar la torre de tu oponente en la casilla al lado del rey. Para hacer este movimiento, ten en cuenta lo siguiente:

- Debe ser el primer movimiento del rey.
- Debe ser el primer movimiento de la torre.
- El rey debe estar fuera de jaque.
- No puedes enrocar al rey por una casilla que se vea amenazada por una pieza de tu oponente.
- La torre puede saltar por encima de otra pieza.
- No debe haber ninguna otra ficha de ajedrez entre ellos antes de hacer el enroque.
- El rey y la torre deben estar en la misma fila.

Como ya conoces las reglas básicas del ajedrez, tal vez te estés preguntando: ¿cuántos tipos de enroque hay? Hay dos tipos de enroque en el ajedrez, uno que puede hacerse al lado del rey, que recibe el nombre de enroque corto) o también puedes hacer un enroque al lado de la reina, el cual se le conoce como enroque largo.

Pro tip: Recuerda que no puedes utilizar al rey en un movimiento de enroque si está en jaque. En cambio, puedes mover una torre para hacer un enroque incluso si es amenazada por una pieza del oponente. En otras palabras, puede ser capturada en el siguiente turno del oponente, o en cualquiera de las casillas que atraviesa durante la ejecución de la jugada.

Captura al paso o "comer al paso"

Como te has dado cuenta, el ajedrez es principalmente un juego de estrategia. Y aunque puede parecer que alguien resulte ganador por la forma en que usa las reglas del ajedrez a su favor, son los esfuerzos de planificación a largo plazo los que te pueden dar más oportunidades de éxito.

Así que ahora vamos a explicarte qué es “comer al paso” o captura al paso en el ajedrez, una de las reglas especiales más populares entre ajedrecistas expertos o principiantes de todo el mundo. Si uno de los peones de tu oponente avanza dos casillas, tu adversario puede declarar “comer al paso” en el siguiente turno y mover su peón en diagonal a la casilla que el peón cruzó, capturando el peón como si hubiera movido solo una casilla. Claro que, para que sea una jugada legal, debes declarar el cruce y llevarlo a cabo en el siguiente turno del oponente, de lo contrario, el jugador que tiene la oportunidad de capturar el peón pierde esa oportunidad. Pero no querrás desaprovecharlo, así que más vale que mantengas presente esta importante regla del ajedrez. ¿Está claro?

Por ejemplo, digamos que mueves un peón desde la segunda fila hasta la cuarta y el peón de tu adversario está en la cuarta fila. El peón oponente puede capturar el tuyo con un movimiento diagonal a la casilla que estaba protegiendo. Esta regla del ajedrez suele definir muchísimos partidos en el tenso final de una partida. Por eso, es clave que no te quedes solamente con las reglas básicas del ajedrez.

Por ejemplo, digamos que mueves un peón desde la segunda fila hasta la cuarta y el peón de tu adversario está en la cuarta fila. El peón oponente puede capturar el tuyo con un movimiento diagonal a la casilla que estaba protegiendo. Esta regla del ajedrez suele definir muchísimos partidos en el tenso final de una partida. Por eso, es clave que no te quedes solamente con las reglas básicas del ajedrez.

A pesar de conocer las reglas del ajedrez, ten en cuenta que el ajedrez es un juego de pensar mucho y no está hecho para todos. Hay que practicar mucho, como también observar a alguien jugarlo. Lo bueno es que siempre puedes practicar las reglas del ajedrez en la comodidad de tu smartphone, una tablet o en una computadora.

Regla de los 50 movimientos

Esta es una de las más avanzadas de las reglas del ajedrez, pues rara vez entra en vigor en el tablero. Sin embargo, es posible que te topes con esta jugada viendo un partido de algún súper maestro. Recordemos la gran contienda de 1997 entre el ruso “Garry Kasparov vs. Deep Blue”, en la que una computadora desarrollada por científicos de IBM hizo renunciar al ruso después de 19 movimientos.

Pues bien, ¿de qué se trata la regla de los 50 movimientos?
La regla del ajedrez establece que es posible reclamar un empate si no ha habido una captura y si no se ha movido ningún peón en los 50 movimientos anteriores. Y si decíamos que esta regla del ajedrez escasamente entra en un juego es porque más bien sirve para evitar que se extienda para siempre, o sea, cuando uno o ninguno de los jugadores saben cómo terminar el juego.

Ejercicios de razonamiento

El Ajedrez es sin duda el deporte ciencia que puede practicarse desde cualquier edad, con las experiencias cotidianas que suceden, a veces es necesario realizar un análisis de cada situación para tomar las mejores decisiones, seguramente encontraras un sin fin de opciones para practicar este deporte, te presentamos una página (que podras ingresar a través de los códigos QR) en la que podrás encontrar todos los detalles para que seas un ajedrecista destacado.

En ajedrez es importante la resolución de ejercicios y problemas de razonamiento , empezaremos resolviendo los siguientes mates:

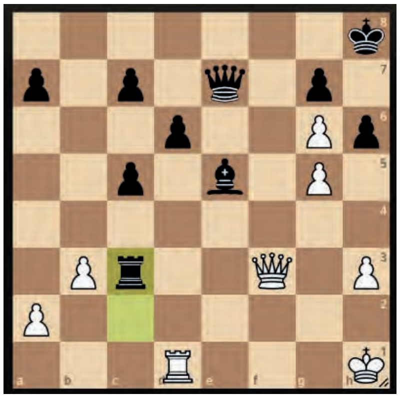
Actividad 81. Analiza las siguientes posiciones para encontrar en jaque mate en un movimientos:

Juegan Blancas

Juegan Negras

Juegan Negras

Actividad 85. Analiza las siguientes posiciones para encontrar en jaque mate en dos movimientos:



Juegan Blancas

Juegan Negras

Juegan Negras

Escanea el QR

Ingresa al código QR para aprender las nociones básicas del ajedrez.

Escanea el QR

Ingresa al código QR para resolver problemas de razonamiento (combinaciones y mates) a través de la plataforma Lichess.

Escanea el QR

Ingresa al código QR para encontrar las respuestas a los ejercicios de las diferentes actividades.

¡REALICEMOS LA VALORACIÓN!

Actividad 86. Reflexionamos acerca de la importancia del desarrollo del pensamiento lógico a través de la practica del ajedrez y respondemos las siguientes preguntas:

1) ¿ Para qué nos sirve aprender a jugar ajedrez?
2) ¿ Porqué es importante el desarrollo del pensamiento lógico matemático?

¡ES HORA DE LA PRODUCCIÓN!

Actividad 87. Con materiales del contexto construimos un tablero de ajedrez y sus piezas para organizar con los compañeros de curso y la ayuda del profesor una torneo de ajedrez.

ESTADO PLURINACIONAL DE
BOLIVIA

MINISTERIO
DE EDUCACIÓN

www.minedu.gob.bo

@minedubol

@minedubol

@minedu_bol

Ministerio de Educación - Oficial

MinEduBol

informacion@minedu.gob.bo

(591) 71550970 - 71530671

@minedu_bolivia

Av. Arce No. 2147 • Teléfonos: (591-2) 2442144 - 2442074 • Casilla de Correo: 3116
La Paz - Bolivia